Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Jiří Klapka

O Wilczynského hlavní ploše fleknodální kongruence a o zobecnění věty Sullivanovy

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 58 (1929), No. 1-2, 10--15

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108939

O Wilczynského hlavní ploše fleknodální kongruence a o zobecnění*) věty Sullivanovy.

Napsal *Jiří Klapka.*

O *Wilczynskim* zavedené[1]) hlavní ploše fleknodální kongruence bylo jeho školou málo řečeno. Lze to vysvětliti značnou složitostí formulí, jež ve *Wilczynského* teorii ploch zborcených vyjadřují i zcela jednoduché vztahy geometrické.

Míním proto v tomto článku zodpověděti některé otázky, týkající se této plochy, a kromě toho dokázati větu, jejímž zvláštním případem jest známý[2]) teorém *Sullivanův.* Při tom použiji nové teorie ploch zborcených, pocházející od *E. Čecha.*

*

1. Zborcené ploše R s různými fleknodálními čarami C_y a C_z nechť přísluší systém tvaru[3])

$$\left.\begin{aligned} y'' &= 2my' + 2\delta n z' + (m' + \delta n^2 - m^2 - 1 - j)\, y + \delta n' z \\ z'' &= -2ny' - 2mz' - n'y + (\delta n^2 - m' - m^2 + 1 - j)\, z, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

$$\text{kde } \delta^2 = 1.$$

Tyto rovnice lze též psáti ve tvaru

$$\left.\begin{aligned} y' &= my + \delta n z + \dot y & \dot y' &= m\dot y + \delta n \dot z - (1 + j)\, y \\ z' &= -ny - mz + \dot z & \dot z' &= -n\dot y - m\dot z + (1 - j)\, z \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

při čemž přímky $(y\dot y)$, $(z\dot z)$ jsou fleknodální tečny a $(\dot y\dot z)$ jest hlavní přímka t. j. tvořící přímka hlavní plochy R_1 fleknodální kongruence příslušné k R. Platí dále

$$\left.\begin{aligned} \dot y'' = \left(2m + \frac{j'}{1+j}\right)\dot y' - 2\delta n \frac{j}{1-j}\, \dot z' + \Big(m' - m\,\frac{j'}{1+j} - m^2 - \\ - \delta n^2 \frac{1+j}{1-j} - 1 - j\Big)\, \dot y + \delta\left(n' - n\,\frac{j'}{1+j} - 2nm\,\frac{1}{1-j}\right) \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

---

*) Uvedené zobecnění jest jiného druhu než uveřejnil p. *Octave Mayer v Journal scient. de l'Académie de Jassy* během tisku tohoto článku.

[1]) Viz Project. dif. geometry of curves and ruled surf. p. 216.

[2]) *Fubini-Čech,* Geometria proiettiva differenziale I. p. 229.

[3]) Tamtéž p. 229.

$$\left.\begin{aligned}\dot z'' = &-2n\frac{j}{1+j}\dot y' - \left(2m+\frac{j'}{1-j}\right)\dot z' - \left(n' + 2nm\frac{1}{1+j} + \right.\\ &\left. + n\frac{j'}{1-j}\right)\dot y - \left(m' + m\frac{j'}{1-j} + m^2 + \delta n^2\frac{1-j}{1+j} - 1 + j\right)\dot z\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

a
$$(\dot y\dot z\dot y'\dot z') = (j^2-1)\omega,$$
kde
$$\omega = (yzy'z') = \pm 1. \quad (4)$$

Odtud je zejména patrno, že R_1 je rozvinutelná, když
$$j^2 = 1$$
(u *Wilczynského* $\Theta^2_{4.1} - 64\,\Theta^5_4 = 0$!).

Vylučujíce tento případ, klaďme
$$\dot y = y_1\sqrt[4]{j^2-1}\quad , \quad \dot z = z_1\sqrt[4]{j^2-1}, \quad (5)$$
takže jest též
$$(y_1 z_1 y'_1 z'_1) = \omega. \quad (6)$$

