Vilém Jung
Methodický příspěvek k theorii funkce Gamma [II.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 32 (1903), No. 2, 105--124

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108972

Methodický příspěvek k theorii funkce Gamma.

Napsal

Vilém Jung,

professor c. k. státní průmyslové školy v Praze.

(Pokračování.)

2.

Vyšetřme vlastnosti funkce

$$\varphi(z) = \frac{1}{\Gamma(z)\,\Gamma(1-z)},$$

čímž dospějeme ke druhé hlavní vlastnosti funkce $\Gamma(z)$, v níž zračí se souvislost této funkce s *jednoznačnými elementárními funkcemi transcendentními* (jednoduše periodickými).

Především patrno, že jest funkce $\varphi(z)$ *celistvou* funkcí *transcendentní,* mající *nullové* body *1. řádu* v místech $z = 0$, ± 1, $\pm 2, \ldots$.

Na základě první hlavní vlastnosti funkce $\Gamma(z)$ můžeme psáti

$$\Gamma(1-z) = -z\,\Gamma(-z),$$

a tedy vzhledem k rovnici (16) obdržíme

$$\varphi(z) = z\prod_{m=1}^{+\infty}\left(1+\frac{z}{m}\right)\left(1+\frac{1}{m}\right)^{-z}$$

$$.\,-\frac{1}{z}(-z)\prod_{m=1}^{+\infty}\left(1-\frac{z}{m}\right)\left(1+\frac{1}{m}\right)^{z}.$$

Ježto tyto nekonečné součiny *absolutně* konvergují pro jakékoliv konečné z, můžeme psáti*)

*) Ježto nekonečný součin na pravé straně rovnice (20) konverguje *absolutně* pro jakékoliv konečné z, rovná se jeho hodnota *nulle* jen v těch místech, v nichž jednotlivé jeho *primární faktory* rovnají se nulle a t. j. v místech $z = 0$, ± 1, $\pm 2, \ldots$ Jsou tedy tato místa *jedinými nullovými body 1. řádu* funkce $\varphi(z)$.

$$\varphi(z) = z \prod_{m=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z^2}{m^2}\right). \tag{20}$$

Poněvadž

$$\frac{1}{\Gamma(z+1)} = \frac{1}{z\,\Gamma(z)}, \quad \frac{1}{\Gamma(-z)} = \frac{1}{-\frac{1}{z}\,\Gamma(1-z)},$$

obdržíme

$$\varphi(z+1) = \frac{1}{\Gamma(z+1)\,\Gamma(-z)} = -\frac{1}{\Gamma(z)\,\Gamma(1-z)} = -\varphi(z),$$

z čehož plyne

(21) $\varphi(z+2) = \varphi(z)$, obecně $\varphi(z+2k) = \varphi(z)$.

dále odvodíme snadno relace

(22) $\varphi(-z) = -\varphi(z)$, obecně $\varphi(-z+2k) = -\varphi(z)$,

(23) $\varphi(1-z) = \varphi(z)$, obecně $\varphi(-z+2k+1) = \varphi(z)$,

mimo to také

$$\varphi(z+2k+1) = -\varphi(z),$$

značí-li k jakékoliv celistvé číslo kladné i záporné.

Jest tedy funkce $\varphi(z)$ *automorfní* funkcí, dovolujíc v sobě lineárné transformace

$$z' = z + 2 \quad \text{jakož i} \quad z' = 1 - z.$$

První z těchto dovolených transformací má za následek *periodičnost* funkce $\varphi(z)$ a to s *primitivní periodou* 2.

Funkce $\varphi(z)$ jest *jednoznačnou* funkcí *jediného* argumentu, proto může býti *nanejvýše* dvojnásobně periodickou. (*Jacobi*, Werke, II, pag. 202.) *)

Ježto jest však $\varphi(z)$ *celistvou funkcí transcendentní*, nemůže býti ani dvojnásobně periodickou, nemá-li býti v celé rovině komplexního argumentu z konstantou. **)

---

*) Viz na př.: *E. Pascal — A. Schepp, Repertorium der höheren Mathematik*, I. Teil, pag. 379. Leipzig 1900.

**) Viz na př. *H. Burkhardt, Funktionentheoretische Vorlesungen*, II. Teil, § 13, pag. 37. Leipzig 1899.

Jest tedy $\varphi(z)$ *celistvou* funkcí transcendentní *jednoduše* periodickou.

Z formule (20) vysvítá, že jest funkce $\varphi(z)$ také *symmetricky automorfní,* t. j., pro *sdružené* komplexní hodnoty argumentu z má $\varphi(z)$ *sdružené* komplexní hodnoty.

Z rovnice (20) jest dále patrno, že pro *reálné* hodnoty argumentu z má funkce $\varphi(z)$ hodnoty *reálné*; pro hodnoty *ryze imaginární* argumentu z (obecně pro $z = k + iy$) má $\varphi(z)$ hodnoty *ryze imaginární.*

Pro *komplexní* hodnoty argumentu z má $\varphi(z)$ obecně hodnoty *komplexní.* Pouze pro $z = \frac{1}{2} + iy$ (obecně pro $z = k + \frac{1}{2} + iy$), při čemž se y nalézá v oboru reálném mezi $+\infty$ a $-\infty$, má funkce $\varphi(z)$ hodnoty *reálné.*

