Arnošt Dittrich

Nová cesta k transformaci Lorentzově

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 59 (1930), No. 1, 45--54

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108988

Nová cesta k transformaci Lorentzově.

Dr. *Arnošt Dittrich.*

Pohybuje-li se tuhé těleso a vůči druhému b, lze v pohybu viděti relaci R ve smyslu Russellově a psáti v symbolech jeho kalkulu relačního aRb. Relace R jest kommutativní: platí současně i bRa. Často je i transitivní: $R*R = R$. Není-li, nastane klid: $R*R = -R$; neboť klid jest negací pohybu.

Odůvodnění těchto myšlének vyložil jsem v článku: Objasnění základů relativistiky pomocí Russellova kalkulu relačního.[1]) Tam jsem ke konci ukázal, jak symbolika Russellova stává se nepříjemnou, pokusíme-li se o rozšíření, jež by mohlo vésti k fysikálním výsledkům. Stane se nepraktickou. Příliš se vzdaluje od obvyklé matematiky. — Sčítání polokonvergentní řady také se nesmí přeštvat a velké muže nesmíme znáti příliš podrobně.

Nedošli jsme touto cestou dál, než k přezkoumání a osvětlení Newtonových názorů o absolutním prostoru. Je právě pohyb pojmem příliš chudobným, aby se z něho něco vážnějšího dalo vyvoditi.

Vmysleme se podrobněji do děje. Že tuhé těleso a pohybuje se vůči tuhému tělesu b rovnoměrně — přímočarně, značí se aRb. Ale pohyblivé a jest s pozadím b stejněprávné. Lze tedy i a pokládati za pozadí, b za pohyblivé. Nastavme si obě tělesa po způsobu Einsteinově[2]) až do nekonečna. Pohyb se stane pak pronikáním dvou neviditelných tuhých do nekonečna se rozprostírajících těles. Je rovnoměrně přímočarý. Jedno i druhé jest pozadím vůči němuž konáme svá pozorování. Jaká? S jakými pomůckami? Nastavení těles provozuje se podle Einsteina, přikládáním, třeba jen myšlených tuhých těles. Musíme tedy disponovati tuhými tělesy. Tím dána možnost geometrických měření. Lze určovati místo bodu v prostoru. To však ještě nestačí. Potřebujeme časoměr k zjištění rovnoměrnosti pohybu. Rovnoměrné plynutí času definováno však

[1]) Viz podrobné vysvětlení symboliky v „Objasnění základů užší relativistiky pomocí Russellova kalkulu relačního. Tohoto čp. č. 1.

[2]) Čtyři přednášky o teorii relativnosti na universitě princetonské 1921.

postupem světla podle tuhého měřítka. Potřebujeme tedy i světlo, čím získáváme možnost přenosu času do dálky.

Žádáme tedy tuhá tělesa a světlo. Prvá k určení místa, obojí k určení času.

Kommutativnost obou pozadí a, b značí v podstatě jejich rovnocennost, když na ně vztahujeme své experimenty se světlem a tuhými tělesy.[3]) Označme obecný bod, jenž v čas t zaujímá polohu x, y, z v Descartesově kříži, jenž tuho spojen s tělesem a literou a. Souřadnice téže prostoročasové události vůči kříži tuho spojenému s tělesem b nazveme x', y', z', t' a označíme literou b. Pak okolnost, že je to týž svět, jenž zachycujeme v prvé i druhé soustavě, způsobuje, že existuje transformace, jíž z čtveřiny $a(x, y, z, t)$ lze vypočítati čtveřinu $b\,(x', y', z', t')$.

