Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

August Seydler

Poznámka o řadě, stanovící čísla Hamiltonova

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 20 (1891), No. 1, 18--23

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108986

Průmětem isofóty jest tedy křivka osmého stupně, pravoúhelně souměrná k ose S_1. Skládá se ze šesti lístků, z nichž dva souměrné ku S_1 mohou býti pomyslné. Průmět isofóty $+6$, -6 v obr. 5. má na př. 6 lístků realných.

Roviny $\parallel$ (XY), položené vrcholy konoidu r, s, dotýkají se plochy podél přímek R, S, a mají intensitu (dle stupnice desítidílné) 4·2. Přísluší tedy konoidu ve všech bodech obou torsalních přímek stálá intensita 4·2.

Každá rovina obsahující bod kuspidalní dotýká se v něm konoidu. Torsalní přímkou $R \perp \Sigma$ lze položiti roviny všech možných intensit; hornímu vrcholu konoidu r přináležejí tedy veškeré intensity stupnice. Isofóty buď jím procházejí, nebo mají v něm bod isolovaný (isofóta $+1$). Torsalní však přímka S, jejíž $S_1 \equiv \Sigma_1$, jest osou svazku rovinového, jehož nejsvětlejší rovina jest $\parallel$ (XY) s intensitou 4·2. V dolním vrcholu s příslušejí tedy konoidu veškeré intensity v mezích 4·2 až 10.

Kromě vrcholu horního r *není* na konoidu bodu *normalně* osvětleného. Neboť rovina intensity normalné (0) jest $\perp \Sigma$, stopa její na rovině (XY) tedy $\perp \Sigma_1$, a přímka konoidu, která v rovině řečené jest obsažena, také $\perp \Sigma_1$; ale takový průmět má jen torsální přímka horní R, a ta má ve všech svých bodech (mimo vrchol r) stálou intensitu 4·2.

Vlastní vržený stín na konoidu jest omezen křivkou L, vrženým stínem křivky K čili ± 10.

Poznámka o řadě, stanovící čísla Hamiltonova.

Napsal

dr. Aug. Seydler.

Budiž dána řada:

$$A \equiv (1-t)^{e_0} + t\,(1-t)^{e_1} + t^2\,(1-t)^{e_2} + \ldots$$

v níž jsou mocnitele $e_0, e_1, e_2, \ldots$ kladná celá čísla.

Rozviňme dle nich, čímž obdržíme identický, jen tvarem rozdílný výraz:

$$\begin{aligned} A' \equiv\ & 1 - e_0 t + (e_0)_2 t^2 \mp \ldots + (-1)^{e_0} t^{e_0} \\ & + t - e_1 t^2 + (e_1)_2 t^3 \mp \ldots + (-1)^{e_1} t^{e_1+1} + \ldots . \end{aligned}$$

Členy této řady uspořádejme dle stoupajících mocností veličiny t, čímž obdržíme *novou* řadu

$$A'' \equiv 1 + E_0 t + E_1 t^2 + E_2 t^3 + \ldots,$$

v níž jest:

$$(1) \quad E_n = 1 - e_n + (e_{n-1})_2 - (e_{n-2})_3 \pm \ldots + (-1)^{n+1} (e_0)_{n+1}$$

pro $\qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots.$

Každé soustavě hodnot E přísluší soustava hodnot e, rovnicemi (1) jednoznačně určena. Můžeme mezi jiným klásti na př.

$$E_0 = -2, \; E_1 = E_2 = E_3 = \ldots = 0,$$

v kterémž případě bude:

$$e_0 = 3, e_1 = 4, e_2 = 6, e_3 = 12, e_4 = 48, e_5 = 924, e_6 = 409620, \ldots$$

a všeobecně, pro $n > 0$:

$$(2) \quad 0 = 1 - e_n + (e_{n-1})_2 - (e_{n-2})_3 \pm \ldots + (-1)^{n+1} (e_0)_{n+1}$$

jakožto rovnice, určující e_n pomocí hodnot $e_{n-1}, e_{n-2}, \ldots, e_0$.

Řady A, A′ a A″ obdrží tu tvar:

$$A = A' \equiv (1-t)^3 + t(1-t)^4 + t^2(1-t)^6 + t^3(1-t)^{12} + \ldots,$$
$$A'' \equiv 1 - 2t.$$

S těmito dvěma výrazy, v nichž exponenty e_n, rovnicemi (2) numericky určené, jsou o 1 zvětšená čísla Hamiltonova, chceme se blíže zanášeti; řadu A budeme ovšem raději psáti ve všeobecném tvaru prvním, t. j. s ponecháním exponentů e_n místo příslušných numerických hodnot.