Platí totiž

$$\varphi\left(\frac{1}{2} - iy\right) = -\varphi\left(\frac{1}{2} - iy - 1\right) = -\varphi\left(-\frac{1}{2} - iy\right)$$
$$= \varphi\left(\frac{1}{2} + iy\right);$$

funkce $\varphi(z)$ jest však symmetricky automorfní, proto, je-li

$$\varphi\left(\frac{1}{2} + iy\right) = A + iB,$$

musí

$$\varphi\left(\frac{1}{2} - iy\right) = A - iB,$$

tak že

$$A + iB = A - iB,$$

t. j.

$$B = -B \qquad \text{čili} \qquad B = 0.$$

Položme $z = x + iy$, při čemž jsou x, y čísla reálná, a vyšetřme pro $-1 \leqq x \leqq +1$ mezní hodnoty

$$\lim_{y=+\infty} \frac{1}{\varphi(x+iy)} \qquad \text{jakož i} \qquad \lim_{y=-\infty} \frac{1}{\varphi(x+iy)}.$$

Pro absolutní hodnotu této funkce obdržíme

$$|\varphi(z)| = \sqrt{x^2+y^2}\prod_{m=1}^{+\infty}\sqrt{\left[\left(1+\frac{x}{m}\right)^2+\frac{y^2}{m^2}\right]\left[\left(1-\frac{x}{m}\right)^2+\frac{y^2}{m^2}\right]}$$

čili

$$|\varphi(z)| = \sqrt{x^2+y^2}\sqrt{\prod_{m=1}^{+\infty}\left[1+2(y^2-x^2)\frac{1}{m^2}+(x^2+y^2)^2\frac{1}{m^4}\right]}.$$

Patrno, že absolutní hodnota $|\varphi(z)|$ nezávisí na znaménkách veličin x a y.

Dále jest patrno, že

$\varphi[1-(x+iy)] = \varphi[(1-x)-iy] = \varphi(x+iy) = X+iY$,
avšak

$$\varphi[(1-x)+iy] = X-iY,$$

proto

$$|\varphi[(1-x)+iy]| = |\varphi(x+iy)|.$$

Stačí tedy vyšetřovati absolutní hodnotu $|\varphi(z)|$ pouze v jednom oktantě periodičného pruhu, t. j. pro $0 \leqq x \leqq +\frac{1}{2}$ a pro $y=0$ až $y=+\infty$.

Dále vidíme, že

$$|\varphi(0)| = 0;$$

pro veškerá ostatní místa v konečnu zmíněného oktantu má $|\varphi(z)|$ hodnoty konečné od nully se lišící.

Snadno odvodíme pro $y=0$

$$|\varphi(x)| = x\prod_{m=1}^{+\infty}\left(1-\frac{x^2}{m^2}\right),$$

pro $x=0$

$$|\varphi(iy)| = y\prod_{m=1}^{+\infty}\left(1+\frac{y^2}{m^2}\right).$$

Dále jest patrno, že pro dostatečně velké hodnoty y jest

$$|\varphi(z)| > y \quad \text{čili} \quad \frac{1}{|\varphi(z)|} < \frac{1}{y}.$$

Je-li δ *libovolně malé číslo kladné,* a volíme-li $y \geqq \frac{1}{\delta}$, jest $\frac{1}{y} \leqq \delta$, tak že pro dostatečně velké y jest $\frac{1}{|\varphi(z)|} < \delta$.

Následkem toho jest

$$\lim_{y=+\infty} \frac{1}{|\varphi(z)|} = 0,$$

podobně jest také

$$\lim_{y=-\infty} \frac{1}{|\varphi(z)|} = 0.$$

Ježto tedy z předu vyznačené mezní hodnoty *existují*, jest dle známé obecné věty*) o jednoduše periodických funkcích funkce $\varphi(z)$ *racionálnou funkcí funkce exponenciální* $e^{\pi i z}$.

Zkoumejme dále funkci

$$\psi(z) = \varphi\left(z + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + z\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - z\right)}.$$

Funkce $\psi(z)$ jest *celistvou* transcendentní funkcí, mající *nullové body 1. řádu* v místech $z = \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \ldots$.

Pro tuto funkci dají se snadno odvoditi relace

(24) $\psi(z+1) = -\psi(z)$, obecně $\psi(z+2k+1) = -\psi(z)$,
(25) $\psi(z+2) = \psi(z)$, obecně $\psi(z+2k) = \psi(z)$,
(26) $\psi(-z) = \psi(z)$, obecně $\psi(-z+2k) = \psi(z)$,
(27) $\psi(1-z) = -\psi(z)$, obecně $\psi(-z+2k+1) = -\psi(z)$,

při čemž značí k libovolné *celistvé* číslo kladné i záporné.

Jest tedy funkce $\psi(z)$ *automorfní* funkcí, dovolujíc v sobě lineárné transformace

$$z' = z + 2, \text{ jakož i } z' = -z.$$

Funkce $\psi(z)$ jest *jednoduše* periodickou funkcí s *primitivní periodou* 2.

A ježto $\psi(z) = \varphi(z + \frac{1}{2})$, jest dle předcházejícího také $\psi(z)$ *racionální funkcí* funkce $e^{\pi i z}$.

