Karel Dusl

O množinách s netransitivním uspořádáním členů

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 51 (1922), No. 4, 264--266

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109008

Maximum nebo minimum nastává patrně dle toho, je-li $c_0 c_1 c_2 \ldots . c_{n-1}$ kladné či záporné, čili — což je totéž — je-li $a_0 + a_1 + \ldots . a_{n-1}$ (nebo $d_0 + d_1 + \ldots . + d_{n-1}$) sudé či liché.

Zavedu-li parametr

$$\zeta = \frac{\alpha_0}{4} + \frac{\alpha_1}{4^2} + \ldots . + \frac{\alpha_{n-1}}{4^n} + \ldots .$$

a kladu-li $a_n = 0, 3, 4, 7$ dle toho, je-li $\alpha_n = 0, 1, 2, 3$, dostávám parametrické vyjádření funkce Bolzanovy, jež podali pp. prof. Petr a prof. Rychlík.

O množinách s netransitivním uspořádáním členů.

Napsal *Karel Dusl.*

Množina jest jak známo *„uspořádaná“*, je-li znám seřaďovací zákon členů, takže o kterýchkoli dvou členech víme, který předchází a který následuje, což píšeme $a < b$,*) při čemž symbol $<$ znamená asymetrický, transitivní vztah přiřaďovací.**) Vztah $a < b$ vylučuje tedy současnou platnost $b < a$ a pro každé tři prvky $a < b < c$ jest $a < c$ současně. Takovým přiřaďovacím vztahem jest na př. srovnání členů dle velikosti ($\gtrless$), dle pořadí, nebo dle některé jiné závislosti $(\supset)$ předepsané jednotně pro všechny členy množiny.

Můžeme ale stanoviti přiřaďovací vztah $a\ R\ b$, který je sice asymetrický. ale *netransitivní* (t. j. ne vždy transitivní), anebo *intransitivní* ($a\ R\ b$, $b\ R\ c$ vylučuje $a\ R\ c$). Asymetrickým netransitivním vztahem jest na př. příslušnost (ε) ku určité třídě, pro kterou platí jistý závěr $\varphi\ (x)$.

Rozložíme-li tedy množinu na více množin, můžeme elementy každé z množin seřaditi dle asymetrického a transitivního pravidla R_k elementy dvou různých množin na př. *m-té* a *n-té* pak srovnávati dle pravidla $R_{m,\,n}$ rovněž asymetrického a transitivního. Pak seřaďovací zákon stanovený takto pro veškeré elementy původní množiny bude sice asymetrický, ale nebude obecně transitivní. Ponecháme-li i zde symbol $<$, jakožto výraz právě definované obecné „přednosti“ elementů, nebude obecně při každých třech prvcích dané množiny a, b, c, pro něž platí $a < b$, $b < c$, splněna relace $a < c$.

*) Symbol přednosti má být složen ze dvou obloučků na rozdíl od znamení nerovnosti. Pro nedostatek příslušného symbolu tištěno však rovně $<$ Čtenáři nebude však snad obtížno si uvědomiti, kde symbol $<$ znamená obecnou přednost a kde nerovnost.

**) L. Couturat. „Philosophische Principen der Mathematik“. Str. 33. B. Russel „Principles of Mathematics“ Chapter XXVI. p. 218.

Možnost takového uspořádání chci ukázati na příkladě:

Uvažujme množinu složenou ze dvou množin úplně seřazených (každá jejich částečná množina má první člen). Množina hodnot racionálních čísel intervalu (0, 1):

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \ldots$$

dá se rozložiti na dvě množiny P_l a P_s. V množině P_l nechť jsou zlomky se jmenovateli lichými, v množině P_s zlomky se jmenovateli sudými. Vyslovme pak pravidlo, dle něhož dáváme přednost členům takto:

a) v každé z obou množin P_s a P_l jest

$$\frac{p_m}{q_m} < \frac{p_n}{q_n}$$

jestliže jest $p_m < p_n$ a teprve při stejných čitatelích dávejme přednost dle velikosti jmenovatelů (jmenovateli menšímu).

b) srovnáváme-li elementy obou množin, nechť mají přednost zlomky s menším jmenovatelem, bez ohledu na čitatele.

