Miloš Kössler

Součet řady Lambertovy a počet dělitelů celistvého čísla

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 45 (1916), No. 2-3, 178–188

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108963

Součet řady Lambertovy a počet dělitelů celistvého čísla.

Napsal **Miloš Kössler.**

Lambertova řada

$$L(z) = \frac{z}{1-z} + \frac{z^2}{1-z^2} + \frac{z^3}{1-z^3} + \dots \tag{1}$$

obdrží rozvinutím jednotlivých sčítanců v řady geometrické a srovnáním podle mocnin čísla z tvar řady mocninné

$$L(z) = \Theta(1)z + \Theta(2)z^2 + \Theta(3)z^3 + \dots + \Theta(n)z^n + \dots, \tag{1a}$$
$$|z| < 1,$$

kdež $\Theta(n)$ značí počet dělitelů celistvého čísla n.*)

Pojednání toto obsahuje odvození vzorců:

$$\begin{aligned} L(z) &= \frac{z}{2(1-z)} + \frac{\log(1-z)}{\log z} \\ &\quad - 2z \int_0^\infty \frac{\sin(t \log z)\, dt}{(e^{2\pi t}-1)(1-2z\cos(t\log z)+z^2)}, \end{aligned} \tag{2}$$
$$0 \leq z < 1.$$

$$\begin{aligned} \Theta(n) &= 2\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{[\sqrt{n}]}\right) - \{1\} \\ &+ \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{dx \sin 2x}{x}\left(\sin\frac{x}{1} + \sin\frac{x}{2} + \dots + \sin\frac{x}{[\sqrt{n}]}\right) \\ &\times\left(\cot g\frac{x}{2n+1} - \cot g\frac{x}{2n-1} - \frac{2}{x}\right), \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} &\Theta(1) + \Theta(2) + \Theta(3) + \dots + \Theta(n) \\ &= (2n+1)\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{[\sqrt{n}]}\right) - [\sqrt{n}].\left([\sqrt{n}]+1\right) \\ &+ \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{dx \sin 2x}{x}\left(\sin\frac{x}{1} + \sin\frac{x}{2} + \dots + \sin\frac{x}{[\sqrt{n}]}\right) \\ &\times\left(\cot g\frac{x}{2n+1} - \frac{2n+1}{x}\right). \end{aligned} \tag{4}$$

*) Na př. $\Theta(1) = 1$, $\Theta(2) = 2$, $\Theta(3) = 2$, $\Theta(4) = 3$, $\Theta(5) = 2$, a t. d. Pro prvočíslo p jest vždy $\Theta(p) = 2$, pro číslo složené $\Theta(k) > 2$.

Symbolem $[\xi]$ značíme Gaussovu funkci $E(\xi)$, to jest takové číslo celistvé, pro které platí

$$\xi - 1 < [\xi] \leqq \xi.$$

Ve vzorci (3) odčítá se jednotka na pravé straně uzavřená ve vlnité závorce $\{1\}$ jen tenkráte, když n jest úplný čtverec; jinak odpadá.

Formule (2), (3), (4) tvoří řešení problemů, o něž již dlouho se usiluje z důvodů číselné theorie. Byla totiž domněnka, že odvozením součtového vzorce pro řadu Lambertovu umožněno bude sestrojení ukončené formule pro $\Theta(n)$. Od této formule pak bylo opět očekáváno hlubší seznání prvočísel, protože pro tato právě má $\Theta(n)$ nejmenší hodnotu.

Přesvědčíme se však, že žádná z těchto domněnek není správnou. Součtový vzorec (2) pro řadu Lambertovu jednak nevede k jednoduché formuli pro $\Theta(n)$ a za druhé i taková jednoduchá formule (3), kterou odvodíme nezávisle na řadě Lambertově, neumožní nám praktické poznání prvočísel. Nechceme ovšem tvrditi, že pro $\Theta(n)$ není možno sestrojiti ještě jednodušší vzorec nežli jest (3); dospěli bychom k němu, kdyby se podařilo vyčísliti integrál na pravé straně rovnice (3) v jednoduché a uzavřené formě. Autor se o to marně pokoušel a byl by velmi vděčen za každý pokyn v tomto směru.