Na základě (20) obdržíme

*) Viz na př. *H. Burkhardt, Funktionentheoretische Vorlesungen.* I. Teil, § 53, pag. 149. Leipzig 1897.

$$\psi(z)=\varphi\left(z+\frac{1}{2}\right)=\left(z+\frac{1}{2}\right)\prod_{m=1}^{+\infty}\left(1+\frac{z+\frac{1}{2}}{m}\right)\left(1-\frac{z+\frac{1}{2}}{m}\right)$$

$$=\left(z+\frac{1}{2}\right)\prod_{m=1}^{+\infty}\frac{(2m+1)+2z}{2m}\cdot\frac{(2m-1)-2z}{2m}.$$

Vzhledem k tomu, že tento součin konverguje *absolutně* pro jakékoliv konečné z, můžeme psáti

$$\psi(z)=\frac{1}{2}\prod_{m=1}^{+\infty}\frac{(2m-1)(2m+1)}{(2m)^2}$$

$$\cdot(1+2z)\prod_{m=1}^{+\infty}\left(1+\frac{2z}{2m+1}\right)\left(1-\frac{2z}{2m-1}\right).$$

Ježto

$$\lim_{m=+\infty}\left(1+\frac{2z}{2m+1}\right)=1$$

pro jakékoliv konečné z, platí dále*)

$$\psi(z)=\frac{1}{2}\prod_{m=1}^{+\infty}\frac{(2m-1)(2m+1)}{(2m)^2}\cdot\prod_{m=1}^{+\infty}\left[1-\left(\frac{2z}{2m-1}\right)^2\right]. \tag{28}$$

Snadno poznáme, že jest $\psi(z)$ také *symmetricky automorfní.* Pro hodnoty *reálné* argumentu z má $\psi(z)$ hodnoty *reálné.* Pro *ryze imaginární* hodnoty argumentu z (obecně pro $z=k+iy$) má $\psi(z)$ taktéž hodnoty *reálné.*

Pro *komplexní* hodnoty argumentu z má $\psi(z)$ obecně hodnoty *komplexní.*

Pouze pro $z=\frac{1}{2}+iy$ (obecně pro $z=k+\frac{1}{2}+iy$) má $\psi(z)$ hodnoty *ryze imaginární.*

Funkce $\varphi(z)$ a $\psi(z)$ mají v bodě $z=\infty$ podstatnou sin-

---

*) Ježto nekonečný součin na pravé straně rovnice (28) konverguje *absolutně* pro jakékoliv konečné z, rovná se jeho hodnota nulle jen v těch místech, v nichž jednotlivé jeho primární faktory rovnají se nulle a t. j. v místech $z=\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{3}{2}$, ... Jsou tedy tato místa *jedinými nullovými body 1. řádu* funkce $\psi(z)$.

gularitu; tento bod jest mezným bodem jejich *bodů nullových 1. řádu.*

Funkce

$$\chi(z) = \frac{\psi(z)}{\varphi(z)}$$

jest jednoznačnou funkcí transcendentní mající *nullové body 1. řádu* v místech $z = \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \ldots,$ a *póly 1. řádu* v místech $z = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$

Mimo tyto póly jest tato funkce v celém *konečnu* regulárnou a má v bodě $z = \infty$ podstatnou singularitu; tento bod jest totiž mezným bodem její bodů nullových jakož i její pólů.

Tato funkce má *primitivní periodu 1*, dovolujíc v sobě lineárnou transformaci

$$z' = z + 1;$$

mimo to jest také *symmetricky automorfní.*

Funkce

$$\Phi(z) = \psi(z) + i\varphi(z)$$

jest celistvou funkcí transcendentní jednoduše periodickou *s primitivní periodou 2.*

Předpokládejme prozatím z v oboru *reálném.*

Ježto mají v reálném oboru funkce $\psi(z)$ a $\varphi(z)$ hodnoty reálné a nemají v těchže místech nullové body, jest patrno, že nemá funkce $\Phi(z)$ v konečnu reálného oboru žádných bodů nullových.

Z této příčiny a poněvadž jest dle předcházejícího funkce $\Phi(z)$ racionální funkcí funkce $e^{\pi i z}$, musí se dáti převésti na tvar *)

$$\psi(z) + i\varphi(z) = Ae^{\pi i z}, \tag{29}$$

kde značí A jistou konstantu, kterou později určíme.

Patrno, že v reálném oboru platí dále

$$\psi(z) - i\varphi(z) = Ae^{-\pi i z}. \tag{29'}$$

*) V rovnici (29) poznáváme *Euler*-ovu relaci mezi jednoznačnými elementárními funkcemi transcendentními (jednoduše periodickými).

Násobením těchto rovnic obdržíme relaci

$$(30) \qquad [\psi(z)]^2 + [\varphi(z)]^2 = A^2,$$

která prozatím platí v oboru reálném.

Funkce na levé straně rovnice (30) jest celistvou funkcí transcendentní, t. j. regulárnou v *celém konečnu* roviny komplexního argumentu z.

Relace (30) pak platí v celém konečnu roviny komplexního argumentu z dle obecné věty z funkční theorie, totiž: „*Je-li funkce, regulárná v určitém oboru, podél jakékoliv omezené cesty ležící v tomto oboru konstantou, jest v celém tomto oboru konstantou.* *)

Patrno, že funkce

$$\frac{1}{\Phi(z)} = \frac{1}{\psi(z) + i\varphi(z)} = \frac{\psi(z) - i\varphi(z)}{A^2}$$

jest v celém konečnu roviny komplexního argumentu z regulárnou, proto nemá funkce $\Phi(z)$ v celém tomto oboru žádných bodů nullových, následkem čehož platí relace (29) nejen v oboru reálném, nýbrž v celém konečnu roviny komplexního argumentu z.