Vložíme-li (5) do (3), obdržíme systém

$$\left.\begin{aligned} y''_1 = &\left(2m - \frac{j'}{j^2-1}\right)y'_1 - \frac{2\delta nj}{1-j}z'_1 + \left(m' - \frac{mj'}{1+j} - m^2 - \right.\\ &-\delta n^2\frac{1+j}{1-j} - 1 - j - \frac{1}{2}\,\frac{j'^2 + jj'' - 2mjj'}{j^2-1} + \frac{3}{4}\,\frac{j^2j'^2}{(j^2-1)^2} + \\ &\left. + \frac{1}{2}\,\frac{jj'^2}{(j^2-1)(j+1)}\right)y_1 + \delta\left(n' - \frac{nj'}{1+j} - \frac{2nm}{1+j} - \frac{nj^2j'}{(j^2-1)(1-j)}\right)z_1 \\ z''_1 = &-\frac{2nj}{1+j}y'_1 - \left(2m - \frac{j'}{j^2-1}\right)z'_1 - \left(n' + \frac{nj'}{1-j} + \frac{2mn}{1+j} + \right.\\ &\left. + \frac{nj^2j'}{(j^2-1)(1+j)}\right)y_1 + \left(-m' - \frac{mj'}{1-j} - m^2 - \delta n^2\frac{1-j}{1+j} + \right.\\ &\left. + 1 - j - \frac{1}{2}\,\frac{j'^2 + jj'' + 2mjj'}{j^2-1} + \frac{3}{4}\,\frac{j^2j'^2}{(j^2-1)^2} - \frac{1}{2}\,\frac{jj'^2}{(j^2-1)(1-j)}\right)z_1.\end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Srovnáme-li systém (7) se systémem (11) na str. 186 citovaného díla *Fubini-Čechova*, obdržíme:

$$\left.\begin{aligned} &a = -\frac{\delta nj}{1-j},\quad b = \frac{1}{2}\,\frac{j'}{j^2-1} - m,\quad c = \frac{nj}{1+j} \\ &\delta A = n' - \frac{nj'}{1+j} + \frac{nj' + n'j - 2mn}{1-j} - \frac{nj^2j'}{(j^2-1)(1-j)} + \frac{njj'}{(1-j)^2} \\ &2B = 2 - \frac{4\delta n^2 j - j''}{j^2-1} + \frac{3jj'^2}{(j^2-1)^2} \\ &C = n' + \frac{nj'}{1-j} - \frac{nj' + n'j - 2mn}{1+j} + \frac{nj^2j'}{(j^2-1)(1+j)} + \frac{njj'}{(1+j)^2}.\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Hlavní plocha R_1 jest tudíž proťata fokálními plochami fleknodální kongruence, příslušné k R, ve svých čarách fleknodálních, je-li

$$A = C = 0,$$

či

$$\delta A - C = -\frac{2}{1-j^2}\left(2mn - n'j + 3\frac{nj^2j'}{j^2-1}\right) = 0 \tag{9a}$$

a

$$\frac{\delta A}{1+j} + \frac{C}{1-j} = \frac{2}{1-j^2}\left(n' + 3\frac{njj'}{1-j^2}\right) = 0. \tag{9b}$$

Z těchto rovnic vyplývá

$$m = 0, \quad n = K\,.\,(j^2-1)^{\frac{3}{2}}, \quad (K = \text{konst. integr.})$$

a věta:

Jestliže hlavní křivky[4]) *jsou fleknodálními čarami hlavní plochy fleknodální kongruence, příslušné k zborcené plvše R, pak R náleží lineárnímu komplexu.*

K d y j e s t R_1 k v a d r i k a ?

Tehdy a jen tehdy, když ještě jest

$$B = 0,$$

t. j. podle (8), když

$$2 - \frac{4\delta n^2 j - j''}{j^2-1} + \frac{3jj'^2}{(j^2-1)^2} = 0. \tag{9c}$$

Položíme-li v (9c)

$$j' = \frac{dj}{dv} = p \text{ a tudíž i } j'' = p\,.\,\frac{dp}{dj},$$

pak rovnice (9c) přejde v

$$\frac{dp}{dj}\,.\,p - 3\frac{j}{j^2-1}\,.\,p^2 = 2(j^2-1) + 4\delta K^2 j (j^2-1)^3,$$

odkud

$$p^2 = (j^2-1)^3\left\{ln\frac{j+1}{j-1} + \frac{2j}{1-j^2} + 4\delta K^2 j^2 + K_1\right\},$$

kde též K_1 jest konstanta integrační. Lze tedy říci:

Existuje ∞^2 projektivně různých zborcených osnov R, pro něž hlavní plocha fleknodální kongruence jest kvadrika. Každá z těchto osnov jest obsažena v lineárním komplexu ($m = 0$) a kromě toho platí

$$\left.\begin{aligned} n &= K\,.\,(j^2-1)^{\frac{3}{2}} \\ v &= \int\frac{dj}{(j^2-1)^{\frac{3}{2}}\sqrt{ln\frac{j+1}{j-1} + \frac{2j}{1-j^2} + 4\delta K^2 j^2 + K_1}} \end{aligned}\right\}, \tag{10}$$

kde K a K_1 jsou konstanty integrační.

---

[4]) Wilczynski l. c. p. 216.

2. Na obecné zborcené ploše R existuje systém Σ čar, jejž je možno definovati takto: nechť každá čára ze Σ spolu s třemi z 6 čar fleknodálních, komplexových a harmonických, seče tvořící přímky plochy R v bodových čtveřicích stálého dvojpoměru.