---

1. Součtový vzorec (2) pro řadu Lambertovu (1) odvodíme tím způsobem, že jednotlivé sčítance řady (1) vyjádříme omezenými integrály, které potom snadno se dají sloučiti v integrál jediný. Všude v dalším budeme předpokládati, že argument z v řadě (1) má reálnou hodnotu uzavřenou v mezích $0 \leqq z < 1$.

Ze známého rozvoje

$$\frac{1}{1-e^x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{x} - 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{(2k\pi)^2 + x^2}$$

vyplývá násobením obou stran rovnice e^x

$$\frac{e^x}{1-e^x} = \frac{e^x}{2} - \frac{e^x}{x} - 2e^x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{(2k\pi)^2 + x^2}.$$

Užijeme-li nyní vzorce

$$\int_0^\infty e^{-\alpha t} \sin \beta t \, dt = \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2},$$

platného pro každé reálné β a pro reálné a kladné α na zlomek $\frac{x}{(2k\pi)^2 + x^2}$, obdržíme

$$\frac{x}{(2k\pi)^2 + x^2} = \int_0^\infty e^{-2k\pi t} \sin xt \, dx.$$

Z toho vyplývá dále sečtením geometrické řady za integračním znamením

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x}{(2k\pi)^2 + x^2} = \int_0^\infty \frac{\sin xt \, dt}{e^{2\pi t} - 1} - \int_0^\infty \frac{e^{-2\pi n t} \sin xt \, dt}{e^{2\pi t} - 1}.$$

Konverguje-li n k nekonečnému, vypadne druhý integrál na pravé straně, takže

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{(2k\pi)^2 + x^2} = \int_0^\infty \frac{\sin xt \, dt}{e^{2\pi t} - 1},$$

čili

$$\frac{e^x}{1 - e^x} = \frac{e^x}{2} - \frac{e^x}{x} - 2e^x \int_0^\infty \frac{\sin xt \, dt}{e^{2\pi t} - 1}.$$

Podle předpokladů platí tato rovnice pro každé reálné x; tedy také pro $x = \log z^p$, kdež $0 \leq z < 1$ a p jest celistvé kladné číslo. Jest tedy

$$\frac{z^p}{1 - z^p} = \frac{z^p}{2} - \frac{z^p}{p \log z} - 2 \int_0^\infty \frac{z^p \sin (t\, p \log z) \, dt}{e^{2\pi t} - 1}. \tag{5}$$

Dosadíme-li sem postupně $p = 1, 2, 3,$ a t. d. a zavedeme-li vzniklé výrazy do Lambertovy řady (1), obdržíme

$$L(z) = \frac{z}{2(1 - z)} - \frac{1}{\log z} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{z^p}{p} - 2 \int_0^\infty \frac{dt}{e^{2\pi t} - 1} \cdot \sum_{p=1}^{\infty} z^p \sin p (t \log z).$$

Obě řady na pravé straně rovnice dají se sečísti, neboť

$$-\sum_{p=1}^{\infty} \frac{z^p}{p} = \log (1 - z),$$

$$\sum_{p=1}^{\infty} z^p \sin p\,(t \log z) = \frac{z \sin (t \log z)}{1 - 2z \cos (t \log z) + z^2}.\text{*)}$$

*) Podle vzorce

$$\frac{x \sin \varphi}{1 - 2x \cos \varphi + x^2} = \sum_{p=1}^{\infty} x^p \sin p\,\varphi$$

platného pro $0 \leq x < 1$.

Přesnějším by bylo, kdybychom vzali jen součty $\sum\limits_{p=1}^{n}$ a připojili zbytek R_n. Ukázalo by se však opět, že $\lim\limits_{n=\infty} R_n = 0$, takže platí přesně

$$L(z) = \frac{z}{2(1-z)} + \frac{\log(1-z)}{\log z} - 2z\int\limits_0^\infty \frac{\sin(t \log z)\, dt}{(e^{2\pi t}-1)(1-2z\cos(t\log z)+z^2)},$$

což jest vzorec (2). K témuž výsledku bychom dospěli užívajíce summačního vzorce Plana-Abel-Cauchyova

$$\sum_{p=m}^{\infty} f(p) = \frac{1}{2} f(m) + \int\limits_m^\infty f(t)\, dt + i\int\limits_0^\infty \frac{f(m+it) - f(m-it)}{e^{2\pi t}-1} dt,$$

přímo na funkci

$$f(p) = \frac{z^p}{1-z^p}.$$

Postup, který jsme zde zvolili, jest jednodušší a vystihuje lépe podstatu summace.