Označme transformaci tu písmenou T. Pak lze místo aRb psáti symbolicky

$$b = aT.$$

Teorie transformační má totiž vlastní symboliku praktickou k vyjádření svých zvláštností. Relace $b = aT$ neznamená nic víc, než, že existují 4 rovnice vyjadřující x, y, z, t pomocí x, y, z, t. Do rovnic těch vchází rychlost v, jíž se těleso a pohybuje vůči tělesu b vektorovými složkami l, m, n. Vektor v učiníme proto indexem u symbolu transformace T_v. Relace $b = aT_v$ znamená pak, že prostor tuho spojený s tělesem a pohybuje se rychlostí v, jenž má v druhém kříži složky l, m, n. Symbolické vyjádření to jest jakousi zkratkou za čtyři rovnice:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x'\,(x, y, z, t; l, m, n)\\ y' &= y'\,(x, y, z, t; l, m, n)\\ z' &= z'\,(x, y, z, t; l, m, n)\\ t' &= t'\,(x, y, z, t; l, m, n)\end{aligned}\right\} b = aT_v$$

Pro kommutativnost pohybu existuje obdobná serie rovnic, jež vyjadřuje složky vektoru a složkami vektoru b. Zní

$$\left.\begin{aligned} x &= x\,(x', y', z', t'; l, m, n)\\ y &= y\,(x', y', z', t'; l, m, n)\\ z &= z\,(x', y', z', t'; l, m, n)\\ t &= t\,(x', y', z', t'; l, m, n)\end{aligned}\right\} a = bT_{-v}.$$

Rovnice ty lze obdržeti řešením relací $b = aT_v$ podle složek vektoru a. Je vždy možno pro rovnoprávnost soustavy a se soustavou b. Inversní transformaci k T_v označili jsme symbolem T_{-v}. Pohybuje-li se těleso a vůči b rychlostí v, pohybuje se b vůči a rychlostí $-v$.

Řešení rovnic lze nahraditi pouhou substitucí. Určíme si složky vektoru $-v$ v a— kříži. Ty pak místo l, m, n dosadíme do serie $b = aT_v$. Zároveň zaměníme důsledně písmeny čarkované

[3]) Na př.: Samo sobě přenechané těleso je v klidu vůči a; proto se pohybuje samo sobě přenechané těleso rovnou přímkou vůči b.

a nečárkované. Nejjednodušeji dopadne toto řešení substitucí, volíme-li stejnoznačné osy homoparallelně. Pak zní hledané složky vektoru $-v$ prostě $-l, -m, -n$. Třeba pak k získání inversní transformace T_{-v} jen vyměniti čárkované a nečárkované souznačné písmeny a dosaditi za l, m, n jejich záporné hodnoty.

Podrobme prvek a tranformaci T_v, čím přejde v prvek b. Ten podrobíme transformaci T_{-v}, čím přejde v c. Jaký vztah bude pak mezi prvky a a c? — Protože transformace T_{-v} jest inversní k T_v, souvisí souřadnice vektoru c (x'', y'', z'', t'') se souřadnicemi vektoru a (x, y, z, t) transformací identickou:

$$x'' = x \quad y'' = y \quad z'' = z \quad t'' = t \quad c = aT^0.$$

Mezi transformacemi T_v jest jedna významenaná, totiž klid. Pro ten jest rychlost $v = 0$. Ale transformace T_0 nebude obecně transformací identickou. Umluvili jsme, že osy stejnojmenné mají býti trvale homoparallelní. Tím není řečeno, že klid se vyjádří transformací identickou. Vyjádřil by se obecně jako posuv souřadnic. Chceme-li dosáhnouti, aby $T_0 = T^0$, musíme volbu souřadnic a čítání času dále omeziti. Žádejme, aby pro $t = 0$ bylo i $t' = 0$ v počátku. V okamžiku tom nechť počátky a tedy oba kříže vůbec se kryjí. Pak bude transformace T_v obsahovati nejen inversní, pro rychlost $-v$, ale též identickou pro $v = 0$.

Všimněme si nyní transience pohybu. Když loď se pohybuje proti břehu, plavec vůči lodi, pohybuje se i plavec vůči břehu. V symbolech: platí-li současně

$$c = bT_v, \quad b = aT_u,$$

jest

$$c = aT_w,$$

kde rychlost w závisí pouze na volbě vektorů u a v. Tím jest řečeno,

že

$$T_uT_v = T_w,$$

že rovnice transformace T_v určují gruppu transformací, v níž sled dvou transformací lze nahraditi jedinou také do gruppy náležející. Gruppa obsahuje ke každé transformaci inversní a také identickou, jež přísluší vektoru $v = 0$.