Je-li opět (1) k R příslušný systém rovnic diferenciálních, pak křivky systému Σ jsou opsány body

$$c_1 y + c_2 z,$$

kde poměr $c_1 : c_2$ nezávisí na v. Větu *Sullivanovu* lze pak vysloviti takto: Jsou-li fleknodální čáry zborcené plochy rovinné, pak všechny čáry systému Σ jsou rovinné a jejich roviny náležejí jednomu svazku.

Chci v dalším zodpověděti tuto otázku:

V jakém vztahu musí býti 2 křivky systému Σ

$$C_{c_1 y + c_2 z}, \quad C_{\bar{c}_1 y + \bar{c}_2 z}, \tag{11}$$

aby všechny křivky ze Σ byly rovinné, jsou-li tyto 2 rovinné?

Odpověď, v níž jest zřejmě věta *Sullivanova*[5]) zahrnuta, zní: *Jestliže 2 křivky systému Σ, oddělující harmonicky pár křivek harmonických, jsou rovinné, pak všechny čáry systému Σ jsou rovinné a jejich roviny náležejí jednomu svazku.*

Dříve než přistoupíme k důkazu, podotkněme, že harmonickými jsou křivky

$$C_{y + \sqrt{\delta} z}, \quad C_{y - \sqrt{\delta} z},$$

takže čáry (11) tyto oddělují harmonicky, je-li

$$c_1 \bar{c}_1 = \delta c_2 \bar{c}_2. \tag{12}$$

Naše tvrzení bude dokázáno, stane-li se zřejmým, že se anulují všecky koeficienty vzhledem k $c_1 : c_2$ bikvadratické formy

$$\varphi(c_1, c_2) = a_0 c_1^4 + a_1 c_1^3 c_2 + a_2 c_1^2 c_2^2 + a_3 c_1 c_2^3 + a_4 c_2^4 =$$
$$= (c_1 y + c_2 z,\ (c_1 y + c_2 z)',\ (c_1 y + c_2 z)'',\ (c_1 y + c_2 z)''')$$

[5]) Že obráceně rovinné komplexové křivky mají za následek rovinné fleknodální a i všechny ostatní čáry ze Σ, lze dokázati týmž způsobem, kterým *Čech* na str. 229 cit. díla dokazuje větu *Sullivanovu*. Stačí na místo systému (7*bis*) na téže str. vzíti systém (14) na str. 231, t. j. eliminujeme-li $\dot{y}$ a $\dot{z}$, systém

$$y'' = 2my' + 2nz' + (m' + n^2 - m^2 - j)\, y + (1 + n')\, z$$
$$z'' = -2nyz' - 2mz' - (1 + n')\, y + (n^2 - m' - m^2 - j)\, z.$$

Jsou-li pak C_y a C_z rovinné komplexové křivky, lze klásti opět $y_3 = 0$, $z_4 = 0$. Předchozí systém pak dává

$$2nz'_3 + (1 + n')\, z_3 = 0, \quad 2ny'_4 + (1 + n')\, y_4 = 0,$$

takže $z_3 : y_4 = \lambda =$ konstantě a křivka opsaná bodem $c_1 y + c_2 z$ leží v rovině

$$c_2 x_3 - \lambda c_1 x_4 = 0,$$

což bylo dokázati.

v důsledku relací, vyjadřujících, že křivky (11) jsou rovinné a rovnice (12).

Jest až na nenulový konstantní faktor

$$\left.\begin{aligned}
a_0 &= 2nn'' - 3n'^2 + 4n(2n - 2m'n + mn') + \\
&\qquad + 4n^2(m' + \delta n^2 - m^2 - 1 - j) \\
a_4 &= 2nn'' - 3n'^2 - 4mnn' + 4n^2(m' + \delta n^2 - m^2 - 1 - j) \\
\delta a_1 &= \left(\frac{3}{2} + \frac{m}{n}\right)(a_4 - a_0) - 2\frac{m}{n}(a_0 + a_4) - \frac{1}{2}\left(\frac{a_4 - a_0}{n}\right)' \\
a_2 &= \frac{n - 3mn' - 3nm'}{2n^3}(a_4 - a_0) + \left(\delta + 2\frac{m^2}{n^2}\right)(a_0 + a_4) + \frac{m}{n}\left(\frac{a_4 - a_0}{n}\right)' \\
a_3 &= \left(\frac{3}{2} - \frac{m}{n}\right)(a_4 - a_0) - 2\frac{m}{n}(a_0 + a_4) - \frac{1}{2}\left(\frac{a_4 - a_0}{n}\right)'.
\end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Klademe-li