Jak už v úvodu bylo naznačeno, nehodí se vzorec (2) k odvození formule pro $\Theta(n)$. Jest totiž patrně

$$\Theta(n) = \left[\frac{d^n L(z)}{dz^n}\right]_{z=0},$$

z čehož plyne, že bychom museli znáti n-tou derivaci $L(z)$, abychom $\Theta(n)$ mohli analytickým vzorcem vyjádřiti. Z formule (2) však k jednoduchému vzorci pro tuto n-tou derivaci nedospějeme.

Je-li z velmi blízko jedničce, dává po jednoduché úvaze vzorec (2)

$$L(z) = \frac{z}{2(1-z)} + \frac{\log(1-z)}{\log z} + \frac{1}{\log\left(\frac{1}{z}\right)}\left(C - \frac{1}{2}\right)$$
$$+ \log\left(\frac{1}{z}\right) . \text{ konečné číslo,}$$

kdež C značí Eulerovu konstantu. Pro týž případ udává

Schlömilch*) zdánlivě jiný vzorec:

$$L(z) = \frac{C - \log\log\frac{1}{z}}{\log\frac{1}{z}} + \frac{1}{4} + \log\frac{1}{z}\ .\ \text{konečné číslo.}$$

Správnost obou vzorců vyplývá z rovnice

$$\lim_{x=1}\left[\frac{x}{2(1-x)} + \frac{\log(1-x)}{\log x} - \frac{\frac{1}{2} - \log\log\frac{1}{x}}{\log\frac{1}{x}}\right] = \frac{1}{4},$$

která snadno se dokáže, uvážíme-li, že

$$\log x = \log[1-(1-x)] = -\left[\frac{1-x}{1} + \frac{(1-x)^2}{2} + \frac{(1-x)^3}{3} + \ldots\right]$$

a tedy

$$\log\log\frac{1}{x} = \log(-\log x) = \log\left[(1-x)\left(1 + \frac{1-x}{2} + \frac{(1-x)^2}{3} + \ldots\right)\right].$$

2. Sečtení Lambertovy řady vzorcem (2) nám neumožnilo výpočet analytického vzorce pro $\Theta(n)$. Musíme tedy hledati jinou cestu.

Budiž a reálné, jinak libovolné číslo. Pak platí známé vztahy:

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin a x}{x}\,dx &= 1 \quad \text{pro } a > 0, \\ &= -1 \quad \text{„} \quad a < 0, \\ &= 0 \quad \text{„} \quad a = 0. \end{aligned}$$

Utvoříme-li rozdíl

$$R_k = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\left[\frac{\sin(k+\xi)x}{x} - \frac{\sin(k-\xi)x}{x}\right]dx,$$

kdež k jest celistvé kladné číslo, ξ reálné kladné číslo, bude podle hořejšího

$$\begin{aligned} R_k &= 1 \quad \text{pro } k < \xi, \\ R_k &= 0 \quad \text{„} \quad k > \xi, \\ R_k &= \frac{1}{2} \quad \text{„} \quad k = \xi. \end{aligned}$$

*) Liouville-ův Journal 1863. p. 101.

Z toho vyplývá pro každé ξ, které *není* číslo celistvé,

$$[\xi] = \sum_{k=1}^{k=N} R_k,$$

kdež jinak libovolné celistvé číslo $N > \xi$ a symbol $[\xi]$ značí, jak už v úvodu jsme vyložili, Gaussovu funkci $E(\xi)$. Rozvedeme-li ve výrazu pro R_k $\sin(k\,x \pm x\,\xi) = \sin k\,x \cos \xi\,x \pm \cos k\,x \sin \xi\,x$, obdržíme

$$[\xi] = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{N} \int_0^\infty \frac{2 \cos k\,x \sin \xi\,x\,dx}{x}.$$

Sem dosadíme

$$2(\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \ldots + \cos Nx) = \frac{\sin \frac{(2N+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} - 1,$$

