Úlohy

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 30 (1901), No. 5, 377--416

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109006

Úlohy.

Řešení úloh.

Úloha 25.

Dána jest kuželosečka a na této tři libovolné body M_1, M_2, M_3. Pak vedeny přímky P_1, P_2, P_3 rovnoběžné s hlavní osou ve vzdálenostech FM_1, FM_2, FM_3, kdež F značí ohnisko kuželosečky, a body M_1, M_2, M_3 spuštěny kolmice Q_1, Q_2, Q_3 k ose hlavní. Jest dokázati, že průsečíky (P_1Q_1), (P_2Q_2), (P_3Q_3) jsou na jediné přímce.

Posl. fil. *Karel Nečas.*

Řešení. (Zaslal p. *Viktor Tereba,* stud. VII. tř. g. ve Val. Meziříčí.)

Polárná ohnisková rovnice kuželoseček jest

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi},$$

kdež p značí parametr, ε číselnou výstřednost. Zavedeme-li místo polárného úhlu φ úsečku x, jest

$$x = r \cos \varphi, \quad r = r + \varepsilon x.$$

Leží-li body $M_1 (r_1\, x_1)$, $M_2 (r_2\, x_2)$, $M_3 (r_3\, x_3)$ na kuželosečce, jest

$$r_1 = p + \varepsilon x_1, \; r_2 = p + \varepsilon x_2, \; r_3 = p + \varepsilon x_3,$$

odkud vyloučením p, ε plyne podmínka

$$\begin{vmatrix} x_1, & r_1, & 1 \\ x_2, & r_2, & 1 \\ x_3, & r_3, & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Průsečíky daných přímek mají v pravoúhlé soustavě, kdež F jest počátkem a hlavní osa osou úseček, souřadnice

$$(P_1Q_1)\ldots x_1, r_1;\ (P_2Q_2)\ldots x_2, r_2;\ (P_3Q_3)\ldots x_3, r_3;$$

jest tedy

$$\begin{vmatrix} x_1, & y_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

což jest známá podmínka, by body (P_1Q_1), (P_2Q_2), (P_3Q_3) ležely v jedné přímce.

Úloha 26.

Řešiti rovnici

$$1 - \frac{2x}{x^2+x-2} + \frac{2x}{x^2-x-6} + \frac{2x}{x^2-4x+3}$$
$$= \frac{10x}{x^3-2x^2-5x+6}.$$

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Josef Honzák,* stud. VI. tř. gym. ve Vys. Mýtě.)

Rozložíme-li jmenovatele zlomků v linearné činitele, můžeme rovnici psáti

$$1 - \frac{2x}{(x-1)(x+2)} + \frac{2x}{(x+2)(x-3)} + \frac{2x}{(x-1)(x-3)}$$
$$= \frac{10x}{(x-1)(x+2)(x-3)}.$$

Násobíme-li obě strany nejmenším spol. násobkem jmenovatelů, obdržíme

$$x^3-2x^2-5x+6+2x(x-1+x+2-x+3)-10x=0$$

čili

$$x^3-7x+6=0.$$

Jeden kořen této rovnice jest patrně

$$x_1 = 1;$$

dělíme-li činitelem kořenovým $x-1$, dospějeme k rovnici kvadratické

$$x^2+x-6=0,$$

z níž ustanovíme

$$x_2=2, \quad x_3=-3.$$

Poznámka redakce: Tyto hodnoty jsou kořeny poslední rovnice kubické, ale ne všechny vyhovují rovnici původně dané.

Jestliže totiž rovnici annulujeme a všechny členy v jeden zlomek Z sloučíme, obdržíme rovnici

$$Z=\frac{x^3-7x+6}{(x-1)(x+2)(x-3)}=0$$

čili

$$Z=\frac{(x-1)(x-2)(x+3)}{(x-1)(x+2)(x-3)}=0.$$

Tento výraz Z stává se rovným nulle při $x=2$, $x=-3$ ne však při $x=1$; tu nabývá hodnoty

$$\frac{(x-2)(x+3)}{(x+2)(x-3)}=\frac{2}{3}.$$

Rovnice

$$x^3-7x+6=0$$

není equivalentní s rovnicí původně danou, nýbrž má o jeden kořen ($x=1$) více.

Úloha 27.

Nad stranou $\overline{ab}=a$ sestrojen rovnostranný trojúhelník abc a trojúhelník abd tak, že obvod i obsah tohoto rovná se dvojnásobnému obvodu i obsahu trojúhelníka prvého.

a) Které jsou strany $\overline{ad}$, $\overline{bd}$ trojúhelníka abd?

b) V kterém poměru jsou poloměry kružnice opsané a vepsané trojúhelníku abd?

Frant. Jiršák, učitel v Dobřenicích.

Řešení. (Zaslal p. *Václav Sukdol*, stud. VIII. tř. gym. v Českých Budějovicích.)

Položme

$$\overline{ad}=x, \quad \overline{bd}=y, \quad \overline{dg}=v, \quad \overline{bg}=z,$$

při čemž dg značí výšku trojúhelníka abd. Jelikož dle podmínky

$$\triangle\, abg = 2\,.\, \triangle\, abc,$$

jest

$$v = a\sqrt{3}.$$

Mimo to jest dle druhé podmínky

$$x + y + a = 6a,$$

dále pak

$$x^2 = (a + z)^2 + v^2$$
$$y^2 = z^2 + v^2.$$

Z rovnic těchto plyne

$$x^2 - y^2 = a^2 + 2az$$
$$x + y = 5a$$
$$x - y = \frac{a + 2z}{5},$$

tudíž

$$x = \frac{13a + z}{5}, \quad y = \frac{12a - z}{5}$$

a jelikož

$$y^2 = z^2 + 3a^2,$$

obdržíme k určení z rovnici

$$8z^2 + 8az - 23a^2 = 0,$$

z níž ustanovíme

$$z = \frac{a}{4}(-2 \pm 5\sqrt{2}).$$

Při hořejším znaménku vypočítáme

$$x = \frac{a}{4}(10 + \sqrt{2}), \quad y = \frac{a}{4}(10 - \sqrt{2}),$$

při negativném z budou hodnoty x, y navzájem vyměněny.

b) Dle známých vzorců ustanovíme poloměr ϱ kružnice vepsané i poloměr r kružnice opsané trojúhelníku abd. Jestiť

$$\varrho = \frac{\varDelta}{s} = \frac{a^2}{2}\sqrt{3} : 3a = \frac{a}{6}\sqrt{3},$$

$$r = \frac{axy}{4\Delta} = a \cdot \frac{a^2}{16} \cdot 98 : 2a^2\sqrt{3} = \frac{49a}{48}\sqrt{3},$$

tudíž

$$\varrho : r = 8 : 49.$$

Úloha 28.

Sestrojiti jest rovnoramenný trojúhelník, dán-li rozdíl půdice a ramene, jakož i rozdíl příslušných výšek.

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Ondř. Kopeček,* stud. VII. tř. real. v Hodoníně.)

Rozbor. Označme rameno $\overline{ac} = \overline{bc}$ trojúhelníka abc písmenem a, půdici $\overline{ab} = b$, příslušné výšky $\overline{an} = u$, $\overline{cm} = v$; předpokládejme $a > b$, tedy $u < v$. Jelikož jest

$$a : b = v : u,$$

jest

$$(a - b) : a = (v - u) : v,$$

$$\frac{a - b}{v - u} = \frac{a}{v}.$$

Dáno-li $a - b$, $v - u$, jest tedy znám též poměr $\frac{a}{v}$ a tím určen tvar trojúhelníka abc. Dle poměru toho lze napřed sestrojiti

$$\sphericalangle acm = \sphericalangle bcm = \gamma.$$

Učiníme-li na rameni bc úsečku

$$bd = ba,$$

a označíme-li

$$\sphericalangle adc = \varphi, \quad \sphericalangle bac = \alpha = R - \gamma,$$

jest

$$\varphi = \alpha + 2R - \varphi,$$

tudíž

$$\varphi = R + \frac{\alpha}{2}.$$

Dle toho lze k rameni $\overline{cd}$ sestrojiti rameno $\overline{da}$, čímž určen vrchol a. Je-li $a < b$, tudíž $u > v$, lze obdobně pokračovati.

Úloha 29.

Jsou-li u, v výšky rovnoramenného trojúhelníka příslušné k rameni a a půdici b, budiž řešen trojúhelník, dáno-li

$$a - b = 17, \quad v - u = 15.$$

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *František Dvořák,* stud. VIII. tř. g. v Brně.)

Ku dvěma rovnicím daným připojme

$$au = bv$$

$$a^2 = v + \frac{b^2}{4};$$

jest pak

$$v = \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}}, \quad u = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}},$$

tudíž

$$\sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}}\left(1 - \frac{b}{a}\right) = 15.$$

Ve spojení s první rovnicí danou obdržíme

$$17\sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}} = 15a$$

čili

$$289\,(4a^2 - b^2) = 900a^2,$$

z čehož, hledíme-li pouze k hodnotám kladným,

$$16a = 17b.$$

Z rovnic

$$a - b = 17$$

$$a : b = 17 : 16$$

vycházejí pak hodnoty

$$a = 289, \quad b = 272;$$

k nim přísluší

$$v = 255, \quad a = 240.$$

Úloha 30.

Příčky spojující středy protějších stran čtyrúhelníka ABCD protínají se v bodě S.

Budiž dokázáno, že jest

$$\triangle ABS + \triangle CDS = \triangle BCS + \triangle DAS.$$

Posl. fil. *Rud. Hruša.*

Řešení. (Zaslal p. *Karel Rychlík*, stud. V. tř. akad. gymn. v Praze.)

