Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Josef Klíma

O půdorysu meze vlastního stínu na serpentině, osvětlené paprsky rovnoběžnými

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 58 (1929), No. 1-2, 16--22

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108927

O půdorysu meze vlastního stínu na serpentině, osvětlené paprsky rovnoběžnými.

Napsal Dr. *Josef Klíma.*

Serpentina, neb šroubová rourovitá plocha, vytvoří se co obalová plocha plochy kulové o konstantním poloměru r, jejíž střed S pohybuje se po šroubovici $\check{s}$, která budiž na rotač. ploše válcové o ose o, kolmé k půdorysně, o poloměru a, a jejíž redukovaná výška budiž v^0. V obr. 1 vyznačeny jen půdorysy útvarů těch a šroubovice $\check{s}$ buď pravotočivá. Charakteristikou na libovolné poloze plochy kulové je hlavní kružnice k, jejíž rovina je kolma k tečně, sestrojené v jejím středu k šroubovici $\check{s}$. Ježto všechny tečny šroubovice $\check{s}$ jsou stejně skloněny k půdorysně o úhel α ($tg\, \alpha = v^0/a$), budou též půdorysy všech charakteristik k shodné elipsy, jichž hlavní poloosa $= r$ a vedlejší poloosa $= r \sin \alpha$. Serpentinu možno si tedy též mysliti vytvořenu šroubovým pohybem kružnice k. Abychom určili body meze vlastního stínu na určité poloze charakteristiky k, sestrojíme mez vlastního stínu příslušné plochy kulové a její průsečíky s k jsou dva body meze vlastního stínu serpentiny. Mez vlastního stínu na ploše kulové je hlavní kružnice l, jejíž rovina je kolma k paprsku s. Průsečíky A, ${}^1A$ kružnic k a l jsou dva diametrálně protilehlé body charakteristiky k a proto tečny v nich k charakteristice jsou rovnoběžny a mají tudíž společný pól.[1]) Sestrojíme-li tedy pól P světelných paprsků tím, že určíme vržený stín V' bodu V osy o, který je nad půdorysnou ve vzdál. v^0 a tento otočíme o 90^0 ve smyslu otáčení šroubovice $\check{s}$, musí půdorysy A_1 a ${}^1A_1$ bodů meze vlastního stínu býti na průměru elipsy k_1, jdoucí pólem P.[2]) Dá se nyní snadno dokázati, že půdorys meze je cissoidou elipsy a kružnice pro pól P. Mysleme si tvořící plochu kulovou posunutu rovnoběžně tak, až její

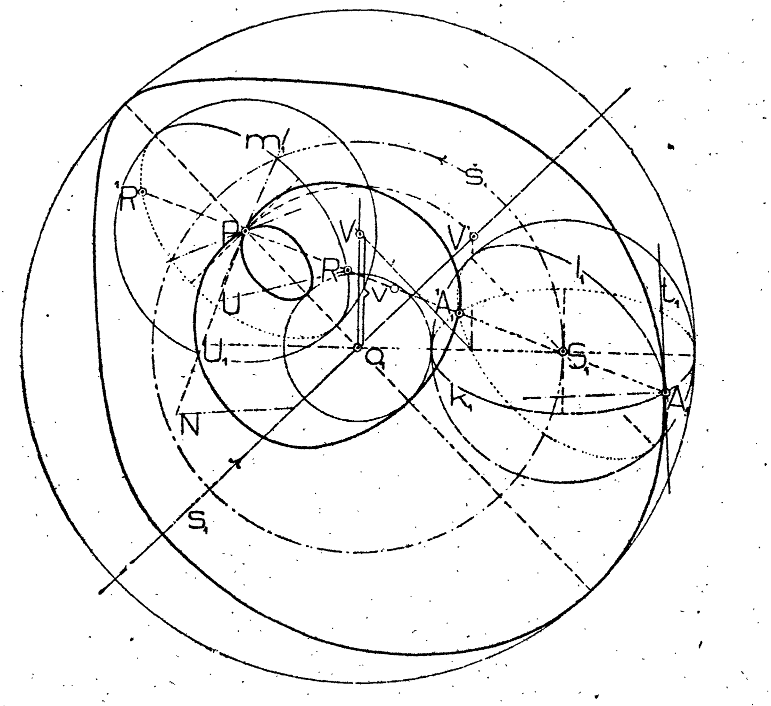
---

[1]) Rohn-Papperitz: „Lehrbuch der darst. Geometrie", II. díl str. 144.