Jest patrné, že oba výrazy, A′ a A″ nejsou identické; pro $\frac{1}{2} < t < 1$ na př. jest A′ veličina kladná, A″ veličina záporná; dále jest výraz A″ pro každou konečnou hodnotu t konečný, řada A′ neb A musí teprv co do své konvergence neb divergence vyšetřena býti, a jest vskutku, jak seznáme, jen pro

$$0 \gtreqless t < 2$$

konvergentní.

Tato různosť výrazů A′ a A″ nás nepřekvapuje. Známý theorem praví nám, že jest součet řady byť i o sobě konvergentní, obsahuje-li nekonečné množství kladných i záporných členů, jen tenkráte na uspořádání členů těch nezávislý, je-li řada ta *absolutně* konvergentní, t. j. podrží-li vlastnost konvergence i tehdy, když zaměníme každý člen absolutní jeho hodnotou.*)

Není-li tedy pro jisté hodnoty veličiny t hodnota řady A′ neb A identická s hodnotou výrazu A″, nebudeme v tom spatřovati jako na př. referent v Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Math., sv. XIX. str. 80 žádné *paradoxon*, nýbrž jednoduše *důkaz*, že uvedené podmínce absolutní konvergence není právě v případech těch vyhověno.

Leč zde nejde o tuto jednoduchou poznámku, která se každému, kdo zná elementy theorie řad, vnucuje sama sebou; zajímavější jest tu faktum, jež ovšem na základě rychlého vzrůstání hodnot e_n z předu tušíme, že zmíněné právě podmínce pro žádnou hodnotu veličiny t, vyjma $t=0$, není vyhověno, že tedy nemáme *právo* výrazy A a A″ pokládati za *identické*, ač mohou nabýti pro jisté hodnoty veličiny t, totiž pro kořeny rovnice

$$\mathrm{A} - \mathrm{A}'' = 0$$

stejných hodnot.

Řada

$$\begin{aligned} \mathrm{A}'_1 \equiv 1 &+ e_0 t + (e_0)_2 t^2 + \ldots + t^{e_0} \\ &+ t + e_1 t^2 + (e_1)_2 t^3 + \ldots + t^{e_1} + \ldots \end{aligned}$$

kterou z řady A′ nahražením všech členů jejich absolutnými hodnotami obdržíme, a které můžeme dáti tvar

$$\mathrm{A}_1 \equiv (1+t)^{e_0} + t\,(1+t)^{e_1} + t^2\,(1+t)^{e_2} + \ldots$$

jest totiž pro každou sebe menší hodnotu t divergentní, k čemuž dle známého kriteria divergence stačí, aby platil, počínajíc jistým číslem n, pro toto a pro všechna následující čísla vztah:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = t\,(1+t)^{e_n - e_{n-1}} > 1.$$

Lze však dokázati, že roste rozdíl $e_n - e_{n-1}$ s rostoucím n

---

*) V. na př. *J. Tannery:* Introduction à la théorie des fonctions d'une variable p. 52.

do nekonečna, čímž uvedený vztah pro každé, sebe menší číslo jest dokázán.

Budiž pro

$$n = 4, 5, 6, \ldots, m$$

vyhověno následujícím nerovnicím

$$
(3) \quad
\begin{aligned}
&e_n > 3e_{n-1} - 5, \\
&e_n > e_{n-1}, \\
&\frac{1}{2} e_n > \frac{1}{3} (e_{n-1})_2 > (e_{n-2})_3 > (e_{n-3})_4 > \ldots
\end{aligned}
$$

(nerovnice ty platí, vyjímajíc první, také pro $n = 1, 2, 3$).

Pak jest nerovnicím těm vyhověno též pro

$$n = m + 1.$$

V skutku jest

$$(e_{m-1})_3 = (e_{m-1})_2 \frac{e_{m-1} - 2}{3} > (e_{m-2})_3 \frac{e_{m-2} - 3}{4} = (e_{m-2})_4,$$

vezmeme-li zřetel k příslušným nerovnicím pro menší hodnoty čísla n. Podobně dokážou se další nerovnice soustavy (3) pro $n = m + 1$, vyjímajíc první čtyry.

Z nerovnic

$$e_m > \frac{2}{3} (e_{m-1})_2$$

$$e_m - 1 > 3(e_{m-1} - 2)$$

plyne, dělíme-li jich součin šesti:

$$\frac{1}{3} (e_m)_2 > (e_{m-1})_3,$$

čímž jest čtvrtá nerovnice soustavy (3) pro $n = m + 1$ dokázána.