Nechť náleží $l_1 = \frac{p_1}{q_1}$, $l_3 = \frac{p_3}{q_3}$ množině liché, $s_2 = \frac{p_2}{q_2}$ pak množině sudé.

a) budiž: $l_1 < s_2 < l_3$ to je možno jen při $q_1 < q_2 < q_3$ potom jest:

$$l_1 < l_3 \text{ je-li } p_1 < p_3$$
$$l_1 > l_3 \text{ je-li } p_1 > p_3$$
$$l_1 < l_3 \text{ je-li } p_1 = p_3$$

b) jestliže jest $l_1 < l_3 < s_2$ jest to možno:

1.) když $p_1 < p_3$, $q_3 < q_2$ tu jest pak $l_1 \gtreqless s_2$ dle toho, je-li $q_1 \gtreqless q_2$

2.) $p_1 = p_3$ $q_1 < q_2 < q_3$ tu jest $l_1 < s_2$.

Jak vidno, není tu každá trojice hodnot transitivní a vytčený vztah předností označili bychom jako *netransitivní.* —

Vyslovíme-li však pravidlo přednostní poněkud pozměněně, budou trojice hodnot $l < s < l'$ vždy netransitivní; t. j. $l > l'$. V obou množinách P_l a P_s dejme přednost zlomkům, jichž součet čitatele a jmenovatele jest *menší*, při srovnávání prvků obou množin pak zlomkům, jichž stejně vzatý součet jest *větší*; při týchž součtech nechť o přednosti rozhodují *jmenovatelé* a to v témže smyslu, jak to řečeno o součtech.

Potom jestliže jest: *a*) $l_1 < s_2 < l_3$ jest to možno následujícími čtyřmi způsoby:

1. $p_1 + q_1 > p_2 + q_2 > p_3 + q_3$
2. $p_1 + q_1 = p_2 + q_2 > p_3 + q_3$, $q_1 > q_2$
3. $p_1 + q_1 > p_2 + q_2 = p_3 + q_3$, $q_2 > q_3$
4. $p_1 + q_1 = p_2 + q_2 = p_3 + q_3$, $q_1 > q_2 > q_3$

Ve všech případech jest $l_1 > l_3$, tu jest tedy seřaďovací vztah *intransitivní.*

Naproti tomu v případě *b)* $l_1 < l_3 < s_2$ mohou nastati tyto možnosti:

1. $p_1 + q_1 < p_3 + q_3$, $p_3 + q_3 > p_2 + q_2$.

Tu jest $l_1 \lesseqgtr s_2$ dle toho, je-li $p_1 + q_1 \gtreqless p_2 + q_2$.

2. $p_1 + q_1 = p_3 + q_3 > p_2 + q_2$, $q_1 < q_3$.

Tu jest vždy: $l_1 < s_2$.

3. $p_1 + q_1 < p_3 + q_3 = p_2 + q_2$, $q_3 > q_2$.

Zde obráceně $l_1 > s_2$.

4. $p_1 + q_1 = p_2 + q_2 = p_3 + q_3$ $q_1 < q_3$, $q_3 > q_2$

Tu jest $l_1' \lesseqgtr s_2$ dle toho, je-li $q_1 \gtreqless q_2$

Každé tři prvky $l_1 < s_2 < l_3$ řídí se zde tedy pravidlem netransitivním, čehož nelze říci, jestliže $l_1 < l_3 < s_2$. Pro trojice l, s, l', nebo s, l, s' jest tedy vytčený vztah přiřaďovací intransitivní, pro trojice l, l', s; l, s, s' pak netransitivní. Tento poznatek lze rozšířiti i na množiny složené z více *(k)* úplně seřazených množin, případně na množiny složené ze dvou (*k*) spočetných množin, jichž prvky jsou opět množiny spočetné a konečně i na množiny s mohutností kontinua.

Nomogramy transparentální.

Napsal *Dr. V. Havlík.*

1. V VI. kapitole svého „Traité de Nomographie" poukázal *M. d'Ocagne* na možnost užití třetího základního principu theoretické nomografie — na užití *„superposice rovin"*.

Princip sám i další theorie — obojí jest jednoduché: Při nomogramech intersekčních, kollineačních a pod. přiřazují se sobě vždy jistým způsobem elementy (body a čáry) v jedné operační rovině. Nyní budeme k sobě přiřazovati elementy dvou i více rovin. To tak: na pevnou rovinu položíme jinou, průhlednou rovinu („transparent") způsobem, jenž by zaručoval určitost té polohy na základě posičních vztahů mezi některými elementy obou rovin, a pak najdeme vztah mezi těmito a ostatními elementy obou rovin — resp. mezi jich kotovými parametry.