[2]) Tamtéž neb pojednání od Ch. Hanocq: „Sur la separatrice d'ombre et de lumière dans le serpentine" v Annales de la Société scientifique de Bruxelles XXVII (3), rok 1902—1903, II. díl. Pojednání to nebylo mi přístupné, ale v referátě o tomto v „Revue semestrielle des publications mathématiques", sv. XII, roč. 1903, str. 19, praví se, že dokázán tam násl. theorém: Průměry tvořící koule, jichž koncové body náležejí mezi vlastního stínu jsou površkami konoidu, majícího za rovinu řídící rovinu kolmou k svět. paprsku, za řídící přímku svislou přímku (v našem obraze je to vertikála bodem P) a za řídící křivku šroubovici $\check{s}$, jíž probíhá střed, tvořící plochy kulové.

střed je v pólu P a sestrojme půdorys m_1 její meze vlastního stínu. Označíme-li průsečíky spojnice $\overline{P^1A_1A_1}$ s elipsou m_1 R a ${}^1R$ a s kružnicí $\check{s}_1$ označený S_1, tu je patrně $\overline{S_1A_1} = \overline{PR}$ a $\overline{S_1{}^1A_1} = \overline{P^1R}$. Dostáváme tedy:

„Půdorys meze vlastního stínu na serpentině, o ose kolmé k půdorysně, je cissoidou kružnice $\check{s}_1$, půdorysu to zákl. šroubovice a elipsy m_1, půdorysu to meze vlast. stínu shodné plochy kulové s tvořicí, jež má střed ve světelném pólu P, pro střed této elipsy co pólu.“



Obr. 1.

Cissoida ta je stupně *osmého*, je souměrna podle osy $\overline{Po_1}$, v bodě P a má čtyřnásobný bod, a tečny v něm procházejí průsečíky kružnice $\check{s}_1$ a elipsy m_1, z nichž dvě jsou v našem případě reálné a dvě imaginární. Křivka ta má úběžné body elipsy m_1 za samodot. dvojné body a tečny v nich splývají s asymptotami elipsy m_1 a stejně má imag. brody kruhové za samodot. body dvojné a tečny v nich jsou minimální přímky, jdoucí středem o_1 je to tedy křivka *bicirkulární* a bod o_1 je jejím význačným ohniskem. Křivka ta v našem případě skládá se ze dvou částí. Vnitřní se podobá Paskalově závitnici (tato by vznikla, kdyby m_1 byla kružnicí a pól P byl na $\check{s}_1$), a vnější tvaru oválového.

Na základě toho, že půdorysem meze vlastního stínu je cissoida elipsy m_1 a kružnice $\check{s}_1$ pro pól P, můžeme snadno sestrojiti tečnu v obecném jejím bodě, na př. A_1 tím, že polární subnormála cissoidy = součtu polárních subnormál křivek základních m_1 a $\check{s}_1$. Tak v obr. 1 sestrojena normála $\overline{A_1N}$ ($\overline{PN} = \overline{PU} + \overline{PU_1}$), kde $\overline{UR}$ a $\overline{U_1A_1}$ jsou normály elipsy m_1 a kružnice $\check{s}_1$. Stejně bychom mohli určiti střed křivosti v bodě A_1, jak ukázáno třeba ve spise Wieleitnerově „Spezielle ebene Kurven" str. 4 neb ve Wienerově „Lehrbuch der darstellenden Geometrie", II. díl, str. 225.

Zvláštní případy: 1. Kdyby redukovaná výška $v^0 = 0$, přešla by serpentina v *annuloid*, pól P splyne se středem o_1 a dostaneme známý výsledek, že půdorys meze vlastního stínu annuloidu o ose kolmé k půdorysně, je cissoida elipsy a soustředné s ní kružnice pro pól ve společném jich středu, jež je tu též konchoidou elipsy.