Strany AB, BC, CD, DA buďtež po řadě rozpůleny v bodech M, P, N, Q; příčky MN, PQ protínají se v bodě S. Potom jest

$$SM = SN, \quad SP = SQ,$$

jelikož MPNQ jest rovnoběžník.

Mimo to jest

$$\triangle ABS = \triangle AMQ + \triangle BMP;$$

neboť, spustíme-li s bodů P, Q, S kolmice PP_1, QQ_1, SS_1 ku straně AB, jest

$$\triangle AMQ = \frac{1}{2} \overline{AM} \,.\, \overline{QQ_1}$$

$$\triangle BMP = \frac{1}{2} \overline{BM} \,.\, \overline{PP_1},$$

tudíž

$$\triangle AMQ + \triangle BMP = \frac{1}{2} \overline{AB} \,.\, (\overline{PP_1} + \overline{QQ_1}) = \overline{AB} \,.\, \overline{SS_1} = \triangle ABS.$$

Z obdobných důvodů jest

$$\triangle CNP + \triangle DNQ = \triangle CDS.$$

Jest tedy

$$\begin{aligned} \triangle ABS + \triangle CDS &= \triangle AMQ + \triangle BMP \\ &\quad + \triangle CNP + \triangle DNQ \\ &= ABCD - MPNQ = \frac{1}{2} ABCD; \end{aligned}$$

rovněž jest

$$\triangle BCS + \triangle DAS = \frac{1}{2} ABCD,$$

tudíž, jak tvrzeno,

$$\triangle ABS + \triangle CDS = \triangle BCS + \triangle DAS.$$

Úloha 31.

V harmonickém čtyrúhelníku ABCD dány jsou úhly

$$\sphericalangle DAB = \alpha, \quad \sphericalangle ABC = \beta.$$

Který úhel svírají úhlopříčky?

[Harmonickým slove čtyrúhelník do kruhu vepsaný, v němž součiny protějších stran jsou stejné].

Posl. fil. *Rud. Hruša.*

Řešení. (Zaslal p. *Antonín Lochmann*, stud. VIII. tř. g. v Ml. Boleslavi.)

Ve čtyrúhelníku ABCD vepsaném do kruhu poloměru r označme úhly

$$\sphericalangle CAD = \sphericalangle CBD = \varphi,$$

úhel úhlopříček ω.

Jest pak

$$\omega = \alpha - \varphi + \beta - \varphi,$$

tudíž

$$\varphi = \frac{\alpha + \beta - \omega}{2}$$

$$\alpha - \varphi = \frac{\alpha - \beta + \omega}{2}$$

$$\beta - \varphi = \frac{\beta - \alpha + \omega}{2}$$

$$\omega + \varphi = \frac{\alpha + \beta + \omega}{2}.$$

Mimo to jest

$$\overline{AB} = 2r \sin(\omega + \varphi)$$

$$\overline{CD} = 2r \sin \varphi$$

$$\overline{AC} = 2r \sin(\beta - \varphi)$$

$$\overline{BD} = 2r \sin(\alpha - \varphi),$$

tudíž

$$\sin \varphi \sin(\omega + \varphi) = \sin(\alpha - \varphi) \sin(\beta - \varphi)$$

čili

$$\sin\frac{\alpha+\beta-\omega}{2}\sin\frac{\alpha+\beta+\omega}{2}=\sin\frac{\alpha-\beta+\omega}{2}\sin\frac{\beta-\alpha+\omega}{2}.$$

Jelikož však obecně

$$\sin\gamma\sin\delta=\frac{1}{2}[\cos(\gamma-\delta)-\cos(\gamma+\delta)],$$

přechází rovnice poslední ve

$$\cos\omega-\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha-\beta)-\cos\omega$$

čili

$$\cos\omega=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)],$$

tudíž

$$\cos\omega=\cos\alpha\cos\beta.$$

Uloha 32.

Kterou odchylku má rovina kruhu od průmětny, je-li průmětem jeho ellipsa o parametru rovném polovici poloměru? Jaká jest pak číselná výstřednost ellipsy?

Frant. Jirsák, učitel v Dobřenicích.

Řešení. (Zaslal p. *Zdeněk Laštovka,* stud. VII. tř. r. v Čes. Budějovicích.)

Poloosy ellipsy jsou

$$a=r,\quad b=r\cos\alpha,$$

má-li rovina kruhu od průmětny odchylku α. Parametr ellipsy jest pak

$$p=\frac{b^2}{a}=r\cos^2\alpha=\frac{r}{2},$$

tudíž

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \alpha=45^0.$$

Lineárná výstřednost ellipsy v tomto případě jest

$$e=\sqrt{a^2-b^2}=r\sin\alpha=\frac{r\sqrt{2}}{2},$$

pročež výstřednost číselná

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Úloha 33.

Dva jehlany, jichž základny jsou $Z_1 = 15$, $Z_2 = 20$ a výšky $v_1 = 6$, $v_2 = 4$, stojí na téže rovině; ve které vzdálenosti jest vésti k této rovinu rovnoběžnou,

a) aby vznikly na jehlanech řezy obsahem stejné,

b) aby vznikly komolé jehlany obsahem stejné.

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *K. Dusl*, stud. VI. tř. r. v Rakovníku.)

a) Žádaná rovina měj od základen vzdálenost x, průsek její s jehlanem prvním měj obsah P_1, s druhým P_2. Potom platny jsou úměry

$$Z_1 : P_1 = v_1^2 : (v_1 - x)^2$$
$$P_2 : Z_2 = (v_2 - x)^2 : v_2^2.$$

Má-li býti

$$P_1 = P_2 = P,$$

obdržíme znásobením obou úměr

$$Z_1 : Z_2 = v_1^2 (v_2 - x)^2 : v_2^2 (v_1 - x)^2$$

a odmocněním

$$\sqrt{Z_1} : \sqrt{Z_2} = v_1 (v_2 - x) : v_2 (v_1 - x).$$

Odtud ustanovíme

$$x = \frac{v_1 v_2 (\sqrt{Z_1} - \sqrt{Z_2})}{v_2\sqrt{Z_1} - v_1\sqrt{Z_2}},$$

načež

$$P = \left(\frac{v_1 - x}{v_1}\right)^2 Z_1 = \left(\frac{v_1 - v_2}{v_2\sqrt{Z_1} - v_1\sqrt{Z_2}}\right)^2 Z_1 Z_2.$$

Při daných hodnotách číselných jest

$$x = \frac{24(\sqrt{20} - \sqrt{15})}{6\sqrt{20} - 4\sqrt{15}} = 3 - \sqrt{3},$$

$$P = \left(\frac{2}{6\sqrt{20} - 4\sqrt{15}}\right)^2 . 300 = \frac{5}{2}(2 + \sqrt{3}).$$

K témuž výsledku mohli jsme dojíti touto cestou:

$$P_1 = \left(\frac{v_1 - x}{v_1}\right)^2 Z_1, \quad P_2 = \left(\frac{v_2 - x}{v_2}\right)^2 Z_2,$$

tedy při $P_1 = P_2$ jest

$$\left(\frac{v_1 - x}{v_1}\right)^2 Z_1 = \left(\frac{v_2 - x}{v_2}\right)^2 Z_2.$$

Rozvineme-li tuto rovnici a spořádáme, nabude podoby

$$(Z_1 v_2^2 - Z_2 v_1^2)\, x^2 - 2 v_1 v_2 (Z_1 v_2 - Z_2 v_1)\, x + v_1^2 v_2^2 (Z_1 - Z_2) = 0;$$

odtud ustanovíme

$$x = \frac{v_1 v_2}{Z_1 v_2^2 - Z_2 v_1^2} [Z_1 v_2 - Z_2 v_1 \mp (v_1 - v_2)\sqrt{Z_1 Z_2}],$$

kterýž výraz od hořejšího jen tvarem se liší.

b) Při stejném označení jako v odst. *a*) obdržíme pro rovnost obsahů kuželů zkomolených podmínku

$$\frac{x}{3}[Z_1 + \sqrt{Z_1 P_1} + P_1] = \frac{x}{3}[Z_2 + \sqrt{Z_2 P_2} + P_2]$$

čili

$$Z_1\left[1 + \frac{v_1 - x}{v_1} + \left(\frac{v_1 - x}{v_1}\right)^2\right] = Z_2\left[1 + \frac{v_2 - x}{v_2} + \left(\frac{v_2 - x}{v_2}\right)^2\right].$$

Tuto upravíme v rovnici

$$(Z_1 v_2^2 - Z_2 v_1^2)\, x^2 - 3 v_1 v_2 (Z_1 v_2 - Z_2 v_1)\, x + 3 v_1^2 v_2^2 (Z_1 - Z_2) = 0,$$

z níž plyne

$$x = -\frac{v_1 v_2 \sqrt{3}}{2(Z_1 v_2^2 - Z_2 v_1^2)} [(Z_1 v - Z_2 v_1)\sqrt{3}$$
$$\mp \sqrt{4(v_1 - v_2)^2 Z_1 Z_2 - (Z_1 v_2 - Z_2 v_1)^2}\,].$$

Dané hodnoty číselné vedou k rovnici

$$x^2 - 9x + 18 = 0,$$

z níž ustanovíme

$$x_1 = 3, \quad x_2 = 6.$$

Rovina ve vzdálenosti $x_1 = 3$ rovnoběžná ku základnám stanoví komolé kužele obsahu

$$K_1 = K_2 = \frac{Zx}{3} \cdot \frac{3v^2 - 3vx + x^2}{v^2},$$

kdež hodnotám v a Z lze připojiti ukazatele 1 neb 2; v obou případech obdržíme

$$K = \frac{75}{2} = 37 \cdot 5.$$

Rovina u vzdálenosti $x_2 = 6$ prochází vrcholem kužele prvního, jehož obsah jest

$$K_1' = \frac{15 \cdot 6}{3} = 30.$$

Druhý kužel jest doplniti ve dvojkužel, jehož vrchní základnu Z_2' vypočítáme z úměry

$$Z_2 : Z_2' = 4^2 : 2^2,$$

tedy

$$Z_2' = 5;$$

obsah dvojkužele jest pak

$$K_2' = \frac{1}{3}(20 \cdot 4 + 5 \cdot 2) = 30,$$

tudíž také

$$K_1' = K_2'.$$

Úloha 34.