Z rovnice (29) pro $z = 0$ plyne

$$A = \psi(0) = \varphi\left(\frac{1}{2}\right).$$

Derivováním rovnice (29) podle z obdržíme

$$\psi'(z) + i\varphi'(z) = Ae^{\pi i z} . \pi i;$$

násobíme-li rovnici (29) číslem πi, obdržíme dále

$$\pi i . \psi(z) - \pi\varphi(z) = Ae^{\pi i z} . \pi i$$

čili

$$-\pi\varphi(z) + i\pi\psi(z) = \psi'(z) + i\varphi'(z),$$

z čehož srovnáním obou stran plyne

$$(31) \qquad \varphi'(z) = \pi\psi(z),$$

$$(32) \qquad \psi'(z) = -\pi\varphi(z).$$

---

*) Viz na př.: *H. Burkhardt, Funktionentheor. Vorles.* I. Teil, § 39., pag 109. Leipzig 1897.

Každá z funkcí $\varphi(z)$ a $\psi(z)$ vyhovuje algebraické differenciální rovnici 1. řádu, v níž se argument z explicitně nevyskytuje. Jest tedy každá z těchto funkcí inversí integrálu jistého algebraického differenciálu.

Nyní jsme s to stanoviti konstantu A.

Z rovnice (20) plyne

$$\lim_{z=0} \frac{\varphi(z)}{z} = 1,$$

avšak

$$\lim_{z=0} \frac{\varphi(z)}{z} = \underset{z=0}{/} \varphi'(z) = \pi\psi(0);$$

srovnáním posledních dvou rovnic obdržíme

$$\psi(0) = \frac{1}{\pi},$$

jest tedy

$$A = \frac{1}{\pi}.$$

Dosadíme-li do rovnic (29) a (29′) za A tuto hodnotu, obdržíme konečně

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi}(e^{\pi iz} + e^{-\pi iz}), \tag{33}$$

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i}(e^{\pi iz} - e^{-\pi iz}). \tag{34}$$

Pro funkci $\chi(z)$ pak plyne

$$\chi(z) = i\frac{e^{2\pi iz} + 1}{e^{2\pi iz} - 1};$$

jest tedy $\chi(z)$ racionální funkcí funkce $e^{2\pi iz}$.

Dále jest patrno, že

$$\psi(z_1 \pm z_2) + i\varphi(z_1 \pm z_2) = \frac{1}{\pi} e^{\pi i(z_1 \pm z_2)} = \frac{1}{\pi} e^{\pi iz_1} e^{\pm \pi iz_2};$$

vzhledem k rovnicím (29) a (29′) pak plyne

$$\psi(z_1 \pm z_2) + i\varphi(z_1 \pm z_2) = \pi[\psi(z_1) + i\varphi(z_1)] \,.\, [\psi(z_2) \pm i\varphi(z_2)].$$

Znásobíme-li na pravé straně a srovnáme-li pak obě strany, obdržíme relace

$$\psi(z_1 \pm z_2) = \pi\,[\psi(z_1)\,\psi(z_2) \mp \varphi(z_1)\,\varphi(z_2)],$$
$$\varphi(z_1 \pm z_2) = \pi\,[\varphi(z_1)\,\psi(z_2) \pm \psi(z_1)\,\varphi(z_2)].$$

Mají tedy funkce $\psi(z)$ a $\varphi(z)$ algebraický addiční theorém.

Rovnice (30) nám praví, *že mezi funkcemi $\psi(z)$ a $\varphi(z)$ platí algebraická rovnice (2. stupně), jejíž koefficienty jsou nezávisly na argumentu z.*

Z této rovnice také vysvítá, že hodnoty funkcí $\varphi(z)$ a $\psi(z)$ v reálném oboru argumentu z, jež jsou dle předcházejícího vesměs reálné, leží mezi $+\frac{1}{\pi}$ a $-\frac{1}{\pi}$.

Funkce $\varphi(z)$ má v reálném oboru hodnoty *extrémní* v těch místech, v nichž $\varphi'(z) = \pi\psi(z)$ má *body nullové*, t. j. v místech $z = \frac{2k+1}{2}$, a to *maxima* $+\frac{1}{\pi}$ v místech $z = \frac{4k+1}{2}$, *minima* $-\frac{1}{\pi}$ v místech $z = \frac{4k+3}{2}$.

Funkce $\psi(z)$ má *extrémní* hodnoty v těch místech, v nichž má $\psi'(z) = -\pi\varphi(z)$ *body nullové*, t. j. v místech $z = k$, a to *maxima* $+\frac{1}{\pi}$ v místech $z = 2k$, *minima* $-\frac{1}{\pi}$ v místech $z = 2k + 1$.

Dále jest patrno, že

$$\psi\left(\frac{1}{4} + 2k\right) = \varphi\left(\frac{1}{4} + 2k\right) = \frac{\sqrt{2}}{2\pi},$$

$$\psi\left(\frac{1}{4} + 2k + 1\right) = \varphi\left(\frac{1}{4} + 2k + 1\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2\pi};$$

$$\psi\left(-\frac{1}{4} + 2k\right) = -\varphi\left(-\frac{1}{4} + 2k\right) = \frac{\sqrt{2}}{2\pi},$$

$$-\psi\left(-\frac{1}{4} + 2k + 1\right) = \varphi\left(-\frac{1}{4} + 2k + 1\right) = \frac{\sqrt{2}}{2\pi};$$

a tedy

$$\chi\left(\pm\frac{1}{4} + k\right) = \pm 1.$$

Při tom značí k jakékoliv *celistvé* číslo kladné i záporné, nullu v to počítajíc.