2. Křivka, jež je půdorysem meze vlastního stínu serpentiny, *rozpadne se v elipsu* m_1 *a bicirkulární křivku* 6^0, když pól P světelných paprsků padne na kružnici $\check{s}_1$, t. j. když sklon světelných paprsků = sklonu tečen šroubovice $\check{s}$. Ježto střed o_1 kružnice $\check{s}_1$ je na hlavní ose elipsy m_1, je nemožné, by kružnice $\check{s}_1$ indukovala v P touž involuci, jako je involuce sdruž. průměrů elipsy m_1 a proto cissoida ta nemůže se rozpadnouti ve dvě kvartiky.

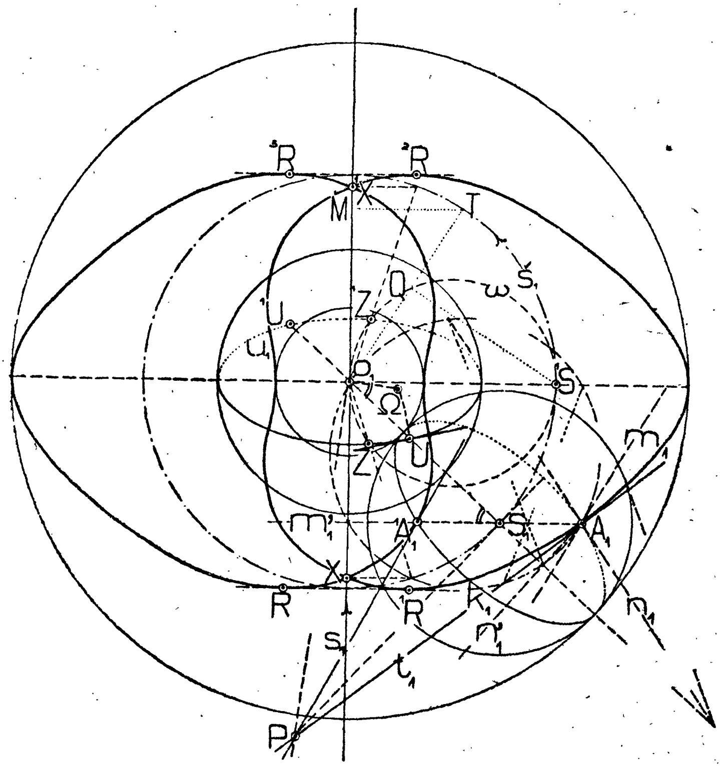
3. V případě, že *paprsek s je rovnoběžný s půdorysnou*, nelze užíti naší konstrukce, ježto elipsa m_1 přejde v úsečku a pól P paprsku s je úběžným bodem kolmice k s_1. I možno tu půdorys meze, jenž je též půdorysem nárysného obrysu, je-li s kolmo k nárysně, sestrojiti následovně (obr. 2). Na každé charakteristice k, o středu S, jsou dva body meze A, ${}^1A$, jichž půdorysy jsou na průměru elipsy k_1 kolmém k půdorysu s_1 paprsku. Bychom nemuseli elipsu k_1 otáčeti kol středu o_1, možno též konstrukci bodů A, ${}^1A$, prováděti následovně. Sestrojme elipsu u_1 o středu o_1, jejíž hlavní osa je kolma k s_1 a jež je shodna s půdorysem charakteristiky (hlavní poloosa $= r$ a vedlejší $= r \sin\alpha = \frac{rv^0}{\sqrt{a^2 + v^{02}}}$). Označíme-li průsečíky spojnice $\overline{o_1S_1}$ s elipsou u_1, U resp. ${}^1U$, tu patrně poloměry $\overline{o_1U} = \overline{o_1{}^1U} = \overline{S_1A_1} = \overline{S_1{}^1A_1}$, ježto svírají s hlavními osami shodných elips u_1 a k_1 týž úhel. I dostaneme půdorys nárysného obrysu tím, že středem o_1 sestrojíme libovolný paprsek $\overline{o_1S_1}$ a na přímku jdoucí průsečíkem jeho S_1 s kružnicí $\check{s}_1$ kolmo k s_1, naneseme poloprůměr o_1U elipsy u_1 od průsečíku S_1 na obě strany. Křivka takto odvozená skládá se ze dvou částí souměrných podle s_1 tvarů srdcových, jež mají společnou osu souměrnosti $\perp s_1$.[3]) Z této konstrukce křivky určí se