$$a_0 + a_4 = U, \quad \frac{a_4 - a_0}{n} = V,$$

jest možno psáti

$$\varphi(c_1, c_2) = \varphi_1(c_1, c_2).\, U + \varphi_2(c_1, c_2).\, V + \varphi_3(c_1, c_2).\, V', \qquad (14)$$

kde

$$\left.\begin{aligned}
\varphi_1(c_1, c_2) &= \frac{1}{2}\left(\delta c_1^2 - 2\frac{m}{n}c_1 c_2 + c_2^2\right)^2 \\
\varphi_2(c_1, c_2) &= -n\left[\frac{1}{2}c_1^4 - \delta\left(\frac{3}{2} + \frac{m}{n}\right)c_1^3 c_2 + \right. \\
&\qquad \left. + \frac{3mn' + 3nm' - n}{2n^3} \cdot c_1^2 c_2^2 - \left(\frac{3}{2} - \frac{m}{n}\right)c_1 c_2^3 - \frac{1}{2}c_2^4\right] \\
\varphi_3(c_1, c_2) &= -\frac{1}{2}c_1 c_2\left(\delta c_1^2 - 2\frac{m}{n}c_1 c_2 + c_2^2\right).
\end{aligned}\right\} \quad (15)$$

Křivky (11) jsou rovinné, je-li

$$\varphi(c_1, c_2) = \varphi(\bar{c}_1, \bar{c}_2) = 0, \qquad (16)$$

odkud vyplývá

$$\left.\begin{aligned}
&V'.\,[\varphi_1(\bar{c}_1, \bar{c}_2) \cdot \varphi_3(c_1, c_2) - \varphi_3(\bar{c}_1, \bar{c}_2) \cdot \varphi_1(c_1, c_2)] + \\
&+ V.\,[\varphi_1(\bar{c}_1, \bar{c}_2) \cdot \varphi_2(c_1, c_2) - \varphi_2(\bar{c}_1, \bar{c}_2) \cdot \varphi_1(c_1, c_2)] = 0.
\end{aligned}\right\} \quad (17)$$

Poslední rovnice připouští jediné řešení — a sice $V = 0$ — je-li

$$\varphi_1(\bar{c}_1, \bar{c}_2)\, \varphi_3(c_1, c_2) - \varphi_3(\bar{c}_1, \bar{c}_2) \cdot \varphi_1(c_1, c_2) = 0,$$

t. j., podle (15), je-li

$$\left(\delta c_1{}^2 - 2\frac{m}{n} c_1 c_2 + c_2{}^2\right)\left(\delta \bar{c}_1{}^2 - 2m\,\bar{c}_1\,\bar{c}_2 + \bar{c}_2{}^2\right).$$

$$.\left(c_1 \bar{c}_2 - c_2 \bar{c}_1\right)\left(c_1 \bar{c}_1 - \delta c_2 \bar{c}_2\right) = 0.$$

Jsou-li $c_1 : c_2$ a $\bar{c}_1 : \bar{c}_2$ dva různé konstantní poměry, jak předpokládáme, pak z prvních 3 faktorů posledního součinu žádný nemůže býti nulový a zbývá rovnice (12), jak bylo dokázati.

Vskutku, je-li (12) splněna, jest podle (17) a (16) $U = V = 0$ a tudíž i $a_0 = a_4 = 0$, načež podle (13) i $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ a rovnice

$$\varphi(c_1, c_2) = 0$$

jest splněna identicky.

Sur la surface principale de Wilczynski d'une congruence flecnodale et généralisation du théorème de Sullivan.

(Extrait de l'article précédent.)

Dans l'article précédent je trouve, en employant la théorie nouvelle de M. Čech, quelques théorèmes concernants les surfaces gauches.

Étant R une telle surface, R_1 la surface principale de la congruence flecnodale appartenant à R, L et M les courbes principales, tracées sur les surfaces focales de cette congruence, on peut énoncer les théorèmes suivants:

Si L et M sont les courbes flecnodales de R_1, *la surface R appartient à un complexe linéaire et il existe ∞^2 de surfaces réglées, différentes au point de vue projectif, dont la surface principale R_1 est une quadrique. Une telle R appartient aussi à un complexe linéaire* ($k = m = 0$) *et leurs invariants* (voir Fubini Čech: Geometria proiettiva differenziale I., p. 229) *sont liés par les relations* (10) *du texte tchèque.*

Les courbes du complexe, les courbes flecnodales et harmoniques appartiennent à un seul système Σ de courbes, dont les courbes possèdent la propriété de couper les génératrices de la surface R suivant des ponctuelles projectives. Σ étant ainsi défini, on peut énoncer cette généralisation du théorème de *Sullivan:*

Si deux courbes du Σ qui divisent harmoniquemant les courbes harmoniques sont planes, toutes les courbes du Σ sont planes et leurs plans appartiennent à un seul faisceau.