Z rovnice (20) obdržíme pro $z = \frac{1}{2}$

$$\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\pi} = \frac{1}{2}\prod_{m=1}^{+\infty}\left[1 - \frac{1}{(2m)^2}\right] = \frac{1}{2}\prod_{m=1}^{+\infty}\frac{(2m-1)(2m+1)}{(2m)^2},$$

z čehož plyne*)

*) Tuto formuli podal *Wallis* r. 1655 ve svém díle *Arithmetica infinitorum* již před objevením počtu *differenciálního*. S touto formulí souvisí úzce formule *Stirling*-ova

$$\lim_{m=\infty} \frac{m!}{m^{m+\frac{1}{2}} e^{-m} \sqrt{2\pi}} = \lim_{m=\infty} f(m) = 1,$$

kterou podal *Stirling* r. 1730 ve svém díle *Methodus differentialis sive Tractatus de summatione et interpolatione serierum.*

Pro celistvé kladné m platí

$$f(m) = \frac{\Gamma(m+1)}{m^{m+\frac{1}{2}} e^{-m} \sqrt{2\pi}}.$$

Pojem této funkce dá se rozšířiti pro jakékoliv hodnoty argumentu z, čímž se obdrží

$$f(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z^{z+\frac{1}{2}} e^{-z} \sqrt{2\pi}},$$

z čehož logarithmováním vychází

$$\log \Gamma(z+1) = \frac{1}{2}\log 2\pi - z + (z + \frac{1}{2})\log z + \log f(z).$$

Pro jakékoliv *kladné* z dá se odvoditi

$$\log f(z) = \sum_{m=1}^{r} (-1)^{m-1} \frac{B_m}{(2m-1)\,2m} \cdot \frac{1}{z^{2m-1}}$$

$$+ (-1)^r \Theta \frac{B_{r+1}}{(2r+1)(2r+2)} \cdot \frac{1}{z^{2r+1}},$$

při čemž $0 < \Theta < 1$,

$$B_m = \frac{(2m)!}{2^{2m-1}\pi^{2m}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2m}}$$

pak značí čísla *Bernoulli*-ho.

(35) $$\frac{\pi}{2}=\prod_{m=1}^{+\infty}\frac{(2m)^2}{(2m-1)(2m+1)}.$$

Rovnici (28) můžeme se zřetelem k rovnici (35) psáti takto

(36) $$\psi(z)=\frac{1}{\pi}\prod_{m=1}^{+\infty}\left[1-\left(\frac{2z}{2m-1}\right)^2\right].$$

Logarithmováním a nápotomním derivováním *) rovnice (20) podle z obdržíme vzhledem k rovnici (31) rovnici

(37) $$\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}=\pi\,.\,\chi(z)=\frac{1}{z}+\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{2z}{z^2-m^2}$$
$$=\frac{1}{z}+\sum_{m=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{z-m}+\frac{1}{z+m}\right);$$

Přejdeme-li na pravo k nekonečné řadě, obdržíme řadu *Stirling*-ovu, která diverguje, neboť od určitého místa počínajíc rostou hodnoty její členů neomezeně, nechť má z jakkoliv velkou hodnotu.

Přes to poskytuje tato řada pohodlný a velmi přesný způsob počítání hodnot funkce $\log\Gamma(z+1)$, a to tím přesnější, čím větší jest hodnota argumentu z.

Je-li $z>1$, ubývají hodnoty členů z počátku až k jistému místu; největší přibližnosti se tu dosáhne, ukončí-li se členem, jenž předchází členu nejmenší hodnoty. Chyba tu vzniklá jest menší než tento nejmenší člen. (Viz: *J. A. Serret - A. Harnack, Differential- und Integral - Rechnung*, II. Bd, 2. Aufl., pag. 161. a násl.).

Vzhledem k vlastnosti $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$ stačí vypočítati hodnoty pro intervall omezený dvěma sousedními čísly kladnými na př. od $z=1$ do $z=2$. Druhá vlastnost vyjádřená formulí $\Gamma(z)\,\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z}$ redukuje tento intervall na polovinu.

Legendre vypočítal tabulky hodnot funkce $\log\Gamma(z)$ na 12 desetinných míst pro veškeré hodnoty argumentu z mezi $+1$ a $+2$ od tisíciny k tisícině. (*Traité des fonct. ellipt. et des intégr. Eulériennes.* Tome II, Paris 1826).

Theorii řady *Stirling*-ovy pěstovali *Cauchy*, *Binet*, *Malmstén*, *Raabe*, *Schlömilch*, *Liouville*, *Hermite*, *Limbourg*, *Genocchi*, *L. Bourguet* a jiní.

Stirling-ova formule dá se nejjednodušeji odvoditi jistou transformací *Wallis*-ovy formule, což ukázal *J. A. Serret* (Pařížská Akademie 1860).

*) Jest to dovoleno, neboť nekonečný součin na pravé straně rovnice (20) konverguje *absolutně* a *stejnoměrně* pro jakékoliv konečné z, což platí také o nekonečné řadě vzniklé logarithmováním tohoto součinu, vyjímajíc místa $z=0, \pm1, \pm2, \ldots$, jež jsou singulárnými body funkce $\log\varphi(z)$.

nekonečná řada na pravé straně konverguje *stejnoměrně* pro každé konečné z, vyjímajíc hodnoty $z = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, pro něž má hodnoty *nekonečně velké 1. řádu*; tyto body jsou *póly 1. řádu* funkce $\chi(z)$ a jejich *mezným* bodem jest bod $z = \infty$.

Rovnicí (37) vyjadřuje se *meromorfní* funkce $\chi(z)$ nekonečnou řadou parciálních zlomků; každý člen této řady za znamením Σ jest racionální lomenou funkcí argumentu z a obsahuje dva z pólů funkce $\chi(z)$, t. j. $z = m$, $z = -m$.