Dána jest ellipsa, na jejíž hlavní poloose $\overline{oa}$ jest ohnisko f, na prodloužené vedlejší poloose $\overline{ob}$ pak bod g tak, že $\overline{fg} \perp \overline{bf}$.

Je-li m libovolný bod ellipsy a vedeme-li $\overline{mh} \parallel \overline{oa}$, $\overline{hi} \parallel \overline{bg}$, $\overline{il} \parallel \overline{oa}$, kdež leží bod h na $\overline{bf}$, i na $\overline{fg}$, l na $\overline{bg}$, jest $\overline{ml}$ normalou ellipsy v bodě m. Budiž podán důkaz této konstrukce.

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Emil Schoenbaum,* stud. VIII. tř. g. v Benešově.)

Budiž

$$\overline{oa} = a, \quad \overline{ob} = b, \quad \overline{of} = e.$$

Jsou-li x_1, y_1 souřadnice bodu m, jest rovnice normály

$$\mathrm{N} \equiv a^2 y_1 x - b^2 x_1 y - e^2 x_1 y_1 = 0$$

a tudíž úsek její na ose Y

$$n = -\frac{e^2 y_1}{b^2}.$$

Označíme-li

$$\sphericalangle\, ofb = \alpha,$$

jest

$$n = -y_1 \operatorname{ctg}^2 \alpha.$$

Dle sestrojení jest, značí-li j průsečík přímky $\overline{hi}$ s poloosou $\overline{oa}$,

$$\overline{hj} = y_1, \quad \overline{jf} = y_1 \operatorname{ctg} \alpha,$$
$$\overline{ji} = \overline{ol} = -y_1 \operatorname{ctg}^2 \alpha,$$

tedy

$$\overline{ol} = n.$$

Poznámka redakce: Obdobně lze ustanoviti průsečík normaly s osou hlavní. Veďme $\overline{ml} \parallel \overline{bg}$, $\overline{ln} \parallel \overline{oa}$, $\overline{np} \perp \overline{fg}$, $\overline{pq} \perp \overline{oa}$, při čemž leží body l a p na $\overline{fg}$, n na $\overline{og}$, q na $\overline{oa}$; $\overline{mq}$ jest normálou v bodě m. Odůvodnění záleží v tom, že jest

$$\overline{oq} = \frac{e^2 x_1}{a^2} = x_1 \cos^2 \alpha.$$

Úloha 35.

Dány jsou v pravoúhlé soustavě souřadnic body

$$a_1\,(2, 0), \quad b_1\,(6, 0); \quad a_2\,(0, 4), \quad b_2\,(0, 1).$$

Jest ustanoviti bod c tak, aby trojúhelníky $a_1 b_1 c$, $a_2 b_2 c$ byly sobě podobny.

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Josef Zahradníček*, stud. VIII. tř. g. v Třebíči.)

Jsou-li trojúhelníky $a_1 b_1 c$, $a_2 b_2 c$ vzájemně podobny, jest

$$\frac{a_1c}{a_2c} = \frac{b_1c}{b_2c} = \frac{a_1b_1}{a_2b_2};$$

podmínky tyto jsou k určení bodu c nutny, ale také dostatečny. Označíme-li souřadnice bodu c písmeny x, y, jest

$$\overline{a_1c} = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}, \quad \overline{b_1c} = \sqrt{(x-6)^2 + y^2},$$
$$\overline{a_2c} = \sqrt{x^2 + (y-4)^2}, \quad \overline{b_2c} = \sqrt{x^2 + (y-1)^2}.$$

Pro bod c obdržíme tudíž dvě geometrická místa určená rovnicemi

$$\sqrt{\frac{(x-2)^2 + y^2}{(x-6)^2 + y^2}} = \frac{4}{3}, \quad \sqrt{\frac{x^2 + (y-4)^2}{x^2 + (y-1)^2}} = \frac{4}{3};$$

tato místa jsou dvě kružnice Apolloniovy pro úsečky $\overline{a_1a_2}$, $\overline{b_1b_2}$ a rovnice jich ve tvaru racionalném jsou

$$K_1 \equiv 7(x^2 + y^2) + 36x - 128y + 220 = 0$$
$$K_2 \equiv 7(x^2 + y^2) + 108x - 32y - 308 = 0.$$

Průsečíky těchto kružnic jsou 2 body c řešící úlohu.

Chordála obou kružnic má rovnici

$$K_2 - K_1 \equiv 72x + 96y - 528 = 0$$

čili

$$3x + 4y - 22 = 0;$$

body společné této přímce a kterékoli z obou kružnic jsou body hledané. Ustanovíme-li na př.

$$y = \frac{22 - 3x}{4}$$

a dosadíme do rovnice K_2, obdržíme rovnici

$$175x^2 + 1188x - 4356 = 0,$$

ze které vypočítáme

$$x = \frac{1}{175}[-594 \pm 1056];$$

bude tedy

$$x_1 = \frac{66}{25} = 2{\cdot}64, \quad x_2 = -\frac{66}{7} = -9\frac{3}{7},$$

k čemuž přísluší

$$y_1 = \frac{88}{25} = 3{\cdot}52, \quad y_2 = \frac{88}{7} = 12\frac{4}{7}\,.$$

Souřadnice x_1, y_1 sluší bodu c_1, souřadnice x_2, y_2 bodu c_2; i jest pak

$$\triangle\, a_1b_1c_1 \sim \triangle\, a_2b_2c_1, \quad \triangle\, a_1b_1c_2 \sim \triangle\, a_2b_2c_2.$$

Úloha 36.

Řešiti jest rovnici

$$\frac{a}{\sqrt{x^2-a^2}} + \frac{b}{\sqrt{x^2-b^2}} + \frac{c}{\sqrt{x^2-c^2}} = \frac{abc}{\sqrt{(x^2-a^2)(x^2-b^2)(x^2-c^2)}}.$$

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Ant. Růžek*, stud. VIII. třídy gym. v Táboře.)

Rovnici zlomků zbavenou pišme v podobě

$$a\sqrt{(x^2-b^2)(x^2-c^2)} + b\sqrt{(x^2-c^2)(x^2-a^2)}$$
$$= abc - c\sqrt{(x^2-a^2)(x^2-b^2)},$$

zdvojmocněním obdržíme

$$a^2(x^2-b^2)(x^2-c^2) + b^2(x^2-c^2)(x^2-a^2) - c^2(x^2-a^2)(x^2-b^2)$$
$$- a^2b^2c^2 = -2abx^2\sqrt{(x^2-a^2)(x^2-b^2)},$$

čili — po odstranění kořene $x^2 = 0$ —

$$(a^2+b^2-c^2)\,x^2 - 2a^2b^2 = -2ab\sqrt{(x^2-a^2)(x^2-b^2)}.$$

Opětným zdvojmocněním a zkrácením činitelem x^2 nabude rovnice tvaru

$$[(a^2+b^2-c^2)^2 - 4a^2b^2]\,x^2 + 4a^2b^2c^2 = 0,$$

odkud ustanovíme

$$x = \pm\frac{2abc}{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}}.$$

Poznámka. Jsou-li a, b, c strany trojúhelníka, značí vypočítaný kořen x průměr kružnice trojúhelníku opsané. Položíme-li

$$\frac{a}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \operatorname{tg} \alpha,$$

jest

$$x = \frac{a}{\sin \alpha}$$

a obdobně

$$x = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma};$$

α, β, γ jsou pak úhly trojúhelníka, o nichž v platnosti jest relace známá

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma.$$

Úloha 37.

Ustanoviti jest dvě čísla, jichž největší společná míra jest 360 a nejmenší společný násobek 32400.

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Břetislav Brzobohatý*, stud. VI. tř. r. v Lipníku.)

Žádaná čísla buďtež x, y; potom jest

$$x = 360\,u, \qquad y = 360\,v,$$

kdež u, v jsou čísla celá nesoudělná. Nejmenší společný násobek čísel x, y jest pak $360uv$, tudíž

$$360uv = 32400$$

čili

$$uv = 90.$$

Z toho plynou tato 4 řešení:

$u =$	1	2	5	9
$v =$	90	45	18	10
$x =$	360	720	1800	3240
$y =$	32400	16200	6480	3600

Úloha 38.

V zahradě vysázena řada stromků, z nichž jeden od druhého 5 m vzdálen. V prodloužení této řady stojí nádržka vodní. Za-

hradník zalévaje stromky a chodě po zalití každého stromku zase k nádržce zpět, ušel těmito cestami po zalití všech stromků, vrátiv se od posledního též zpět k nádržce, celkem 13750 m. Víme-li, že od posledního stromku k nádržce jest 260 m, jest vypočítati: kolik stromů jest v řadě a v jaké vzdálenosti jest první stromek od nádržky.

Stud. techn. *Vlad. Ibl.*

Řešení. (Zaslal p. *C. Fiala*, stud. VI. tř. r. v Plzni.) Dráhy, jež vykonal zahradník od nádržky k jednotlivým stromkům, tvoří patrně arithmetickou posloupnost, jejíž rozdíl $d = 5$, poslední člen $a_n = 260$ a součet $s_n = \frac{13750}{2} = 6875$.

