Jan Schuster

Projektivní zobecnění Snelliova úkolu

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 58 (1929), No. 1-2, 101--103

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108929

Projektivní zobecnění Snelliova úkolu.

Dr. Jan Schuster.

Snelliův úkol v euklidovské rovině formulován jako určení bodu jako průsečíku tří kruhových oblouků, z nichž každý se klene nade dvěma z daných tří bodů, a příslušné obvodové úhly se doplňují na 360^0.

Projektivní formulace by tedy byla následující: Dány tři základní body (1), (2), (3). Kruhovým bodům v nekonečnu nechť odpovídají další dva body (4) a (5).

Nad každými dvěma z prvních tří bodů a nad body (4) a (5) lze vésti kuželosečky dvojpoměrů $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tak, aby se navzájem proťaly v jednom bodě, a jest určiti jeho souřadnice.

Z toho ovšem plyne, že dělicí poměry nemohou být libovolné, nýbrž jsou vázány jistou relací, již hned udáme!

Poněvadž každá kuželosečka je dána čtyřmi body a dvojpoměrem, nabízí se užíti pro kuželosečky vyjádření jich jako členů svazků, určených páry přímek, při čemž hledanému bodu přisoudíme souřadnice bez indexu.

Píšeme-li rovnice kuželoseček ve tvaru

$$\left.\begin{aligned}
K_1 &\equiv \begin{vmatrix} x, & y, & z \\ x_2, & y_2, & z_2 \\ x_4, & y_4, & z_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x, & y, & z \\ x_3, & y_3, & z_3 \\ x_5, & y_5, & z_5 \end{vmatrix} + \lambda_1 \begin{vmatrix} x, & y, & z \\ x_3, & y_3, & z_3 \\ x_4, & y_4, & z_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x, & y, & z \\ x_2, & y_2, & z_2 \\ x_5, & y_5, & z_5 \end{vmatrix} = 0 \\
K_2 &\equiv \begin{vmatrix} x, & y, & z \\ x_3, & y_3, & z_3 \\ x_4, & y_4, & z_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x, & y, & z \\ x_1, & y_1, & z_1 \\ x_5, & y_5, & z_5 \end{vmatrix} + \lambda_2 \begin{vmatrix} x, & y, & z \\ x_1, & y_1, & z_1 \\ x_4, & y_4, & z_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x, & y, & z \\ x_3, & y_3, & z_3 \\ x_5, & y_5, & z_5 \end{vmatrix} = 0 \\
K_3 &\equiv \begin{vmatrix} x, & y, & z \\ x_1, & y_1, & z_1 \\ x_4, & y_4, & z_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x, & y, & z \\ x_2, & y_2, & z_2 \\ x_5, & y_5, & z_5 \end{vmatrix} + \lambda_3 \begin{vmatrix} x, & y, & z \\ x_2, & y_2, & z_2 \\ x_4, & y_4, & z_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x, & y, & z \\ x_1, & y_1, & z_1 \\ x_5, & y_5, & z_5 \end{vmatrix} = 0
\end{aligned}\right\}, \tag{1}$$

ukazují hned jako první důsledek, že mezi dvojpoměry platí:

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 + 1 = 0. \tag{2}$$

Souřadnice hledaného průsečíku plynou pak řešením rovnic (1) podle souřadnic x, y, z. Je sice počet těchto rovnic nadbytečný, ale v této okolnosti právě nalezneme usnadnění úkolu právě tak jako v původním úkolu Snelliově.

Zaveďme pro snazší označování pro minory determinantů v (1) velké písmeno, souhlasící s příslušným prvkem prvního řádku s indexy obsaženými v ostatních řádcích. Pak je na př.

$$K_1 = (xX_{24} + yY_{24} + zZ_{24})(xX_{35} + yY_{35} + zZ_{35}) + \\ + \lambda_1 (xX_{34} + yY_{34} + zZ_{34}) . (xX_{25} + yY_{25} + zZ_{25}) = 0$$

nebo po rozvinutí

$$K_1 \equiv x^2M_1 + xyN_1 + y^2P_1 + z(Q_1x + R_1y) + z^2S_1 = 0, \qquad (3)$$

kde

$$\begin{aligned} M_1 &= X_{24}X_{35} + \lambda_1 X_{34}X_{25}, \\ P_1 &= Y_{24}Y_{35} + \lambda_1 Y_{34}Y_{25}, \\ S_1 &= Z_{24}Z_{35} + \lambda_1 Z_{34}Z_{25}, \\ N_1 &= Y_{24}X_{35} + Y_{35}X_{24} + \lambda_1 (Y_{34}X_{25} + Y_{25}X_{34}), \\ Q_1 &= Z_{24}X_{35} + Z_{35}X_{24} + \lambda_1 (Z_{34}X_{25} + Z_{25}X_{34}), \\ R_1 &= Z_{24}Y_{35} + Z_{35}Y_{24} + \lambda_1 (Z_{34}Y_{25} + Z_{25}Y_{34}). \end{aligned}$$