Je gruppa ta spojitá? — Zajisté. Infinitesimální hodnotě vektoru v musí příslušeti transformace infinitesimálně blízká identické. Kdyby tato věta neplatila, nebyla by klasická mechanika vůbec vznikla. V Galilei-Newtonově transformaci klasické mechaniky můžeme viděti přiblížení k hledáné infinitesimální transformaci, jež existenci její zaručuje.

Mluvili jsme o infinitesimální hodnotě rychlosti v. V praxi půjde o hodnoty velmi malé. Vůči čemu? — Ujasněme si proč čas přenášíme do dálky právě světlem. Protože je to nejrychlejší signál, jímž vládneme. Kdybychom věděli o rychlejším, vzali bychom ten. Tím automaticky rychlost světla dostává vyznamenanou hodnotu. Malou bude pak ta rychlost, jež je malá proti rychlosti světla.

Na takové pohyby vztahuje se klasická mechanika. Tato pokládá za T_v transformaci Galilei-Newtonovu. Napišme ji pro případ, že v čas $t = 0$ oba kříže se kryjí, když a — kříž pohybuje se — bez rotace — směrem rostoucího x rychlostí v. Pak je

$$\begin{aligned} x' &= x + vt \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= t \end{aligned} \tag{1}$$

Hodnotě $v = 0$ náleží transformace identická. Nechme v narůsti od nuly do hodnoty Δv. Změna souřadnic Δ, jež tím nastane, bude

$$\Delta x = t\Delta v \quad \Delta y = 0 \quad \Delta z = 0 \quad \Delta t = 0,$$

což lze přepsati na tvar

$$\frac{\Delta x}{t} = \frac{\Delta y}{0} = \frac{\Delta z}{0} = \frac{\Delta t}{0} = \Delta v.$$

Necháme-li Δv konvergovati k nule, konvergují i ostatní Δ k nule. Smíme tedy psáti

$$\frac{dx}{t} = \frac{dy}{0} = \frac{dz}{0} = \frac{dt}{0} = dv \tag{2}$$

což jest infinitesimální transformace gruppu Galilei-Newtonovu vytvořující.

Tato může však býti jen přiblížením k infinitesimální transformaci gruppy T_v, kterou hledáme. Z rovnic (2) lze dostati rovnice (1), integrujeme-li relace

$$\frac{dx}{t} = \frac{dy}{0} = \frac{dz}{0} = \frac{dt}{0} = dv$$

za podmínky: pro $v = 0$ je

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t.$$

Ale rovnice (1), jež touto integrací obdržíme nemohou býti transformací T_v. Když totiž po transformaci T_u skutečně provedeme transformaci T_v obdržíme sice transformaci, kterou lze označiti T_w, kde

$$u + v = w.$$

Tím se však dostaneme do konfliktu s ideou, že rychlost světla jest nepřekročitelnou hranicí pro skutečné pohyby. Když se totiž pohybuje $n + 1$ křížů, jeden proti druhému rychlostí v, směrem rostoucího x, pohybuje se první proti poslednímu rychlostí nv. Tato hodnota může při konečném n i v překročiti rychlost světla c. Je to ovšem axiom Archimedův použit na rychlosti jako veličině.[4])

[4]) Tím směrem nese se argumentace Poincaré-ova v jeho berlínské přednášce. Uveřejněna v „Himmel und Erde“, XXIII. Viz separát „Die neue Mechanik“, 14, 1911.

Protože transformace T_v tvoří gruppu, lze souditi: Když vektor u i v padne od osy x, nemůže se ani vektor w od ní odchýliti. Odchylka na pravo byla by stejněprávná jako na levo. V rovnicích transformace T_v zůstane tedy jediný parametr $l = v$, $n = o$, $n = o$, když osy x položíme do směru rychlosti.