čímž získáme formuli

$$[\xi] = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin\left(N + \frac{1}{2}\right)x \,.\, \sin \xi\,x}{x \sin \frac{x}{2}}\,dx - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin \xi\,x}{x}\,dx,$$

která se promění rozvedením $\sin\left(N x + \frac{x}{2}\right) = \sin N x \cos \frac{x}{2} + \cos N\,x \sin \frac{x}{2}$ na

$$[\xi] + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin \xi\,x}{x}\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin N x \sin \xi\,x \cot g \frac{x}{2}}{x}\,dx + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos N\,x \sin \xi\,x\,dx}{x}.$$

Podle základních vzorců jest zde

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin \xi\,x}{x}\,dx = \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos N x \sin \xi x\,dx}{x} = \frac{1}{2} R_N = 0.$$

Do zbývajícího integrálu zavedeme novou integrační proměnnou vzorcem

$$x = \frac{2x_1}{N},$$

čímž obdržíme konečně po vynechání indexu při x_1 vzorec

$$[\xi] + \frac{1}{2} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty cotg\,\frac{x}{N} \cdot \frac{\sin 2x \cdot \sin \frac{2\xi x}{N}}{x}\, dx, \tag{6}$$

který jest vázán na dvě podmínky, že totiž předně reálné a kladné číslo ξ není celistvé a za druhé, že celistvé číslo $N > \xi$.*) Obě tyto podmínky jsou splněny, položíme-li na př.

$$\xi = \frac{2n \pm 1}{2p}, \quad N = 2n \pm 1,$$

kdež n a p jsou celistvá kladná čísla $\geqq 1$; při tom platí současně buď jen hořejší neb jen dolejší znaménka. Jest tedy

$$\left[\frac{2n \pm 1}{2p}\right] + \frac{1}{2} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty cotg\,\frac{x}{2n \pm 1} \cdot \frac{\sin 2x \cdot \sin \frac{x}{p}}{x}\, dx. \tag{7}$$

O rozdílu

$$J(n, p) = \left[\frac{2n + 1}{2p}\right] - \left[\frac{2n - 1}{2p}\right] \tag{8a}$$

dokážeme si větu:

$$\left.\begin{array}{l} J(n, p) = 1, \text{ je-li } n \text{ dělitelno číslem } p \\ J(n, p) = 0, \text{ není-li } n \quad „ \quad „ \quad p \end{array}\right\} \tag{8}$$

Předně budiž n dělitelno číslem p. Pak jest

$$\left[\frac{2n + 1}{2p}\right] = \left[\frac{n}{p} + \frac{1}{2p}\right] = \frac{n}{p},$$

$$\left[\frac{2n - 1}{2p}\right] = \left[\frac{n}{p} - \frac{1}{2p}\right] = \frac{n}{p} - 1$$

a tedy $J(n, p) = 1$. Tím jest dokázána první část věty (8).

---

*) Rozvineme-li v integrálu (6) kontangentu podle vzorce

$$\pi\, cotg\, \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{s=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s + z} + \frac{1}{s - z}\right)$$

a provedeme-li pak integraci jednotlivých členů, obdržíme známou formuli

$$[\xi] + \frac{1}{2} = \xi + \frac{1}{\pi}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\sin 2\pi s \xi}{s},$$

čímž jest správnost rovnice (6) potvrzena.

Za druhé nechť není n dělitelno číslem p. Označme

$$\left[\frac{n}{p}\right] = t,$$

z čehož plyne

$$\frac{n}{p} = t + \frac{r}{p},$$

kdež $1 \leqq r < p$.

Největší hodnota, kterou r může nabýti, jest $p - 1$. Jest tedy

$$\left[\frac{2n+1}{2p}\right] = \left[\frac{n}{p} + \frac{1}{2p}\right] = \left[t + \frac{2r+1}{2p}\right].$$

Zlomek $\frac{2r+1}{2p}$ nabývá největší hodnoty při $r = p - 1$; jest tedy $0 < \frac{2r+1}{2p} \leqq \frac{2p-1}{2p} < 1$. Z toho plyne $\left[\frac{2n+1}{2p}\right] = t$.

Podobně platí

$$\left[\frac{2n-1}{2p}\right] = \left[t + \frac{2r-1}{2p}\right] = t,$$

čímž jest dokázána i druhá část věty (8).