Když provedeme tyto úpravy pro všechny tři kuželosečky K_1, K_2, K_3, můžeme z těchto tří rovnic vyloučti z, z^2 a vznikne rovnice

$$\begin{vmatrix} x^2M_1 + xyN_1 + y^2P_1, & Q_1x + R_1y, & S_1 \\ x^2M_2 + xyN_2 + y^2P_2, & Q_2x + R_2y, & S_2 \\ x^2M_3 + xyN_3 + y^2P_3, & Q_3x + R_3z, & S_3 \end{vmatrix} = 0, \qquad (4)$$

což je kubická rovnice pro určení poměru y/x. Ale nám netřeba ji řešit úplně, neboť víme, že všecky tři kuželosečky jdou oběma body (4) a (5). Stačí nám tedy rozvinout součinitele při x^3 a y^3, z čehož plyne rovnice:

$$\begin{vmatrix} P_1, & R_1, & S_1 \\ P_2, & R_2, & S_2 \\ P_3, & R_3, & S_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} M_1, & Q_1, & S_1 \\ M_2, & Q_2, & S_2 \\ M_3, & Q_3, & S_3 \end{vmatrix} = \frac{x\,x_4\,x_5}{y\,y_4\,y_5}. \qquad (5)$$

Opakujme týž pochod pro souřadnice y, z, totiž vylučme x. Přepíšeme K_1 na:

$$K_1 \equiv y^2P_1 + yzR_1 + z^2S_1 + x(N_1y + Q_1z) + x^2M_1 = 0, \qquad (3')$$

což dá:

$$\begin{vmatrix} y^2P_1 + y^2R_1 + z^2S_1, & N_1y + Q_1z, & M_1 \\ y^2P_2 + y^2R_2 + z^2S_2, & N_2y + Q_2z, & M_2 \\ y^2P_3 + y^2R_3 + z^2S_3, & N_3y + Q_3z, & M_3 \end{vmatrix} = 0 \qquad (4')$$

a odtud pak vznikne:

$$\begin{vmatrix} S_1, & Q_1, & M_1 \\ S_2, & Q_2, & M_2 \\ S_3, & Q_3, & M_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} P_1, & N_1, & M_1 \\ P_2, & N_2, & M_2 \\ P_3, & N_3, & M_3 \end{vmatrix} = \frac{y\,y_4\,y_5}{z\,z_4\,z_5}. \qquad (5')$$

Obrátíme-li pořad sloupců v obou determinantech nalevo, nezmění se jejich poměr a řešení lze psát jako úměru:

$$\frac{xx_4x_5}{\begin{vmatrix} P_1, & R_1, & S_1 \\ P_2, & R_2, & S_2 \\ P_3, & R_3, & S_3 \end{vmatrix}} = \frac{yy_4y_5}{\begin{vmatrix} M_1, & Q_1, & S_1 \\ M_2, & Q_2, & S_2 \\ M_3, & Q_3, & S_3 \end{vmatrix}} = \frac{zz_4z_5}{\begin{vmatrix} M_1, & N_1, & P_1 \\ M_2, & N_2, & P_2 \\ M_3, & N_3, & P_3 \end{vmatrix}}. \qquad (6)$$

Tím úkol rozřešen. Výrazy se nedají obecně zjednodušit.

Jisté zjednodušení je možné, když se body (1), (2), (3) zvolí za vrcholy souřadného trojúhelníka, takže

$$x_1 = y_2 = z_3 = 1, \; y_1 = z_1 = z_2 = x_2 = x_3 = y_3 = 0,$$
$$M_1 = -z_4y_5 - \lambda_1y_4z_5 \;\; P_2 = -x_4z_5 - \lambda_2z_4x_5 \;\; S_3 = -y_4x_5 - \lambda_3x_4y_5,$$
$$P_1 = S_1 = M_2 = S_2 = M_3 = P_3 = 0,$$

$$\begin{aligned} N_1 &= z_4x_5 + \lambda_1z_5x_4, & Q_1 &= x_4y_5 + \lambda_1y_4x_5, & R_1 &= -x_4x_5(1+\lambda_1), \\ N_2 &= y_4z_5 + \lambda_2z_4y_5, & Q_2 &= -y_4y_5(1+\lambda_2), & R_2 &= x_4y_5 + \lambda_2y_4x_5, \\ N_3 &= -z_4z_5(1+\lambda_3), & Q_3 &= y_4z_5 + \lambda_3z_4y_5, & R_3 &= z_4x_5 + \lambda_3x_4z_5, \end{aligned}$$

a úměry (6) přejdou ve:

$$\frac{xx_4x_5}{R_1P_2S_3} = \frac{yy_4y_5}{M_1Q_2S_3} = \frac{zz_4z_5}{M_1P_2N_3}.$$

nebo

$$\frac{x}{(1+\lambda_1)P_2S_3} = \frac{y}{(1+\lambda_2)S_3M_1} = \frac{z}{(1+\lambda_3)M_1P_2}. \qquad (6')$$

Kdyby bod (x, y, z) ležel na kuželosečce, určené body (1) (2), (3), (4), (5), stal by se úkol neurčitým, neboť by se všecky tři kuželosečky ztotožnily. Tento případ odpovídá kritické kružnici, stanovené třemi základními body v prvotním úkolu Snelliově.

*

Généralisation projective du problème de la carte.

(Extrait de l'article précédent.)

L'auteur donne une interprétation générale du problème de Pothenot en remplaçant les deux points circulaires à l'infini par deux points quelconques du plan et en remplaçant chaque cercle mené par deux des trois points de base, lieu des sommets des angles visuels constants, par une conique, lieu des centres des faisceaux, ayant le rapport anharmonique constant, qui projettent deux des trois points fondamentaux et les deux points susdits. Le produit des trois rapports anharmoniques ainsi obtenus est égal à -1.

Le problème consiste dans la résolution de trois équations quadratiques homogènes qui ne sont pas indépendantes et c'est grâce à cette circonstance que la solution s'achève linéairement.