První člen a_1 (vzdálenost prvního stromku od nádržky) a počet členů (stromků) n plyne ze známých vzorců

$$a_n = a_1 + (n - 1)\, d.$$

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n).$$

V daném případě jest

$$a_1 + 5n = 265,$$

$$n(a_1 + 260) = 13750.$$

Vyloučíme-li a_1, vyjde rovnice

$$n^2 - 105n + 2750 = 0,$$

jejíž kořeny jsou

$$n_1 = 50, \quad n_2 = 55;$$

k těm přísluší hodnoty

$$a_1' = 15, \quad a_1'' = -10.$$

V prvním případě bylo by 50 stromků a nádržka před prvním z nich 15 *m*, ve druhém pak 55 stromků a nádržka (mezi stromky) za prvním 10 *m*.

Úloha 39.

V trojúhelníku abc vésti jest příčky

$$a_1 a_2 \parallel cb, \quad b_1 b_2 \parallel ac, \quad c_1 c_2 \parallel ba$$

tak, aby šestiúhelník $a_1a_2b_1b_2c_1c_2$ byl rovnostranný. Jsou-li a, b, c strany trojúhelníka, x strana šestiúhelníka, jest dokázati, že

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Jindřich Barvík*, stud. VII. tř. g. v Opavě.)

Dle zvoleného v úloze označení jsou ve straně ab vrcholy a_2, b_1, ve straně bc vrcholy b_2, c_1 a ve straně ca vrcholy c_2, a_1. Budiž

$$a_1a_2=a_2b_1=b_1b_2=b_2c_1=c_1c_2=c_2a_1=x,$$
$$aa_2=y, \qquad b_1b=z.$$

Z podobnosti trojúhelníků plyne

$$y:x=c:a, \qquad z:x=c:b,$$

tudíž

$$y=\frac{cx}{a}, \quad z=\frac{cx}{b},$$
$$y:z:x=\frac{1}{a}:\frac{1}{b}:\frac{1}{c}.$$

Jelikož výšky trojúhelníka jsou obráceně úměrny stranám, jest také

$$y:z:x=v_a:v_b:v_c.$$

Znajíce, v kterém poměru body a_2 b_1 dělí stranu ab, totiž

$$aa_2:a_2b_1:b_1b=v_a:v_c:v_b,$$

snadno tyto body sestrojíme a také ostatní vrcholy šestiúhelníka ustanovíme.

Poněvadž jest

$$x+y+z=c,$$

máme dle hořejších rovnic

$$x+\frac{cx}{a}+\frac{cx}{b}=c,$$

z čehož

$$x=\frac{abc}{ab+bc+ac}$$

čili

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

Úloha 40.

Dokažte, že v šestiúhelníku $a_1a_2b_1b_2c_1c_2$ předešlé úlohy spojnice a_1b_2, b_1c_2, c_1a_2 protínají se v jediném bodě, jehož vzdálenosti od stran a, b, c původního trojúhelníka jsou v poměru

$$(b+c):(c+a):(a+b).$$

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Josef Mráz,* stud. VIII. třídy gym. na Smíchově.)

Zůstávajíce při označení, jehož v úloze předcházející bylo užito, znamenejme ještě vzdálenosti vrcholů a, b, c od příček a_1a_2, b_1b_2, c_1c_2 po řadě l_a, l_b, l_c; průsečík spojnic v úloze jmenovaných měj od stran trojúhelníka vzdálenosti k_a, k_b, k_c. Že se spojnice a_1b_2, b_1c_2, c_1a_2 v jediném bodě s protínají, jest patrno z toho, že šestiúhelník maje protější strany rovnoběžné a stejné, jest středově souměrný; středem souměrnosti jest právě bod s.

Vzdálenosti jeho od stran trojúhelníka ustanovíme takto:

Z podobnosti trojúhelníků cc_1c_2 a abc vysvítá, že

$$l_c : x = v_c : c,$$

tudíž

$$l_c=\frac{xv_c}{c}=\frac{abv_c}{ab+bc+ca}.$$

Poněvadž pak

$$l_c+2k_c=v_c,$$

jest

$$k_c=\frac{1}{2}(v_c-l_c)=\frac{(a+b)\,cv_c}{2\,(ab+bc+ca)}=\frac{(a+b)\,\Delta}{ab+bc+ca}.$$

Obdobné hodnoty mají vzdálenosti k_a, k_b; jest proto

$$k_a : k_b : k_c=(b+c):(c+a):(a+b).$$

Úloha 41.

Každý vrchol čtverce spojen jest s body půlícími protější strany; spojnice tyto omezují rovnostranný čtyrosý osmiúhelník. Vypočísti jest obsah mnohoúhelníka a poloměr vepsané jemu kružnice, dána-li strana čtverce.

Frant. Jirsák, učitel v Dobřenicích.

Řešení. (Zaslal p. *Karel Vodička*, stud. VIII. tř. gym. v Jindř. Hradci.)

Delší z os souměrnosti svírá se stranou úhel φ, pro který jest

$$\operatorname{tg} \varphi = 2,$$

tudíž

$$\sin \varphi = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Stranu osmiúhelníka vyjádříme z úměry

$$x : \frac{a}{4} = \sin 45^0 : \sin (45^0 + \varphi);$$

obdržíme tak po dosazení hodnot

$$x = \frac{a}{12} \sqrt{5}.$$

Poloměr ϱ kružnice vepsané osmiúhelníku jest

$$\varrho = \frac{a}{4} \sin \varphi = \frac{a}{10} \sqrt{5}.$$

Jest tedy obsah mnohoúhelníka

$$M = 4x\varrho = \frac{a}{3} \sqrt{5} . \frac{a}{10} \sqrt{5} = \frac{a^2}{6},$$

rovná se tudíž $\frac{1}{6}$ daného čtverce. Kruh vepsaný tomuto mnohoúhelníku má obsah

$$K = \pi \varrho^2 = \frac{\pi a^2}{20},$$

což jest $\frac{1}{5}$ plochy kruhu vepsaného ve čtverec daný.

Úloha 42.

Přímky půlící vnitřní úhly nerovnostranného rovnoběžníka omezují rovnoběžník pravoúhlý. Jest dokázati, že úhlopříčky tohoto rovnoběžníka jsou rovnoběžny ku stranám původního a jest ustanoviti jich délku.

Frant. Jirsák, učitel v Dobřenicích.

Řešení. (Zaslal p. *Lad. Dědouch*, stud. VIII. tř. gym. v Pelhřimově.)

Budiž dán rovnoběžník *abcd*, jehož strany

$$\overline{ab} = a, \quad \overline{bc} = b, \quad a > b.$$

Příčky půlící vnitřní úhly a, b protínejtež se v bodě c_1; jelikož úhly a, b jsou výplňkové, jsou polovice jich úhly doplňkovými a tudíž $ac_1 \perp bc_1$.

Rozpůlivše všechny vnitřní úhly rovnoběžníka *abcd* obdržíme 4 polopaprsky omezující pravoúhlý rovnoběžník $a_1b_1c_1d_1$.

Přímka půlící úhel a protínej stranu cd v bodě e; obdobně mějme příčky bf, cg, dh. Jest pak

$$ad = de = ah = bc = cf = bg;$$

čtyrúhelníky *adeh*, *bcfg* jsou rovnoběžníky rovnostranné, d_1 a b_1 jich středy. Jest tedy bod d_1 a podobně i b_1 stejně vzdálen od stran ab a cd, pročež

$$b_1d_1 \parallel ab.$$

Z rovnoběžnosti $fg \parallel eh$ a shodnosti $\triangle a_1gh \cong \triangle c_1ef$ vysvítá, že jest $a_1c_1 \parallel fg$ a tedy také

$$a_1c_1 \parallel ad.$$

Tím dokázáno, že úhlopříčky rovnoběžníka $a_1b_1c_1d_1$ jsou rovnoběžny ku stranám rovnoběžníka *abcd*. Jelikož rovnoběžník $a_1b_1c_1d_1$ jest pravoúhlý, jest $a_1c_1 = b_1d_1$.

Prodloužíme-li b_1d_1 až protne strany ad, bc v bodech k, l, jest

$$kd_1 = b_1l = \frac{b}{2},$$

tedy

$$b_1 d_1 = kl - kd_1 - b_1 l = a - \frac{b}{2} - \frac{b}{2},$$

pročež

$$b_1 d_1 = a_1 c_1 = a - b.$$

Úloha 43.

Úhlopříčky pravidelného osmiúhelníka omezují dva menší pravidelné osmiúhelníky. Je-li A obsah největšího, B prostředního a C nejmenšího, jest dokázati, že

$$B = \frac{1}{2}(A + C).$$

Posl. fil. *Inocenc Hanzlík.*

Řešení. (Zaslal p. *Josef Kálal,* stud. VII. tř. r. v Písku.) Budiž r poloměr kružnice opsané danému osmiúhelníku; obsah jeho

$$A = 4r^2 \sin 45^0 = 2r^2 \sqrt{2}.$$

Spojíme-li vrcholy jeho ob jeden, omezují spojnice tyto osmiúhelník B. Poloměr r_1 kružnice opsané tomuto osmiúhelníku rovná se straně původního, jest tedy

$$r_1 = a = 2r \sin 22\tfrac{1}{2}^0 = r\sqrt{2 - \sqrt{2}}.$$

Úhlopříčky spojující vrcholy daného osmiúhelníka ob dva omezují osmiúhelník C; kružnice jemu opsaná má poloměr

$$r_2 = \frac{a}{\cos 22\frac{1}{2}^0} = r \operatorname{tg} 22\tfrac{1}{2}^0 = r(\sqrt{2} - 1).$$

Jest tedy

$$A : B : C = r^2 : r_1^2 : r_2^2 = 1 : (2 - \sqrt{2}) : (\sqrt{2} - 1)^2$$

čili

$$A : B : C = 1 : (2 - \sqrt{2}) : (3 - 2\sqrt{2}).$$

Odtud plyne

$$(A + C) : B = (4 - 2\sqrt{2}) : (2 - \sqrt{2}),$$

tudíž

$$A + C = 2B.$$

Úloha 44.