Kombinací vzorce (8a) a (7) obdržíme

$$J(n, p) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left\{cotg \frac{x}{2n+1} - cotg \frac{x}{2n-1}\right\} sin \frac{x}{p} \,.\, sin\, 2x \,.\, \frac{dx}{x}, \quad (9)$$

což nám konečně umožní odvoditi analytický výraz pro $\Theta(n)$, značící počet dělitelů celistvého čísla n. Podle věty (8) obsahuje totiž součet $\sum\limits_{p=1}^{p=N} J(n, p)$ tolik jednotek, kolik existuje celistvých čísel p, obsažených beze zbytku v čísle n a při tom menších nebo rovných celistvému číslu N. Zvolíme-li tedy $N \geqq n$, bude

$$\sum_{p=1}^{N} J(n, p) = \Theta(n),$$

což spojeno s vzorcem (9) poskytuje

$$\Theta(n) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{dx\, sin\, 2x}{x}\left(sin \frac{x}{1} + sin \frac{x}{2} + sin \frac{x}{3} + \ldots + sin \frac{x}{N}\right)$$
$$\times \left(cotg \frac{x}{2n+1} - cotg \frac{x}{2n-1}\right). \quad (10)$$

Jestliže v druhé závorce za integračním znamením odečteme a přičteme číslo $\frac{2}{x}$, obdržíme

$$\Theta(n) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{dx \sin 2x}{x^2}\left(\sin\frac{x}{1} + \sin\frac{x}{2} + \ldots + \sin\frac{x}{N}\right)$$
$$+ \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{dx \sin 2x}{x}\left(\sin\frac{x}{1} + \sin\frac{x}{2} + \ldots + \sin\frac{x}{N}\right)$$
$$\times\left(\cotg\frac{x}{2n+1} - \cotg\frac{x}{2n-1} - \frac{2}{x}\right).$$

To však dá se pomocí známé hodnoty integrálu

$$2.\int_0^\infty \frac{\sin 2x \sin \frac{x}{p}}{x^2}\, dx = \frac{\pi}{p}$$

psáti ve tvaru

$$\Theta(n) = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{N}$$
$$+ \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{dx \sin 2x}{x}\left(\sin\frac{x}{1} + \sin\frac{x}{2} + \ldots + \sin\frac{x}{N}\right)$$
$$\times\left(\cotg\frac{x}{2n+1} - \cotg\frac{x}{2n-1} - \frac{2}{x}\right). \qquad (11)$$

Nejmenší hodnota pro celistvé a jinak libovolné číslo N jest zde n. Ještě menšího počtu sčítanců docílíme jinou summací funkce $J(n, p)$ nežli jest ona, kterou jsme provedli při odvození vzorce (10).

Podle věty (8) udává součet

$$\sum_{p=1}^{p=[\sqrt{n}]} J(n, p)$$

počet dělitelů čísla n, které nejsou větší než $\sqrt{n}$, to jest, jak známo, buď $\frac{1}{2}\Theta(n)$ nebo $\frac{1}{2}\Theta(n) + \frac{1}{2}$ podle toho, není-li či je-li n úplný čtverec.

Z toho vyplývá, použijeme-li opět vzorce (9)

$$\frac{1}{2}\,\Theta(n)+\left\{\frac{1}{2}\right\}=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{dx\sin 2x}{x}\left(\sin\frac{x}{1}+\ldots+\sin\frac{x}{[\sqrt{n}]}\right)$$
$$\times\left(\operatorname{cotg}\frac{x}{2n+1}-\operatorname{cotg}\frac{x}{2n-1}\right),$$

kdež $\frac{1}{2}$ ve vlnité závorce se přičítá jen v tom případě, že n jest úplný čtverec.

Týmž postupem, kterým se vzorce (10) jsme dospěli ku vzorci (11) obdržíme zde konečně

$$\Theta(n)=2\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{[\sqrt{n}]}\right)-\{1\}$$
$$+\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{dx\sin 2x}{x}\left(\sin\frac{x}{1}+\sin\frac{x}{2}+\ldots+\sin\frac{x}{[\sqrt{n}]}\right)$$
$$\times\left(\operatorname{cotg}\frac{x}{2n+1}-\operatorname{cotg}\frac{x}{2n-1}-\frac{2}{x}\right),\qquad(12)$$

což jest vzorec (3).