Z rovnice (33) a (34) plyne přímo

$$\varphi(z) = \frac{\sin \pi z}{\pi}, \tag{38}$$

$$\psi(z) = \frac{\cos \pi z}{\pi}, \tag{39}$$

$$\chi(z) = \operatorname{cotg} \pi z. \tag{40}$$

Platí tedy relace

$$\Gamma(z)\,\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}, \tag{41}$$

čímž jest vyjádřena druhá hlavní vlastnost funkce $\Gamma(z)$.

Pro $z = \frac{1}{2}$ obdržíme

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = \pi, \quad \text{z čehož *)} \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Z rovnic (20) a (36) pak obdržíme

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{m=1}^{+\infty}\left(1 - \frac{z^2}{m^2}\right), \tag{42}$$

$$\cos \pi z = \prod_{m=1}^{+\infty}\left[1 - \left(\frac{2z}{2m-1}\right)^2\right], \tag{42'}$$

jež jsou odjinud známy.**)

---

*) Kladnou hodnotu druhé odmocniny nutno zde vzíti proto, poněvadž má funkce $\Gamma(z)$ v oboru kladných čísel reálných hodnoty kladné reálné.

**) Při odvozování rovnice (41) předpokládá se obyčejně známost rovnice (42), tak že se pomocí rovnice (20) dospěje rychle k cíli.

Volil jsem tu zúmyslně cestu delší, abych ukázal, kterak lze odvoditi veškeré vlastnosti jednoznačných elementárních funkcí transcendentních

Další relaci týkající se funkce $\Gamma(z)$, kterou již *Euler* podal, obdržíme na základě rovnice (34).

Položme

$$N = \Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{n-2}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right),$$

při čemž jest $n > 1$ celistvé číslo kladné.

Ježto $\frac{n-k}{n} = 1 - \frac{k}{n}$, můžeme, obrátivše pořádek činitelů, také psáti

$$N = \Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(1-\frac{n-2}{n}\right)\Gamma\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

Násobíme-li obě tyto rovnice a béřeme-li zároveň zřetel k rovnici

$$\frac{1}{\Gamma\left(\frac{k}{n}\right)\Gamma\left(1-\frac{k}{n}\right)} = \varphi\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{2\pi i}\left(e^{\frac{k\pi i}{n}} - e^{-\frac{k\pi i}{n}}\right)$$

$$= \frac{i}{2\pi}e^{-\frac{k\pi i}{n}}\left(1 - e^{\frac{2k\pi i}{n}}\right),$$

obdržíme

$$N^2 = \frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n-1}\varphi\left(\frac{k}{n}\right)} = \frac{(2\pi)^{n-1}}{i^{n-1}\cdot e^{-\frac{\pi i}{n}\sum\limits_{k=1}^{n-1}k}\cdot\prod\limits_{k=1}^{n-1}\left(1-e^{\frac{2k\pi i}{n}}\right)}$$

čili

$$N^2 = \frac{(2\pi)^{n-1}}{\prod\limits_{k=1}^{n-1}\left(1-e^{\frac{2k\pi i}{n}}\right)}, \tag{43}$$

neboť

(jednoduše periodických) čistě analyticky přímo na základě jich souvislosti s funkcí $\Gamma(z)$. Při tom jsem ovšem předpokládal, že jest známa obecná věta, stanovící podmínky, za kterých jednoduše periodická funkce s primitivní periodou 2 jest racionální funkcí funkce exponenciální $e^{\pi i z}$, jež jest celistvou funkcí transcendentní s primitivní periodou 2, nemající v celém konečnu roviny komplexního argumentu žádných bodů nullových.

$$i^{n-1}\,.\,e^{-\frac{\pi i}{n}\sum\limits_{k=1}^{n-1} k} = i^{n-1}.\,e^{-\frac{\pi i}{2}(n-1)} = i^{n-1}\left(e^{-\frac{\pi i}{2}}\right)^{n-1}$$
$$= i^{n-1}\,.\,(-i)^{n-1} = (-i^2)^{n-1} = +1.$$

Snadno odvodíme*)

$$\prod_{k=1}^{n-1}\left(1 - e^{\frac{2k\pi i}{n}}\right) = n,$$

a dosadíme-li tuto hodnotu do (43), obdržíme

---

*) Položme $x^n = e^{\pi i z}$.
Patrno, že jest

$$x = e^{\frac{\pi i z}{n}} = e^{\pi i Z}$$

n-značnou funkcí argumentu z.
Jest tedy

$$e^{\pi i z} = e^{\pi i n Z},$$

z čehož vzhledem k periodičnosti exponenciální funkce plyne

$$z + 2k = n\,Z \quad \text{čili} \quad Z = \frac{z + 2k}{n},$$

což podává n různých hodnot pro x, t. j.

$$x_k = e^{\pi i \frac{z+2k}{n}},\ (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

jsou kořeny rovnice

$$x^n - e^{\pi i z} \equiv \prod_{k=0}^{n-1}\left(x - e^{\pi i \frac{z+2k}{n}}\right) = 0.$$

Položíme-li $z = 0$, obdržíme

$$x^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}\left(x - e^{\frac{2k\pi i}{n}}\right) = (x-1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(x - e^{\frac{2k\pi i}{n}}\right),$$

z čehož

$$\prod_{k=1}^{n-1}\left(x - e^{\frac{2k\pi i}{n}}\right) = \frac{x^n - 1}{x - 1} = \sum_{k=0}^{n-1} x^k;$$

a pro $x = 1$ vychází

$$\prod_{k=1}^{n-1}\left(1 - e^{\frac{2k\pi i}{n}}\right) = n.$$

$$N^2 = \frac{(2\pi)^{n-1}}{n},$$

z čehož plyne konečně *Euler*-ova relace*)

$$(44) \qquad \Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) = \sqrt{\frac{(2\pi)^{n-1}}{n}} = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} n^{-\frac{1}{2}}.$$

Odvoďme dále *Gauss*-ovu formuli,**) vyjadřující třetí hlavní vlastnost funkce $\Gamma(z)$, kterou podal již *Legendre* pro případ $n = 2$.