V trojúhelníku jest

$$tg\,\alpha : tg\,\beta : tg\,\gamma = 1 : 2 : 3;$$

v kterém poměru jsou a) jeho strany, b) jeho výšky, c) svrchní části výšek, d) spodní části výšek? Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Karel Petráň*, stud. VII. třídy r. v Hradci Králové.)

O úhlech trojúhelníka znám jest vztah

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma;$$

z rovnice této a z podmínek daných vypočítáme

$$\operatorname{tg}\alpha = 1, \quad \operatorname{tg}\beta = 2, \quad \operatorname{tg}\gamma = 3.$$

Odtud ustanovíme

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{10}},$$
$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \sin\gamma = \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

Strany trojúhelníka jsou tedy v poměru

$$a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma = \sqrt{5} : 2\sqrt{2} : 3;$$

výšky jsou v převráceném poměru stran, tedy

$$v_a : v_b : v_c = \frac{1}{\sin\alpha} : \frac{1}{\sin\beta} : \frac{1}{\sin\gamma} = 6\sqrt{2} : 3\sqrt{5} : 2\sqrt{10}.$$

Průsečíkem výšek dělí se každá v část u svrchní, vrchol obsahující a část spodní t, přilehající ku straně. Jest pak

$$u_a = \frac{b\cos\alpha}{\sin\beta} = 2r\cos\alpha,$$
$$t_a = c\cos\beta \operatorname{ctg}\gamma = 2r\cos\beta\cos\gamma,$$

jelikož obdobné hodnoty mají výškové úsečky

$$u_b, \quad u_c \quad \text{a} \quad t_b, \quad t_c,$$

jest

$$u_a : u_b : u_c = \cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = \sqrt{5} : \sqrt{2} : 1,$$
$$t_a : t_b : t_c = \frac{1}{\cos\alpha} : \frac{1}{\cos\beta} : \frac{1}{\cos\gamma} = \sqrt{2} : \sqrt{5} : \sqrt{10}.$$

Úloha 45.

Sestrojte trojúhelník, dána-li strana a, protilehlý úhel α a poloměr ϱ kružnice vně vepsané a strany a se dotýkající.

Prof. *Jindř. Muk* v Rychnově n. K.

Řešení. (Zaslal p. *Eman. Dvořák*, stud. VII. třídy r. v Brně.)

Rozbor. Budiž abc trojúhelník hledaný; označme

$$\overline{bc} = a, \quad \sphericalangle\, bac = \alpha,$$

mimo to buď o středem kružnice vepsané vně o poloměru ϱ. V trojúhelníku obc jsou úhly

$$R - \frac{\alpha}{2}, \quad R - \frac{\beta}{2}, \quad R - \frac{\gamma}{2}.$$

Nalezneme tedy vrchol o trojúhelníka obc jako průsek dvou geometrických míst: kružnice sestrojené nad tetivou $\overline{bc} = a$ s příslušným úhlem obvodovým $R - \frac{\alpha}{2}$ a rovnoběžky ve vzdálenosti ϱ od $\overline{bc}$. Z trojúhelníka obc snadně nalezneme trojúhelník abc.

Poznámka. Poloměr r kružnice opsané trojúhelníku obc jest

$$r = \frac{a}{2\cos\frac{\alpha}{2}};$$

dle toho, jest-li

$$r\left(1 + \sin\frac{\alpha}{2}\right) \gtreqless \varrho,$$

má úloha dvě řešení (shodná), jedno neb žádné.

Úloha 46.

Řešiti jest rovnici

$$cos^4 x (sin^3 x + sin 3x - cos 3x) - sin^4 x (cos^3 x + sin 3x - cos 3x) = sin^7 x - cos^7 x.$$

Prof. *Jindřich Muk* v Rychnově n. K.

Řešení. (Zaslal p. *Frant. Valach*, stud. VIII. třídy gym. v Kroměříži.)

Rovnici pišme v podobě

$$\cos^4 x (\cos^3 x + \sin^3 x + \sin 3x - \cos 3x) - \sin^4 x (\cos^3 x + \sin^3 x + \sin 3x - \cos 3x) = 0$$

čili

$$(\cos^4 x - \sin^4 x) (\cos^3 x + \sin^3 x + \sin 3x - \cos 3x) = 0.$$

Rovnice tato rozpadá se ve dvě, z nichž první

$$\cos^4 x - \sin^4 x = 0$$

za příčinou vztahu

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

jest totožna s rovnicí

$$\cos^2 x - \sin^2 x = 0$$

čili

$$\cos 2x = 0,$$

odkudž

$$x = \frac{2n+1}{2} R.$$

V rovnici

$$\cos^3 x + \sin^3 x + \sin 3x - \cos 3x = 0$$

vyjádřeme $\sin 3x$ a $\cos 3x$ funkcemi úhlu jednoduchého dle vzorců

$$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x, \quad \cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x;$$

tím obdržíme, zkrátivše 3mi,

$$\cos x + \sin x - (\cos^3 x + \sin^3 x) = 0.$$

Tuto rovnici můžeme psáti

$$(\cos x + \sin x) (1 - \cos^2 x + \cos x \sin x - \sin^2 x) = 0,$$

kteráž opět ve dvě se rozkládá.

Je-li

$$\cos x + \sin x = 0,$$

jest

$$\operatorname{tg} x = -1,$$

tudíž

$$x = 2n\mathrm{R} - \frac{\mathrm{R}}{2} = \frac{4n-1}{2}\mathrm{R}.$$

Druhý činitel vede k rovnici

$$\sin x \cos x = 0$$

čili

$$\sin 2x = 0,$$

z níž

$$x = n\mathrm{R}.$$

Úloha 47.

Úhlopříčky pravidelného pětiúhelníka o straně a tvoří hvězdovitý pětiúhelník 2. řádu. Tvoří-li tento pětiúhelník síť jehlanu, jest určiti povrch i obsah jehlanu, poloměr koule vepsané a opsané, stěnové úhly jehlanu.

Frant. Jirsák, učitel v Dobřenicích.

Řešení. (Zaslal p. *Eduard Pleva*, stud. VI. třídy r. v Kutné Hoře.)

V pravidelném pětiúhelníku $abcde$ veďme úhlopříčky omezující pětiúhelník $a_1b_1c_1d_1e_1$, který s trojúhelníky a_1b_1b, b_1c_1c, c_1d_1d, d_1e_1e, e_1a_1a tvoří síť jehlanu pravidelného pětibokého. Je-li $ab = a$, jest obsah původního pětiúhelníka

$$\mathrm{P}_1 = \frac{5a^2}{4}\operatorname{ctg} ..6^0$$

a tudíž povrch jehlanu

$$\mathrm{P} = \mathrm{P}_1 - 5 \,.\, \triangle\, aba_1.$$

Jest však

$$\varDelta = \triangle\, aba_1 = \frac{a^2}{4}\operatorname{tg} 36^0,$$

pročež

$$\mathrm{P} = \frac{5a^2}{4}(\operatorname{ctg} 36^0 - \operatorname{tg} 36^0) = \frac{5a^2}{4} \,.\, 2\operatorname{ctg} 72^0$$

$$\mathrm{P} = \frac{a^2}{2}\sqrt{25 - 10\sqrt{5}}.$$

Strana pětiúhelníka $a_1 b_1 c_1 d_1 e_1$ budiž a_1; jest to menší díl strany a rozdělené zlatým řezem

$$a_1 : (a - a_1) = (a - a_1) : a.$$

Úměru tuto přetvořme v rovnici

$$a_1^2 - 3a_1 a + a^2 = 0,$$

z níž ustanovíme menší kořen

$$a_1 = \frac{a}{2}(3 - \sqrt{5}).$$

Obsah pětiúhelníka pravidelného o straně a_1 jest

$$Z = \frac{5}{4} a_1^2 \operatorname{ctg} 36^0,$$

čímž vypočtena základna jehlanu

$$Z = \frac{a^2}{8}(7 - 3\sqrt{5})\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}$$
$$= \frac{a^2}{8}\sqrt{10(25 - 11\sqrt{5})}.$$

Výška v jehlanu daná jest výrazem

$$v = \sqrt{\left(\frac{a_1}{2}\operatorname{tg} 72^0\right)^2 - \left(\frac{a^0}{2}\operatorname{tg} 54^0\right)^2}$$
$$= \frac{a_1}{2}\sqrt{\operatorname{tg}^2 72^0 - \operatorname{tg}^2 54^0}.$$

Hodnoty těchto tangent jsou

$$\operatorname{tg} 72^0 = \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$$
$$\operatorname{tg} 54^0 = \frac{1}{5}\sqrt{25 + 10\sqrt{5}};$$

proto jest

$$v = a_1\sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}} = a\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}}.$$

Lze již nyní ustanoviti obsah jehlanu

$$J = \frac{1}{3} Zv = \frac{a^3}{24} \sqrt{(25 - 11\sqrt{5})(5 - \sqrt{5})}$$

$$J = \frac{a^3}{12} \sqrt{45 - 20\sqrt{5}} = \frac{a^3}{12} (5 - 2\sqrt{5}).$$

Poloměr ϱ koule vepsané určen jest rovnicí

$$\varrho = \frac{3J}{P},$$

z níž dosazením hodnot a upravením nalezneme

$$\varrho = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{5 - 2\sqrt{5}}{5}}.$$

Shledáváme, že povrch jehlanu

$$P = 5a\varrho.$$

Poloměr r koule opsané ustanovíme z relace

$$\varrho_1^2 = v(2r - v),$$

značí-li ϱ_1 poloměr kružnice opsané o základnu.