V tomto zvláštním případě jest podle Sophus Lie-ovy teorie jednočlenných grupp infinitesimální transformace gruppu vytvořující

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta} = \frac{dz}{\zeta} = \frac{dt}{\tau} = d\varphi,$$

kde φ jest jen funkcí v. Funkce ξ, η, ζ, τ závisí každá obecně na všech proměnných x, y, z, t, nezávisí však na v.

Z infinitesimální transformace plyne za dříve uvedených podmínek T_v ve formě:

$$\begin{aligned} U\,(x', y', z', t') &= U\,(x, y, z, t) \\ V\,(x', y', z', t') &= V\,(x, y, z, t) \\ W\,(x', y', z', t') &= W\,(x, y, z, t) \\ \Omega\,(x', y', z', t') &= \Omega\,(x, y, z, t) + \varphi(v), \end{aligned}$$

kde čtyři funkce U, V, W, Ω jsou na sobě nezávislé. Pro $\varphi = 0$, dávají transformaci identickou, pro $-\varphi$ inversní k φ. Je tedy φ lichou funkcí složky v. Provedeme-li po transformaci u transformaci v, lze sled jich nahraditi jedinou transformací w, kde

$$\varphi(w) = \varphi(u) + \varphi(v).$$

Existují tedy tři invarianty U, V, W, jichž numerická hodnota se při transformaci nemění. Nalezneme je oklikou; dejme tomu, že víme o invariantní rovnici

$$F\,(x, y, z, t) = 0,$$

jež transformací T_v se reprodukuje jako

$$F\,(x', y', z', t') = 0.$$

Pak lze funkci F čtyř proměnných x, y, z, t vyjádřiti třemi invarianty U, V, W.

Protože funkce U, V, W, Ω jsou na sobě nezávislé, lze jich použíti místo proměnných x, y, z, t. Tím promění se invariantní rovnice v jinou

$$G\,(U, V, W, \Omega) = 0. \tag{3}$$

Dejme tomu, že skutečně obsahuje Ω. Pak lze z (3) veličinu Ω vypočítati a rovnice zní

$$\Omega = g\,(U, V, W). \tag{4}$$

Transformace T v nových proměnných stane se translací

$$U' = U \qquad V' = V \qquad W' = W \qquad \Omega' = \Omega + \varphi.$$

Podrobíme ji poslední rovnici, dostaneme

$$\Omega' - \varphi = g\,(U', V', W'). \tag{5}$$

Má-li rovnice (3) translaci snésti, musí z (4) a (5) plynouti, že

$$\Omega' = g\,(U', V', W').$$

Rovnice ta jest prosta φ. Ale z (5) nelze eliminovati φ pomocí (4), protože tam φ vůbec není. Premisa padá. Ω v relaci (4) vůbec není. Zavedením nových proměnných dostaneme relaci

$$G\,(U, V, W) = 0 \tag{6}$$

prostou Ω. A ta je invariantní ježto funkce

$$G\,(U', V', W') = G\,(U, V, W)$$

se translaci reprodukuje. Nyní skutečně platí

$$G\,(U', V', W') = 0$$

následkem (6). — Každá invariantní rovnice vede k objevu invariantní funkce.

Takovou invariantní rovnici můžeme objeviti následující cestou: mysleme si, že v počátku a— kříže sedí bodovitý kladný náboj, v počátku b— kříže záporný. V okamžiku, kdy oba počátky se setkají nastane výboj. Jiskra emituje kulovou vlnu světelnou. Ta náleží, jak ze vzniku patrno, tak prvému, jak druhému kříži. Platí proto současně:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 = 0 \quad x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0.$$

Z úvahy horní plyne pak, že k této invariantní rovnici náleží též invariantní funkce

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2,$$

jíž lze vyjádřiti veličinami U, V, W.