Klademe-li v rovnici (2) $n = m + 1$, obdržíme

$$
\begin{aligned}
e_{m+1} &= 1 + (e_m)_2 - (e_{m-1})_3 + (e_{m-2})_4 - \ldots \\
&= \frac{2}{3} (e_m)_2 + 1 + \frac{1}{3} (e_m)_2 - (e_{m-1})_3 + \ldots
\end{aligned}
$$

tedy dle nerovnic právě dokázaných

$$\frac{1}{2} e_{m+1} > \frac{1}{3} (e_m)_2,$$

t. j. třetí nerovnici soustavy (3).

Nerovnice druhá a první téže soustavy jest nutnou konsekvencí nerovnice právě dokázané, jakmile překročí e_m hodnotu 3 resp. 8.

Induktivně jest tudíž dokázáno, že platí nerovnice (3) pro jakoukoli hodnotu čísla n, jelikož platí, jak se výpočtem přesvědčíme, pro $n = 4, 5, 6 \ldots$

Poněvadž jest

$$\frac{1}{2} (e^2_{m-1} - e_{m-1}) > \frac{1}{4} e^2_{m-1}$$

jakmile překročí e_{m-1} hodnotu 4, můžeme místo třetí, pro nás nejdůležitější nerovnice soustavy (3) psáti

$$e_m > \frac{1}{4} e^2_{m-1}, \tag{4}$$

tudíž i

$$\frac{e_m}{4} > \left(\frac{e_{m-1}}{4}\right)^2 > \left(\frac{e_{m-2}}{4}\right)^4 > \left(\frac{e_{m-3}}{4}\right)^8 \ldots > \left(\frac{e_{m-k}}{4}\right)^{2^k}. \tag{5}$$

Z toho následuje: budiž t jakkoli malé, od nuly rozdílné číslo, lze nalézti vždy tak velké konečné číslo $n = m$, že platí nerovnice

$$t (1 + t)^{e_m - e_{m-1}} < 1;$$

řada A_1 neb A'_1 jest tudíž pro jakkoli malou, od nuly rozdílnou hodnotu veličiny t řadou *divergentní.*

Z dokázaných nerovností plyne dále, že jest řada

$$A \equiv (1 - t)^{e_0} + t (1 - t)^{e_1} + t^2 (1 - t)^{e_2} + \ldots$$

konvergentní v mezích

$$0 \leqq t < 2,$$

jak patrno z nerovnice v případě tom platné:

$$\left| t (1 - t)^{e_m - e_{m-1}} \right| < 1.$$

Nemáme tedy právo, výrazy A a A″ pokládati za identické. Zda-li mají pro jednotlivé (třebas i soujemné) hodnoty veličiny t úkony jejich A a A″ (z nichž první jest dán v mezích $0 \lesseqgtr t < 2$, druhý v mezích $-\infty \lesseqgtr t \lesseqgtr +\infty$) stejné hodnoty, mohlo by se vyšetřiti pouze pomocí úvah, na všeobecné theorii funkcí jedné proměnné založených.

Postupným derivováním řady A dle t zjednáme si nové řady, které zase nejsou řadami absolutně konvergentními, když je rozvineme dle mocností veličiny t, a které tudíž také nesmíme pokládati za identické s postupnými derivacemi výrazu A″, totiž s veličinami: $-2, 0, 0 \ldots.$

Doklady pro to, že řady derivováním řady A zjednané s derivacemi výrazu A″ nesouhlasí, zjednáme si v jednotlivých případech snadným výpočtem. Záporně vzata první derivace řady A:

$$B = \sum_{0}^{\infty} t^{n-1}(1-t)^{e_n - 1}\left[te_n - n(1-t)\right]$$

poskytuje na př. pro $t = \frac{1}{2}$ řadu:

$$\frac{e_0}{2^{e_0-1}} + \frac{e_1 - 1}{2^{e_1}} + \frac{e_2 - 2}{2^{e_2+1}} + \frac{e_3 - 3}{2^{e_3+2}} + \ldots$$

jejíž numerická hodnota není 2, nýbrž

$$\frac{3}{2^2} + \frac{3}{2^4} + \frac{4}{2^7} + \frac{9}{2^{14}} + \ldots = 0{\cdot}9692993 \ldots.$$

Hoene-Wrońského Canony logarithmů.

Napsal

J. Beneš v Praze.

Nejrůznější, přečetná vydání tabulek logarithmických neliší se podstatně, nehledíme-li na různosť typografické úpravy, od pravzorů svých ze století sedmnáctého, od logarithmických kánonů Briggsových, Napierových, Vlacqových, Ursinových a j., a vyžadují všechny celkem i stejného postupu při upotřebení praktickém. Sestaveny jsou tak, aby vzájemně sobě odpovídající