Poloměr tento

$$\varrho_1 = \frac{a_1}{2 \cos 54^0} = \frac{a(3 - \sqrt{5})}{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}$$

čili

$$\varrho_1 = a\sqrt{\frac{5 - 2\sqrt{5}}{5}} = 2\varrho;$$

proto jest

$$r = \frac{\varrho_1^2 + v^2}{2v} = \frac{a}{2} \sqrt{5 - 2\sqrt{5}} = \frac{a}{2} \operatorname{tg} 36^0.$$

Odchylku α pobočné stěny od základny vypočítáme ze vztahu

$$\cos \alpha = \frac{\frac{a_1}{2} \operatorname{tg} 54^0}{\frac{a_1}{2} \operatorname{tg} 72^0} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Odchylku β dvou pobočných stěn můžeme ustanoviti z trojúhelníka, jehož vrcholy jsou na př. b_1 e_1 a třetí f na hraně a_1t, značí-li t témě jehlanu a je-li rovina $b_1e_1f \perp a_1t$. Jest pak

$$b_1f = a_1 \sin 72^0 = \frac{a}{2} \operatorname{tg} 36^0 = r$$

$$b_1e_1 = 2a \sin 54^0 = \frac{a}{2} (\sqrt{5} - 1).$$

Je-li

$$\sphericalangle b_1fe_1 = \beta,$$

jest

$$\overline{b_1e_1}^2 = 2 \,.\, \overline{b_1f}^2 - 2\overline{b_1f}^2 \,.\, \cos\beta,$$

$$\cos\beta = \frac{2-\sqrt{5}}{5-2\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}};$$

jest tedy

$$\alpha + \beta = 2\mathrm{R}.$$

Úloha 48.

V pravoúhlé soustavě souřadnic dány body

$$a\,(-5, 0),\ b\,(0, 5),\ c\,(4, 3),\ d\,(3, -4).$$

Dokažte, že body ty leží na kružnici; ustanovte rovnici této kružnice; vypočítejte strany, úhlopříčky a obsah čtyrúhelníka abcd.

Posl. fil. *Jan Schüller.*

Řešení. (Zaslal p. *Frant. Dokládal,* stud. VII. třídy r. v Prostějově.)

Jelikož dané body mají od počátku stejnou vzdálenost $r = 5$, leží na kružnici, jejíž rovnice jest

$$x^2 + y^2 = 25.$$

Délky stran čtyrúhelníka *abcd* vypočítáme ze souřadnic vrcholů

$$\overline{ab} = 5\sqrt{2},\quad \overline{bc} = 2\sqrt{5},\quad \overline{cd} = 5\sqrt{2},\quad \overline{da} = 4\sqrt{5};$$

rovněž tak ustanovíme úhlopříčky

$$\overline{ac} = \overline{bd} = 3\sqrt{10}.$$

Označíme-li strany po řadě písmeny a, b, c, d a úhlopříčky m, n, jest dle vypočítaných hodnot

$$ae + bd = mn;$$

tím znovu stvrzeno, že čtyrúhelník jest do kružnice vepsán. Jest to patrně rovnoramenný lichoběžník, ve kterém

$$\overline{ad} \parallel \overline{bc}, \quad \overline{ab} \parallel \overline{cd}.$$

Výška tohoto lichoběžníka, vzdálenost stran $\overline{ad}$ a $\overline{bc}$, jest

$$v = \sqrt{a^2 - \left(\frac{d-b}{2}\right)^2} = \sqrt{30}.$$

Odtud vypočítáme úhel $bad = adc = \alpha$ dle vzorce

$$\sin\alpha = \frac{v}{a} = \sqrt{\frac{3}{5}} = \frac{1}{5}\sqrt{15},$$
$$\alpha = 71^0 34'.$$

Obsah čtyrúhelníka lze stanoviti buď analyticky jako součet dvou trojúhelníků aneb dle planimetrického vzorce

$$P = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)} = 45.$$

Úloha 49.

Do ellipsy vepsati jest kosočtverec, jehož strany délka jest dána.

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Karel Hulla*, stud. VIII. třídy gym. v Olomouci.)

Mějme ellipsu danou v pravoúhlé soustavě souřadnic rovnicí

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

Do té vepsati jest kosočtverec, jehož strana měj délku danou s. Kosočtverec tento — $mnpq$, — má úhlopříčky

$$\overline{mp} = 2m, \quad \overline{nq} = 2n,$$

kteréž na sobě kolmo stojí a středem o ellipsy se rozpolují. Svírá-li poloměr $\overline{om}$ s osou X úhel α, má bod m souřadnice

$$x_1 = m\cos\alpha, \quad y_1 = m\sin\alpha,$$

které do rovnice ellipsy dosadivše vypočítáme

$$m^2 = \frac{a^2 b^2}{b^2 \cos^2 \alpha + a^2 \sin^2 \alpha}.$$

Podobně jest pro bod n

$$n^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha}.$$

Z výrazů těchto vyplývá vztah

$$\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2}$$

čili

$$\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2},$$

jest tedy tento součet pro všechny vepsané kosočtverce veličinou stálou.

Položíme-li

$$a^2 + b^2 = c^2$$
$$m^2 + n^2 = s^2,$$

můžeme relaci poslední psáti též

$$\frac{s^2}{m^2 n^2} = \frac{c^2}{ab}$$

čili

$$\frac{mn}{s} = \frac{ab}{c} = \varrho,$$

kdež ϱ jest poloměr kružnice vepsané v kosočtverec. I tato veličina jest tedy stálou pro všechny v ellipsu vepsané kosočtverce. Všechny v ellipsu vepsané rovnostranné rovnoběžníky jsou téže kružnici opsány.

Jeden z kosočtverců takových určen jest vrcholy ellipsy; strana jeho jest c. Znajíce přeponu s a příslušnou k ní výšku ϱ, můžeme kdekoli sestrojiti trojúhelník omn; když jsme tak ustanovili odvěsny jeho m, n, přeneseme je jakožto poloměry do ellipsy, čímž nalezneme vrcholy žádaného kosočtverce v ellipsu vepsaného.

Abychom vyšetřili *omezení úlohy*, vyjádřeme z dřívějších výrazů délku strany s. Jestiť

$$s^2 = m^2 + n^2 = \frac{a^2 b^2 (a^2 + b^2)}{(a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha)(a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha)}.$$

Jelikož čítatel tohoto zlomku má hodnotu stálou, jest s tím menší, čím větší hodnotu má jmenovatel. Tento může býti psán v podobě

$$\begin{aligned} J &= a^2 b^2 (\cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha) + (a^4 + b^4) \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha \\ &= a^2 b^2 (1 - 2 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha) + (a^4 + b^4) \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha \\ &= a^2 b^2 + \frac{1}{4} e^4 \sin^2 2\alpha. \end{aligned}$$

Poněvadž obsah kosočtverce jest $2\varrho s$ a ϱ jest veličina stálá, vzrůstá obsah současně s délkou strany.

Maximum s obdržíme tedy při nejmenší hodnotě $\sin 2\alpha$, t. j. při $\alpha = 0$; kosočtverec určený vrcholy ellipsy jest tedy největší z vepsaných kosočtverců.

Minimum s nastane při největší hodnotě $\sin 2\alpha$, t. j. při $\alpha = 45^0$, tedy $m = n$; nejmenší z kosočtverců vepsaných v ellipsu přechází tudíž ve čtverec.

$$s_{max} = c, \quad s_{min} = \frac{ab}{c} = \varrho.$$

Úloha 50.

Do kuželosečky dané v pravoúhlé soustavě souřadnic rovnicí

$$y^2 = x(12 - x) - 11$$

vepsán jest šestiúhelník abcdef, jehož vrcholy mají úsečky

$$x_1 = 1,\ x_2 = 3,\ x_3 = 6,\ x_4 = 10,\ x_5 = 9,\ x_6 = 2;$$

z příslušných pořadnic jsou y_5 a y_6 záporné. Jest dokázati, že průsečíky protějších stran tohoto šestiúhelníka leží v jedné přímce, a rovnici této přímky jest vyvoditi.

Posl. fil. *Jan Schüller.*

Řešení. (Zaslal p. *Vladimír Polák,* stud. VII. tř. gym. v Přerově.)

Daná kuželosečka jest kružnice, jejíž rovnici lze psáti v normálním tvaru

$$(x-6)^2+y^2=25.$$

Pořadnice vrcholů šestiúhelníka jsou

$$y_1=0,\quad y_2=4,\quad y_3=5,\quad y_4=3,\quad y_5=-4,\quad y_6=-3.$$

Rovnice stran šestiúhelníka ustanovíme jako rovnice přímek, z nichž každá určena jest dvěma body; obdržíme tak

$$\overline{ab}\equiv 2x-y-2=0,\qquad \overline{de}\equiv 7x-y-67=0,$$
$$\overline{bc}\equiv x-3y+9=0,\qquad \overline{ef}\equiv x+7y+19=0,$$
$$\overline{cd}\equiv x+2y-16=0,\qquad \overline{fa}\equiv 3x+y-3=0.$$

Průsečíky protějších stran označme:

$$m(ab,de),\quad n(bc,ef),\quad p(cd,fa);$$

souřadnice jich vyplývají z rovnic příslušných stran a jsou:

$$\xi_1=13,\qquad \eta_1=24,$$
$$\xi_2=-12,\qquad \eta_2=-1,$$
$$\xi_3=-2,\qquad \eta_3=9.$$

Jelikož jest

$$\begin{vmatrix}\xi_1, & \eta_1, & 1\\ \xi_2, & \eta_2, & 1\\ \xi_3, & \eta_3, & 1\end{vmatrix}=0,$$

leží body m, n, p v jedné přímce P. Rovnice její jest

$$\mathrm{P}\equiv x-y+11=0.$$

V geometrii polohy dokazuje se důležitá obecná *věta Pascalova*: V každém šestiúhelníku, jenž jest kuželosečce vepsán, leží průsečíky protějších stran v jedné přímce. Přímka ta slove *Pascalovou přímkou* daného šestiúhelníka.