Jsou ještě dvě další takové funkce. Děj pohybový má osu souměrnosti ve vektoru rychlostním. Proto jsme učinili tuto osu x pro oba kříže. Proložme jí libovolnou pevnou rovinou. Pak bod, jenž pro a-kříž v ní ležel, leží v ní také pro b-kříž. Neboť vychýlení nad rovinu bylo by stejněprávné s uchýlením pod rovinu. Takovou rovinou je na př. rovina xz, kryjící se podle naší úmluvy trvale s rovinou xz'. Body v ní charakterisuje rovnice $y = 0$. Podle úvahy horní přísluší ji též $y' = 0$. Je tedy y invariantem, závisí jen na U, V, W. — Protože rovina $z = 0$ je stejněprávnou s rovinou $y = 0$, závisí i z pouze na U, V, W.

Nalezli jsme tedy tři funkce

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2, \quad y, \quad z,$$

závislé pouze na U, V, W. Jsou na sobě nezávislé. Žádná se nedá vyjádřiti jedinou či oběma ostatníma.

Funkce U, V, W jsou však definovány toliko jako tři na sobě nezávislá řešení rovnice

$$\xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta \frac{\partial f}{\partial z} + \tau \frac{\partial f}{\partial t} = 0, \qquad (7)$$

jejímiž součinitely jsou funkce ξ, η, ζ, τ známe z infinitesimální transformace. Proto smíme místo U, V, W použíti přímo tři na sobě nezávislé funkce, jež jsme nalezli. Lze tedy pro T_v navrhnouti

$$\begin{aligned} x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 &= x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2, \\ y' &= y \\ z' &= z \\ \Omega(x', y', z', t') &= \Omega(x, y, z, t) + \varphi(v). \end{aligned}$$

Zbývá stanoviti ještě funkce Ω a φ. Volme cestu přes infinitesimální transformaci. Zůstaneme tím v těsném sousedství klasické mechaniky.

Naše invarianty vyhovují rovnici (7). Nahraďme je před dosazením rovnocennou kombinací, jež je zjednoduší na

$$x^2 - c^2t^2, \quad y, \quad z.$$

Dosadíme je postupně do relace (7) a dostaneme tři podmínky pro funkce ξ, η, ζ, τ, jež určují infinitesimální transformaci. Tyto podmínky zní:

$$\begin{aligned} \xi x \quad - c^2\tau t &= 0 \\ \eta \quad &= 0 \\ \zeta \quad &= 0, \end{aligned}$$

z čeho plyne

$$\frac{\xi}{t} = \frac{\eta}{0} = \frac{\zeta}{0} = \frac{c^2\tau}{x} = \psi(x, y, z, t).$$

Tím určeny tyto funkce až na činitele ψ, tak, že

$$\xi = t \,.\, \psi, \quad \eta = 0, \quad \zeta = 0, \quad \tau = \frac{x}{c^2}\psi.$$

Funkce ψ nesmí záviseti na rychlosti. To plyne z charakteru infinitesimální transformace. Proto ji můžeme určiti na základě zkušeností s rychlostmi velmi malými, na něž stačí klasická mechanika. Stačí tedy přibližnou infinitesimální transformaci klasické mechaniky, jež klade

$$\xi = t, \quad \eta = 0, \quad \zeta = 0, \quad \tau = 0$$

porovnati s horní, abychom poznali na prvých členech, že $\psi = 1$. Pak se shodne i druhý a třetí člen. Ve čtvrtém jest neshoda. Neboť klasická mechanika vede si jako by $c = \infty$.