[3]) Je-li poloměr šroubovice $\check{s}$ opět a a poloměr koule tvořící r a reduk. výška šroubovice $\check{s}$ označena v^0, je rovnice křivky té, když $x \equiv \overline{o_1{}^1S}$ a $y \equiv s_1$:

$$(v^{02} + y^2)^2 (x^2 + y^2 - a^2)^2 - 2r^2 v^{02} (x^2 - y^2 + a^2)(v^{02} + y^2) + r^4 v^{04} = 0,$$

křivka stupně *osmého* a sice *bicirkulární*.

snadno body její R, ${}^1R$, ${}^2R$, ${}^3R$, v nichž tečny jsou kolmy k s_1 a jež odpovídají vrcholům vedlejší osy elipsy u_1. Lze též určiti dvojné body X, ${}^1X$ křivky, jež jsou průsečíky obou částí na ose s_1. Kdybychom totiž při naší konstrukci elipsu u_1 nahradili kružnicí ω opsanou nad poloměrem $\overline{o_1{}^1S} \perp s_1$ co průměrem, tu bod M, který sestrojíme podobně jako bod ${}^1A_1$ tím, že přeneseme $\overline{MT} = \overline{o_1Q}$ a $\overline{MT} \perp s_1$, padne na přímku s_1, jak plyne se shodnosti trojúhelníků



Obr. 2.

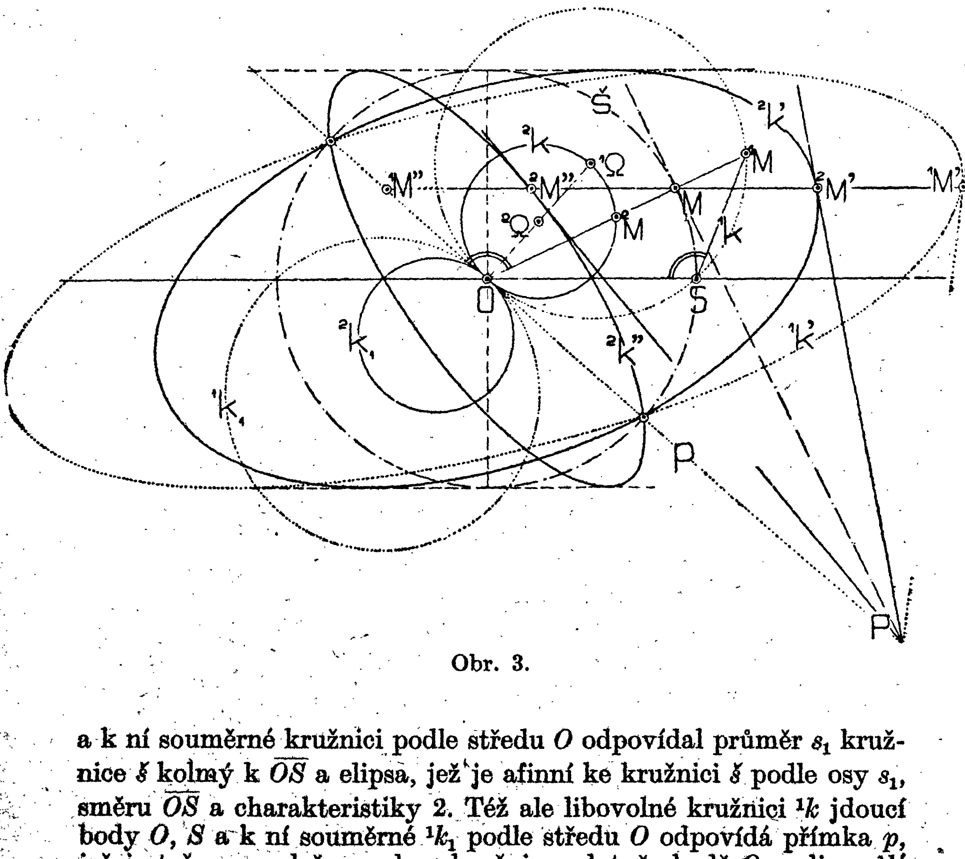
$o_1{}^1SQ$ a $o_1T'M$. Abychom tedy určili body X a ${}^1X$ na s_1, v nichž se protínají obě části, stačí určiti body odpovídající průsečíkům Z, ${}^1Z$ kružnice $\check{s}_1$ s kružnicí ω.