Správná řešení úloh v tomto ročníku Časopisu obsažených zaslali pp.:

Arnold Emil, stud. VI. tř. r. na Starém Městě v Praze, úl. 26., 27., 38., 41.

Bartošek Jul., stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 26., 29., 37., 38., 41., 43.

Barvík Jindřich, stud. VIII. tř. g. v Opavě, úl. 25. až 50.
Brancovský Jindřich, stud. VII. tř. g. v Třebíči, úl. 26. až 29., 31., 33., 35., 36., 38., 42., 45., 46.
Brzobohatý Břetislav, stud. VI. tř. r. v Lipníku, úl. 25. až 50.
Břeský František, stud. VII. tř. g. ve Val. Meziříčí, úl. 26., 27., 29., 33., 36. až 44., 46., 48., 50.
Czwetler Frant., stud. VIII. tř. g. v Jindř. Hradci, úl. 26., 27., 36., 38., 41., 46., 48.
Čupr Karel, stud. V. tř. g. ve Vys. Mýtě, úl. 25. až 50.
Dědouch Lud., stud. VIII. tř. g. v Pelhřimově, úl. 26. až 29., 31., 32., 33., 35. až 48.
Dokládal Frant., stud. VII. tř. r. v Prostějově, úl. 26. až 29., 32., 38., 48., 50.
Drastich Frant., stud. VIII. tř. g. v Opavě, úl. 13., 25. až 29., 32. až 39., 40. až 48., 50.
Duchek Frt., stud. VI. tř. r. v Plzni, úl. 26. až 29., 33., 36., 37., 38., 41. až 44., 46.
Dusl K., stud. VI. tř. v Rakovníku, úl. 26. až 29., 31., 32., 33., 35. až 48.
Dvořák Eman., stud. VII. tř. r. v Brně, úl. 25. až 48., 50.
Dvořák Frant., stud. VIII. tř. g. v Brně, úl. 25. až 48., 50.
Fiala C., stud. VI. tř. r. v Plzni, úl. 26. až 29., 38., 41., 43., 46.
Fiala Josef, stud. VII. tř. r. v Písku, úl. 25. až 29., 31. až 39., 41., 42., 43., 45. až 48., 50.
Fink Hugo, stud. VII. tř. g. v Jindřichově Hradci, úl. 26., 38., 48.
Flusser Karel, stud. VI. tř. r. v Rakovníku, úl. 26., 27., 35., 37., 38., 39.
Foltynovský Josef, stud. VII. tř. g. ve Val. Meziříčí, úl. 26.
Franěk Frant. stud. VI. tř. r. v Pardubicích, úl. 36., 37., 39. 42., 46.
Funk Theodor, stud. VI. tř. r. v Rakovníku, úl. 27., 32., 33., 37., 38., 39., 41., 42., 43., 45., 46., 47.
Grössl Václav, stud. VI. tř. r. na Král. Vinohradech, úl. 25. až 29., 31. až 48., 50.
Habrich Alois, stud. VI. tř. r. v Prostějově, úl. 26. až 33., 36., 37., 38., 41., 42., 45., 46.

Hanosek Bohumír, stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 25. až 30., 32. až 36., 38., 39., 41. až 46., 48., 50.
Hanus Josef, stud. VIII. tř. g. v Litomyšli, úl. 25. až 50.
Hanuš Jos., stud. VII. tř. r. v Jičíně, úl. 26., 27., 29., 32., 33., 38., 41.
Hanuš Rudolf, posluchač vyšší lesnické školy v Písku, úl. 28., 29., 37., 38., 39.
Havelka Miloslav, stud. VI. tř. r. v Pardubicích, úl. 26., 36., 37., 38., 41., 42., 46.
Hegner Václav, stud. V. tř. r. v Plzni, úl. 26.
Honzák Josef, stud. VI. tř. g. ve Vys. Mýtě, úl. 25. až 35.
Horák Alois, stud. V. tř. r. v Uh. Brodě, úl. 26., 33., 37., 41.
Hrubý T., stud. VIII. tř. g. v Jindř. Hradci, úl. 27., 33., 36., 37., 38., 41., 42., 44., 45., 46., 48., 50.
Hujer Zdeněk, stud. VII. tř. g. na Smíchově, úl. 26., 27., 29., 38
Hulla Karel, stud. VIII. tř. g. v Olomouci, úl. 25. až 50.
Chadim Josef, stud. VIII. tř. g. v Třebíči, úl. 26. až 29., 33., 35., 38., 44., 46., 48.
Jakubský O., stud. VII. tř. g. v Třebíči, úl. 26. až 29., 32., 33., 35., 36., 38., 39., 41. až 46., 48., 50.
Janáček Jan, stud. VIII. tř. g. v Brně, úl. 25. až 48., 50.
Jechoutek F., stud. VII. tř. r. v Písku, úl. 25.
Jílek Frant., stud. V. tř. r. v Brně, úl. 26., 28., 37., 41., 42.
Kadeřábek František, stud. VII. tř. g. na Král. Vinohradech, úl. 26., 27., 29., 33., 35., 38., 46.
Kálal Josef, stud. VII. tř. r. v Písku, úl. 25. až 50.
Kalandra St., stud. VII. tř. g. v Jičíně, úl. 26., 28., 32., 38., 41., 42., 48.
Karpeles Karel, stud. VII. tř. g. v Příbrami, úl. 46.
Keclík Tomáš, stud. VII. tř. r. v Písku, úl. 25.
Klíma Rudolf, stud. VI. tř. r. v Písku, úl. 26. až 34., 36. až 39., 41. až 48., 50.
Konopásek Václav, stud. V. tř. r. v Rakovníku, úl. 26., 27., 29., 35., 37., 39.
Kopeček Ondřej, stud. VII. tř. r. v Hodoníně, úl. 2., 20., 24. až 30., 32. až 39., 41. až 46., 48., 50.
Korber Augustin, stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 26., 27., 28., 30., 35., 36., 37., 41., 42., 43., 46., 48., 50.

Kostelecký Josef, stud. V. tř. r. v Brně, úl. 26., 27., 28., 37., 41., 42.
Kouřil Eman., stud. V. tř. r. v Rakovníku, úl. 26., 27., 29., 37., 39., 45.
Koza Frant., stud. VII. tř. g. na Král. Vinohradech, úl. 26., 46., 48.
Kratochvíl Frant., stud. VIII. tř. g. v Třebíči, úl. 25. až 29., 33. až 50.
Kraus Jos., stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 26., 35.
Kubis Jan, stud. VIII. tř. g. v Olomouci, úl. 26.
Kučera Šebestian, stud. V. tř. r. v Uh. Brodě, úl. 26., 32., 37., 41., 48., 50.
Kulhánek Silvestr, stud. VIII. tř. g. v Brně, úl. 25. až 50.
Láska Arnošt, stud. V. tř. r. v Uh. Brodě, úl. 26.
Laštovka Zdeněk, stud. VII. tř. r. v Českých Budějovicích, úl. 26., 27., 29., 32. až 36., 38., 41., 42., 43., 46. až 50.
Lochmann Ant., stud. VIII. tř. g. v Ml. Boleslavi, úl. 25., 26., 27., 29., 31., 32., 34. až 48., 50.
Loskot Antonín, stud. V. tř. r. v Rakovníku, úl. 26., 37., 39., 42.
Macháč František, stud. VI. tř. r. v Lipníku, úl. 26., 29., 30., 33., 37., 38., 41., 42.
z Maillardů Mořic, stud. VI. tř. r. v Pardubicích, úl. 4., 26., 29., 36. až 39., 41., 42., 43., 45., 46.
Malý Jan, stud. VII. tř. g. ve Val. Meziříčí, úl. 26. až 29., 31. až 46., 48., 50.
Mates Karel, stud. V. tř. r. v Rakovníku, úl. 26., 29., 37., 39., 42., 45.
Mathesius Vilém, stud. VIII. tř. g. v Kolíně, úl. 26., 27., 33., 35., 38., 41.
Matoušek Maxmilian, stud. VIII. tř. g. v Brně, úl. 25. až 39., 41. až 48., 50.
Mazánek Josef, stud. VI. tř. r. v Pardubicích, úl. 36. až 39., 42., 46.
Mikyna Josef, stud. VII. tř. g. ve Dvoře Králové n. L., úl. 26. až 33., 35., 37. až 40., 42., 43., 46., 48., 50.
Mráz Josef, stud. VIII. tř. g. na Smíchově, úl. 25. až 50.
Navrátil Josef, stud. V. tř. r. v Uh. Brodě, úl. 26., 27., 29., 32., 33., 37., 38., 41.