Když máme infinitesimální transformaci, lze integrací získati konečnou. Třeba integrovati relace

$$\frac{dx'}{t'} = \frac{dy'}{0} = \frac{dz'}{0} = \frac{dt'}{\frac{x'}{c^2}} = d\varphi$$

za podmínky: pro $\varphi = 0$, jest

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t.$$

Známými integrály jsou invarianty

$$x^2 - c^2t^2, \quad y, \quad z.$$

Další dostaneme z relace

$$\frac{dx'}{t'} = d\varphi$$

pomocí

$$x'^2 - c^2t'^2 = \alpha^2,$$

když eliminujeme t. Pak jest

$$\frac{c\,dx'}{\sqrt{x'^2 - \alpha^2}} = d\varphi$$

$$cl\,(x' + \sqrt{x'^2 - \alpha^2}) = \text{const} + \varphi$$

$$cl\,(x' + ct') = cl\,(x + ct) + \varphi$$

Nyní jest transformace T_v nalezena až na funkci $\varphi(v.)$ Zní

$$\left.\begin{aligned} x'^2 - c^2t'^2 &= x^2 - c^2t^2 \\ y' &= y \\ z' &= z \\ cl\,(x' + ct') &= cl\,(x + ct) + \varphi. \end{aligned}\right\} \quad T_v$$

Poslední rovnici lze přepsati na

$$\frac{x' + ct'}{x + ct} = e^{\frac{\varphi}{c}} = k(v)$$

z čeho

$$x' + ct' = k\,(x + ct). \tag{8}$$

Relace ta praví, že světlo pohybující se podle směru ubývajícího x pro jednoho pozorovatele rychlostí c, pohybuje se tak i pro druhého. Dělíme-li první relací T_v rovnici (8), objevíme

$$x' - ct' = \frac{1}{k}\,(x - ct) \tag{9}$$

Platí tedy totéž i směrem rostoucího x.

Zbývá ještě určiti funkci $k(v)$. Určíme ji z myšlénky: počátek $x = 0$ pohybuje se v druhém kříži rychlostí v, tak, že $x' = vt'$. Pak je

$$(v + c)\,t' = c\,k\,t$$

$$(v - c)\, t' = -\frac{ct}{k}$$

z čeho divisí

$$\frac{v + c}{v - c} = -k^2. \tag{10}$$

Rovnice 8, 9, 10 představují Lorentzovu transformaci. Řešme 8 a 9 podle x a t tak, že

$$2\,x' = \left(k + \frac{1}{k}\right) x + \left(k - \frac{1}{k}\right) ct$$

$$2\,ct' = \left(k - \frac{1}{k}\right) x + \left(k + \frac{1}{k}\right) ct.$$

Upravíme na

$$2kx' = (k^2 + 1)\, x + (k^2 - 1)\, ct,$$
$$2kct' = (k^2 - 1)\, x + (k^2 + 1)\, ct.$$

Použijeme, že

$$\frac{2k}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{k^2 + 1}{1} = \frac{k^2 - 1}{\frac{v}{c}}.$$

Dostaneme Lorentzovu transformaci:

$$x' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = x + vt$$

$$t' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{xv}{c^2} + t.$$

Všimněme si, že jsme k ní dospěli, aniž bychom slova řekli o kontrakcích měřítek, či rozvázání současnosti, vůbec o oněch myšlenkách, jež tak pobouřily. Není toho třeba.[5])

*

Un chemin nouveau conduisant à la transformation de Lorentz.

(Extrait de l'article précédent.)

Ce traité-là est la suite de l'essai ,,Explication des éléments de la relativité proprement dite à l'aide du calcul de relations de Russell". Les principales propriétés du mouvement, comme la commutativité et la transitivité, sont exprimées en symboles de la théorie des transformations.

Ces propriétés se transforment ensuite en des idées mathématiques que Sophus Lie a introduites. En adoptant l'idée que le

[5]) Srovnej Einsteinovo odvození v ,,Uiber die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie". Vyd. 3. 78. 1918.

mouvement est une action symétrique autour de sa direction et que la lumière est un facteur qui définit le temps et le transfère, on arrive par la spécialisation des formules de Lie à la transformation de Lorentz.

Il n'est pas nécessaire de dire un mot sur les contractions des mesures ou sur la dissolution de la simultanéité. On n'en a pas besoin pour la déduction de la transformation de Lorentz, si l'on procède par la méthode ci-expliquée.