Odvodíme ku konci ještě analytický vzorec pro součet $\sum_{k=}^{n}\Theta(k)$. Do známé rovnice*)

$$\Theta(1)+\Theta(2)+\ldots+\Theta(n)=2\sum_{p=1}^{[\sqrt{n}]}\left[\frac{n}{p}\right]-([\sqrt{n}])^2$$

dosadíme

$$\left[\frac{n}{p}\right]=\left[\frac{2n+1}{2p}\right],$$

což vyplývá z úvahy, předcházející vzorci (9). Jest tedy

$$\sum_{k=1}^{n}\Theta(k)=2\sum_{p=1}^{\nu}\frac{2n+1}{2p}-\nu^2+2\sum_{p=1}^{\nu}\left(\left[\frac{2n+1}{2p}\right]-\frac{2n+1}{2p}\right),$$

kdež značí $\nu=[\sqrt{n}]$.

V druhém součtu na pravé straně použijeme jednak vzorce (7) a za druhé rovnice

$$\frac{2n+1}{2p}=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{(2n+1)}{x}\,\frac{\sin 2x\,.\,\sin\dfrac{x}{p}}{x}\,dx,$$

*) Viz na př. E. Cesàro: Element. Lehrb. der algeb. Analysis. Teubner 1904. p. 277.—278.

vyplývající z formule udané těsně před vzorcem (11). Jest tedy

$$\sum_{k=1}^{n} \Theta(k) = 2 \sum_{p=1}^{\nu} \frac{2n+1}{2p} - \nu^2$$

$$-2 \sum_{p=1}^{\nu} \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left(cotg \frac{x}{2n+1} - \frac{2n+1}{x} \right) \frac{sin\, 2x\, sin \frac{x}{p}}{x} dx \right\}$$

čili

$$\Theta(1) + \Theta(2) + \ldots + \Theta(n)$$

$$= (2n+1)\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{[\sqrt{n}]} \right) - [\sqrt{n}] \cdot \left([\sqrt{n}] + 1 \right)$$

$$+ \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{dx\, sin\, 2x}{x} \left(sin \frac{x}{1} + sin \frac{x}{2} + \ldots + sin \frac{x}{[\sqrt{n}]} \right) \tag{13}$$

$$\times \left(cotg \frac{x}{2n+1} - \frac{2n+1}{x} \right).$$

Tím jest dokázán také v úvodu vytčený vzorec (4).

Tamtéž bylo řečeno, že by bylo žádoucí vyčísliti integrál na pravé straně rovnice (12) nebo (13). Věc ta není nemožnou, jak vyplývá z následující úvahy. Odvození obou jmenovaných vzorců jest založeno na funkci $J(n, p)$, definované rovnicemi (8) a realisované integrálem (9). Místo tohoto integrálu můžeme užíti také výrazu

$$J(n, p) = \frac{1}{p} + \frac{2}{p} \sum_{k=1}^{k<\frac{p}{2}} cos \frac{2k\pi n}{p} + \left\{ \frac{1}{p} cos\, \pi\, n \right\}, \tag{14}$$

kdež vlnitá závorka na pravé straně se přičítá jen při *sudém n*. Jest tedy na př.

$$J(n, 5) = \frac{1}{5} + \frac{2}{5} cos \frac{2\pi n}{5} + \frac{2}{5} cos \frac{4\pi n}{5},$$

$$J(n, 8) = \frac{1}{8} + \frac{2}{8} cos \frac{2\pi n}{8} + \frac{2}{8} cos \frac{4\pi n}{8}$$

$$+ \frac{2}{8} cos \frac{6\pi n}{8} + \frac{1}{8} cos\, \pi\, n \text{ atd.}$$

Důkaz formule (14) prozatím neuvádím, protože vede k velmi málo přehledným vzorcům pro $\Theta(n)$ nebo $\sum_{k=1}^{n} \Theta(k)$, které však už neobsahují integrálů. Tím jest dokázáno, že integrály (12) nebo (13) dají se vyčísliti. Další práce musí tedy směřovati k vyhledání nejjednoduššího tvaru takového vyčíslení.