Nekola Josef, stud. VI. tř. r. v Plzni, úl. 26., 38, 41.
Nigrin Otakar, stud. VI. tř. r. v Pardubicích, úl. 26. až 28., 36. až 39., 41., 42., 43., 45., 46.
Novák Jaroslav, stud. VII. tř. g. v Olomouci, úl. 26., 27., 29., 30., 31., 33., 36. až 39., 41. až 44., 46., 48., 50.
Obšil Jan, stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 26. až 29., 33., 36., 37., 38., 41., 42., 46., 48.
Ogoun Frant., bohoslovec v Olomouci, úl. 26. až 38., 41., 42., 43., 45. až 48., 50.
Pauzar Filip, stud. VIII. tř. g. v Třebíči, úl. 26. až 29., 33., 35. až 44., 46., 47., 48., 50.
Perutz Hugo, stud. VI. tř. r. v Rakovníku, úl. 26., 27., 29., 32., 35., 37., 38., 39., 41., 44., 45.
Petráň Karel, stud. VII. tř. r. v Hradci Králové, úl. 1., 3., 4., 8. až 12., 15., 21., 22., 24., 26., 27., 29., 32. až 35., 38., 41. až 44., 46., 48.
Petz Leopold, stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 26. až 29., 35., 36., 38., 46., 49.
Pleva Eduard, stud. VI. tř. r. v Kutné Hoře, úl. 2., 6., 13., 26. až 30., 33., 36. až 44., 46., 47.
Polák Vlad., stud. VII. tř. g. v Přerově, úl. 25. až 50.
Pospíšil Bohumil, stud. VII. tř. g. v Olomouci, úl. 26. až 29., 32., 33., 36., 37., 38., 43., 46.
Postupa K., posluchač vyšší lesnické školy v Písku, úl. 37., 38., 39.
Procházka Václav, stud. VI. tř. r. v Praze-I., úl. 26., 38., 41.
Racek Aurelius, stud. VI. tř. r. v Pardubicích, úl. 26., 29., 36., 37., 39., 41., 42., 44., 45., 46.
Růžek Ant., stud. VIII. tř. g. v Táboře, úl. 26. až 29., 32. až 44., 46., 48., 50.
Rybář Emil, stud. VIII. tř. g. v Opavě, úl. 26.
Rychlík Bedřich, stud. V. tř. r. v Uh. Brodě, úl. 26., 29., 37., 41.
Rychlík Karel, stud. V. tř. akad. g. v Praze, úl. 25. až 50.
Sedláček Frant., stud. VII. tř. g. v Hradci Králové, úl. 26. až 29., 32., 33., 35. až 38., 41. až 44., 46., 48.
Schoenbaum Emil, stud. VIII. tř. g. v Benešově, úl. 25. až 50.
Seifert Lad., stud. VII. tř. r. v Karlíně, úl. 25. až 50.

Skalecký Jan, stud. VII. tř. r. v Brně, úl. 25., 26., 27., 29., 32., 33., 38., 41., 43., 45., 46, 48.
Sládek Alois, stud. V. tř. r. v Uherském Brodě, úl. 26., 27., 31., 32., 33., 37., 38., 41.
Slovák Josef, stud. VII. tř. g. v Přerově, úl. 26. až 29., 33., 35., 36., 38., 48.
Soldát Jan, stud. V. tř. r. v Písku, úl. 26., 28., 35., 37., 38., 39., 41., 43., 48.
Sukdol Václav, stud. VIII. tř. g. v Českých Budějovicích, úl. 7., 25. až 50.
Surka Leopold, stud. VI. tř. g. v Brně, úl. 26., 27., 28., 30., 41., 42., 43.
Svěda Otakar, stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 26., 37., 38.
Sýkora Jan, stud. VII. tř. r. v Písku, úl. 25.
Šebela Mikuláš, stud. VI. tř. g. v Brně, úl. 26., 27., 41.
Šilhán Ludvík, stud. VI. tř. g. v Třebíči, úl. 26. až 29., 31., 33., 36., 38., 41., 42., 43., 46.
Šír Jiří, stud. VII. tř. r. v Novém Městě na Moravě, úl. 25. až 50.
Šňupárek Richard, stud. VIII. tř. g. v Brně, úl. 26. až 29., 32. až 38., 41., 43., 46.
Špíšek J., stud. V. tř. r. v Uh. Brodě, úl. 26., 28., 37., 38., 41., 42.
Šrámek Leopold, stud. VII. tř. g. v Olomouci, úl. 26. až 50.
Táborský Frant., stud. VIII. tř. g. ve Val. Meziříčí, úl. 26. až 29., 33., 34., 35.
Tereba Viktor, stud. VII. tř. g. ve Val. Meziříčí, úl. 25. až 50.
Trčka Otakar, stud. VII. tř. g. v Třebíči, úl. 26. až 29., 31., 33., 35., 36., 38., 42., 43., 45., 48.
Uchytil Alois, stud. VII. tř. g. v Jindřich. Hradci, úl. 26.
Valach Frant., stud. VIII. tř. g. v Kroměříži, úl. 25. až 50.
Veselý Frant., stud. VII. tř. g. v Olomouci, úl. 26. až 30., 33., 35., 37., 38., 41., 42., 45., 46., 48.
Vilíta Jan, stud. VI. tř. r. v Písku, úl. 26. až 29., 31., 32., 33., 36. až 39., 42., 43., 46.
Vodička Karel, stud. VIII. tř. g. v Jindř. Hradci, úl. 25. až 30., 32., 33., 34., 36. až 39., 41. až 44., 46., 47., 48., 50.
Vondráček Frant., stud. VI. tř. r. v Jičíně, úl. 26. až 29., 36., 38., 41. až 46.

Votrubová Žofie, stud. VIII. tř. střední školy dívčí v Praze, úl. 26.

Vrbický Hynek, stud. VI. tř. r. v Hradci Králové, úl. 26., 27., 29., 33., 38., 41., 42., 43, 46.

Wald Jindřich, stud. VI. tř. r. v Praze-I., úl. 26., 27., 38., 41., 43.

Weissenstein Rudolf, stud. VI. tř. r. v Hradci Králové, úl. 26., 27., 29., 33., 35., 36., 38., 41., 46., 48.

Zadražil Ant., stud. VI. tř. r. v Kutné Hoře, úl. 26. až 29., 33., 36., 37., 38., 46.

Zahradníček Josef, stud. VIII. tř. g. v Třebíči, úl. 22., 25. až 39., 41. až 50.

Závada Bohuslav, stud. VI. tř. r. v Lipníku, úl. 25. až 50.

Zavadil Stan., stud. VI. tř. r. v Lipníku, úl. 26. až 29., 32., 37., 38., 41., 42., 43., 46., 47.

Nepodepsaný, dle pošt. razítka z Plzně, úl. 26. až 29.

Ceny udělené za řešení úloh.

Redakce těchto listů uznala, aby za řešení úloh obsažených v tomto ročníku Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky (1901) ceny vypsané výborem Jednoty českých mathematiků obdrželi tito řešitelé:

I. Ceny první.

1. *Hanus Josef,* stud. VIII. tř. g. v Litomyšli.
2. *Hulla Karel*, stud. VIII. tř. g. v Olomouci.
3. *Kálal Josef*, stud. VII. tř. r. v Písku.
4. *Polák Vladimír*, stud. VII. tř. g. v Přerově.
5. *Rychlík Karel*, stud. V. tř. akad. g. v Praze.
6. *Schoenbaum Emil*, stud. VIII. tř. g. v Benešově.
7. *Seifert Ladislav,* stud. VII. tř. r. v Karlíně.
8. *Šír Jiří*, stud. VII. tř. r. v Novém Městě na Moravě.
9. *Tereba Viktor*, stud. VII. tř. g. ve Val. Meziříčí.
10. *Valach František,* stud. VIII. tř. g. v Kroměříži.

II. Ceny druhé.

1. *Brzobohatý Břetislav,* stud. VI. tř. r. v Lipníku
2. *Čupr Karel*, stud. V. tř. g. ve Vys. Mýtě.
3. *Drastich František*, stud. VIII. tř. g. v Opavě.
4. *Grössl Václav,* stud. VI. tř. r. na Král. Vinohradech.
5. *Janáček Jan,* stud. VIII. tř. g. v Brně.
6. *Kulhánek Silvestr*, stud. VIII. tř. g. v Brně.
7. *Mráz Josef,* stud. VIII. tř. g. na Smíchově.
8. *Sukdol Václav*, stud. VIII. tř. g. v Č. Budějovicích.
9. *Zahradníček Josef*, stud. VIII. tř. g. v Třebíči.
10. *Závada Bohuslav,* stud. VI. tř. r. v Lipníku.

III. Ceny třetí.

1. *Barvík Jindřich,* stud. VIII. tř. g. v Opavě.
2. *Dědouch Ludvík,* stud. VIII. tř. g. v Pelhřimově.
3. *Dusl Karel*, stud. VI. tř. r. v Rakovníku.
4. *Dvořák František,* stud. VIII. tř. g. v Brně.
5. *Fiala Josef*, stud. VII. tř. r. v Písku.
6. *Habrich Alois*, stud. VI. tř. r. v Prostějově.
7. *Hanosek Bohumír*, stud. VII. tř. g. v Brně.
8. *Honzák Josef*, stud. VI. tř. g. ve Vys. Mýtě.
9. *Klíma Rudolf*, stud. VI. tř. r. v Písku.
10. *Kopeček Ondřej,* stud. VII. tř. r. v Hodoníně.
11. *Kratochvíl František,* stud. VIII. tř. g. v Třebíči.
12. *Laštovka Zdeněk,* stud. VII. tř. r. v Č. Budějovicích.
13. *Lochmann Antonín*, stud. VIII. tř. g. v Mladé Boleslavi.
14. *Malý Jan*, stud. VII. tř. g. ve Val. Meziříčí.
15. *Matoušek Maxmilian,* stud. VIII. tř. g. v Brně.
16. *Mikyna Josef*, stud. VII. tř. g. ve Dvoře Králové n. L.
17. *Ogoun František,* bohoslovec v Olomouci.
18. *Pleva Eduard*, stud. VI. tř. r. v Kutné Hoře.
19. *Šrámek Leopold*, stud. VII. tř. g. v Olomouci.
20. *Vodička Karel*, stud. VIII. tř. g. v Jindř. Hradci.