Budiž definován druh analytických funkcí formulí (18′), t. j.

$$F(z) = e^{-[a+b\cdot\gamma(z)]} \cdot \Gamma(z);$$

při tom značí a, b libovolné konstanty, funkce $\gamma(z)$ jest celistvou funkcí transcendentní, hovící podmínce $\gamma(z+1) - \gamma(z) = \frac{2r\pi i}{b}$, při čemž jest r reálné číslo celistvé.

Tyto funkce mají v bodech $z = 0, -1, -2, \ldots$ *póly 1. řádu*, v ostatním konečnu jsou regulárné, nemají tu žádných bodů nullových a hoví podmínce (1).

Budiž opět $n > 1$ celistvé číslo kladné.

Patrno, že funkce $F(nz)$ má *póly 1. řádu* v místech $z = 0, -\frac{1}{n}, -\frac{2}{n}, -\frac{3}{n}, \ldots,$ a v konečnu nemá žádných bodů nullových.

Funkce

$$(45) \qquad \Psi(z) = F(z)\,F\left(z+\frac{1}{n}\right)F\left(z+\frac{2}{n}\right)\ldots F\left(z+\frac{n-1}{n}\right)$$

má taktéž v místech $z = 0, -\frac{1}{n}, -\frac{2}{n}, -\frac{3}{n}, \ldots$ *póly 1. řádu* a v konečnu nemá žádných bodů nullových.

*) Na pravé straně této relace nutno vzíti *kladnou* hodnotu druhé odmocniny, neboť funkce *Gamma* má v oboru *kladných* čísel reálných vesměs *kladné* reálné hodnoty.

**) *Gauss*, Werke, 3, pag. 150.

Jest tedy podíl $\frac{\Psi(z)}{\mathrm{F}(nz)}$ celistvou funkcí transcendentní nemající v konečnu žádných bodů nullových, pročež možno psáti

$$\Psi(z) = e^{g(z)}\,\mathrm{F}(nz), \tag{46}$$

při čemž značí $g(z)$ celistvou funkci buď racionální nebo transcendentní.

Tvar funkce $g(z)$ určíme z podmínky (1), které hoví funkce $\mathrm{F}(z)$.

Pišme v rovnici (46) $z + \frac{1}{n}$ místo z a obdržíme, přihlížejíce k rovnici (1),

$$\mathrm{F}(z + \frac{1}{n}) \,.\, \mathrm{F}(z + \frac{2}{n}) \ldots \mathrm{F}(z + \frac{n-1}{n}) \,.\, z\mathrm{F}(z)$$
$$= e^{g(z+\frac{1}{n})} \,.\, nz\,\mathrm{F}(nz),$$

z čehož na základě (46), dělíme-li obě strany výrazem $z\mathrm{F}(nz)$ plyne relace

$$e^{g(z)} = n\, e^{g(z+\frac{1}{n})} \quad \text{čili} \quad e^{g(z+\frac{1}{n})-g(z)} = e^{-\log n}.$$

Tomu vyhovuje obecně funkce

$$g(z) = \alpha - nz \log n + \beta \,.\, f(z); \tag{46'}$$

konstanta α závisí na číslu n a na konstantě a, mimo to jest $\beta = b$ a funkce $f(z)$ jest celistvou funkcí transcendentní závislou na funkci $\gamma(z)$ a hovící podmínce $f(z + \frac{1}{n}) - f(z) = 0$, jak později uhlídáme.

Pro speciální funkci $\Gamma(z)$, definovanou *Weierstrass*-ovou formulí (18) aneb *Euler-Gauss*-ovým součinem (15), jest funkce $g(z)$ v rovnici (46') celistvou funkcí racionální *1. stupně.* O tom se přesvědčíme přímo přetvořením pravé strany rovnice (45) na základě rovnice (18), v níž konverguje nekonečný součin absolutně a stejnoměrně pro jakékoliv konečné z, proto s ním lze operovati tak jako se součinem o konečném počtu činitelů.

Můžeme tedy psáti

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{Cz} \prod_{m=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{z}{m}\right) e^{-\frac{z}{m}} = \frac{1}{n} \cdot nz \cdot e^{Cz} \prod_{m=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{nz}{mn}\right) e^{-\frac{nz}{mn}},$$

$$\frac{1}{\Gamma\left(z + \frac{k}{n}\right)} = \left(z + \frac{k}{n}\right) e^{C\left(z + \frac{k}{n}\right)} \prod_{m=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{z + \frac{k}{n}}{m}\right) e^{-\frac{z + \frac{k}{n}}{m}}.$$

Patrno, že pro jakékoliv konečné z platí identity

$$z + \frac{k}{n} = \frac{k}{n} \cdot \left(1 + \frac{nz}{k}\right) e^{-\frac{nz}{k}} \cdot e^{\frac{nz}{k}},$$

$$1 + \frac{z + \frac{k}{n}}{m} = \left(1 + \frac{\frac{k}{n}}{m}\right) \cdot \left(1 + \frac{nz}{mn + k}\right),$$

$$e^{-\frac{z + \frac{k}{n}}{m}} = e^{-\frac{\frac{k}{n}}{m}} \cdot e^{-\frac{nz}{mn + k}} \cdot e^{-\frac{kz}{m(mn + k)}}.$$

Vzhledem k tomu lze psáti

$$\frac{1}{\Gamma\left(z + \frac{k}{n}\right)} = \frac{k}{n} e^{C\frac{k}{n}} \prod_{m=1}^{+\infty} \left\{ \left(1 + \frac{\frac{k}{n}}{m}\right) e^{-\frac{\frac{k}{n}}{m}} \right\} \cdot e^{z\left[\frac{n}{k} - k \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m(mn + k)}\right]}$$

$$\cdot e^{Cz} \left(1 + \frac{nz}{k}\right) e^{-\frac{nz}{k}} \prod_{m=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{nz}{mn + k}\right) e^{-\frac{nz}{mn + k}};$$

obdržíme tedy dále

$$\prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\Gamma\left(z + \frac{k}{n}\right)} = \frac{1}{n} \cdot \prod_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{k}{n}\right)} \cdot e^{Nz} \cdot \tau(z),$$

při čemž jest

$$N = n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ k \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m(mn + k)} \right\},$$

$$\tau(z) = nz e^{Cnz} \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{nz}{k}\right) e^{-\frac{nz}{k}} \cdot \prod_{k=0}^{n-1} \left\{ \prod_{m=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{nz}{mn + k}\right) e^{-\frac{nz}{mn + k}} \right\}.$$

Položíme-li v poslední rovnici v prvním jednoduchém součinu $k = 1, 2, 3, \ldots, (n-1)$, v druhém dvojitém součinu pak $k = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)$ a zároveň $m = 1, 2, 3, \ldots, +\infty$, tak že

$$\begin{aligned} mn + 0 &= n,\ 2n,\ 3n, \ldots \\ mn + 1 &= n+1,\ 2n+1,\ 3n+1, \ldots \\ mn + 2 &= n+2,\ 2n+2,\ 3n+2, \ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ mn + n - 1 &= 2n-1,\ 3n-1,\ 4n-1, \ldots, \end{aligned}$$

dostaneme přirozenou řadu celistvých čísel kladných

$$\nu = 1, 2, 3, \ldots, +\infty.$$

Můžeme tedy psáti

$$\tau(z) = nz\, e^{Cnz} \prod_{\nu=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{nz}{\nu}\right) e^{-\frac{nz}{\nu}} = \frac{1}{\Gamma(nz)}.$$

Vzhledem k *Eulerově* relaci (44) pak obdržíme

$$\prod_{k=0}^{n-1} \Gamma\left(z + \frac{k}{n}\right) = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} n^{\frac{1}{2}} e^{-Nz}\, \Gamma(nz);$$

musíme tedy pro tento speciální případ v rovnici (46′) položiti

$$\alpha = \frac{n-1}{2} \log 2\pi + \frac{1}{2} \log n, \qquad \beta = 0,$$

tak že

$$N = n \log n,$$

při čemž béřeme zřetel pouze k reálnému logarithmu kladného čísla n.

Potom jest

$$e^{-Nz} = e^{-nz \log n} = n^{-nz},$$

tak že konečně obdržíme *Gauss*-ovu formuli *)

---

*) Srovnej: *J. A. Serret — A. Harnack, Differential- und Integral-Rechnung*, 2. Aufl. von *G. Bohlmann*; II. Bd, pag. 146—150. Leipzig 1899.

$$(47)\qquad \prod_{k=0}^{n-1} \Gamma(z+\frac{k}{n}) = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} n^{\frac{1}{2}-nz}\,\Gamma(nz).$$

Pro obecnější funkci $F(z)$ definovanou rovnicí (18′) pak platí

$$(48)\qquad \prod_{k=0}^{n-1} F(z+\frac{k}{n}) = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} n^{\frac{1}{2}-nz}$$

$$.\,e^{-(n-1)a+b\left[\gamma(nz)-\sum\limits_{k=0}^{n-1}\gamma(z+\frac{k}{n})\right]}\,.\,F(nz);$$

pro tento obecný případ nutno v rovnici (46′) položiti

$$\alpha = \frac{n-1}{2}\log 2\pi + \frac{1}{2}\log n - (n-1)\,a, \qquad \beta = b,$$

$$f(z) = \gamma(nz) - \sum_{k=0}^{n-1}\gamma(z+\frac{k}{n});$$

ježto $\gamma(z+1) - \gamma(z) = \frac{2r\pi i}{b}$, platí $f(z+\frac{1}{n}) - f(z) = 0$.

(Pokračování.)

Několik vztahů mezi koëfficienty rovnice $F(x) = x^n \mp a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} \mp \ldots \pm a_n = 0$ pro reálné a pro komplexní kořeny.

Napsal

Gustav Gruss,

professor české university v Praze.

Z rovnice

$$(A)\qquad f(x) = (x \mp \lambda)^n = x^n \mp n\lambda x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\lambda^2 x^{n-2}$$

$$\mp \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\lambda^3 x^{n-3} + \ldots$$

E. Weyr, Vyčíslení nekonečných součinů o racionálných členech pomocí funkce Γ. (Časopis pro pěst. mathem. a fys., R. XXII, pag. 161—178.).

M. Lerch, Theorie funkce Gamma. (Věstník české Akademie, R. II., 1893, pag. 244—246.).

Dr. R. Fricke, Analytisch funktionentheoretische Vorlesungen, pag. 162—168. Leipzig 1900.