Tečnu k této křivce lze v bodě A_1 sestrojiti dvojím způsobem.

1. Podle theorému Dupinova možno v bodě tom určiti dva páry konjugovaných tečen, jež určují involuci, která v bodě A_1 je eliptickou, a hledaná tečna je pak sdruženou přímkou v této involuci k směru s_1. Jeden pár involuce té je tečna m k šroubovici jdoucí bodem A ($m_1 \perp \overline{o_1A_1}$) a sdružená tečna m' je spádová přímka v pří-

slušné rovině tečné, jež je rovnoběžná s paprskem s a tedy $m' \perp s_1$. Druhý pár sdruž. tečen je tečna n k charakteristice k a směr n' povrchových přímek opsané plochy válcové serpentině podle k a je patrně $n' \perp \overline{o_1 S_1}$. Sdruž. přímku k směru s, tečnu to t ke křivce, sestrojíme nejlépe užitím kružnice opsané nad $\overline{o_1 S_1}$ jako průměrem.

2. Možno odvoditi tečnu tu též na základě konstrukce bodů této křivky. Přihlédněme blíže k vztahu, jenž je mezi body elipsy u_1 a body křivky. Kružnici opsané nad $\overline{OS}$ (obr. 3) jako průměrem



Obr. 3.

a k ní souměrné kružnici podle středu O odpovídal průměr s_1 kružnice $\check{s}$ kolmý k $\overline{OS}$ a elipsa, jež je afinní ke kružnici $\check{s}$ podle osy s_1, směru $\overline{OS}$ a charakteristiky 2. Též ale libovolné kružnici ${}^1k$ jdoucí body O, S a k ní souměrné ${}^1k_1$ podle středu O odpovídá přímka p, jež je tečnou společnou obou kružnic v dotyč. bodě O a elipsa ${}^1k'$ afinní ke kružnici $\check{s}$ podle osy p, směru OS a charakteristiky 2. Označíme-li bodu ${}^1M$ kružnice ${}^1k$ odpovídající body ${}^1M'$ a ${}^1M''$ (${}^1M''\,M{}^1M' \parallel \overline{OS}$, $\overline{M{}^1M''} = \overline{M{}^1M'} = \overline{O{}^1M}$) a průsečík $\overline{O{}^1M}$ s $\check{s}$ bod M, tu je patrně

$$\triangle OS{}^1M \cong \triangle OM{}^1M''$$

a tudíž bod ${}^1M''$ padne vždy na tečnu p.

Libovolné kružnici ${}^2k$, dotýkající se kružnice ${}^1k$ v bodě O a jí souměrné ${}^2k_1$ podle O odpovídají v naší transformaci dvě elipsy, jež jsou afinní ke kružnici $\check{s}$ podle osy tečny p v bodě O sestr. ke ${}^2k$. Libov. bodu ${}^2M$ kružnice ${}^2k$ odpovídají body ${}^2M'$ a ${}^2M''$ ($\overline{M^2M'} = \overline{M^2M''} = \overline{O^2M}$) a ježto kružnice ${}^2k$ a ${}^1k$ jsou homothetické podle středu O a poměru $\overline{O^2\Omega} : \overline{O^1\Omega}$ (${}^2\Omega$ a ${}^1\Omega$ jsou středy kružnic ${}^2k$ a ${}^1k$), jsou take poměry $\overline{{}^1M''{}^2M'} : \overline{{}^1M''M}$ a $\overline{{}^1M''{}^2M''} : \overline{{}^1M''M}$ konstantní a tedy body ${}^2M'$ a ${}^2M''$ vytvoří při otáčení $\overline{OM}$ kol O dvě elipsy ${}^2k'$ a ${}^2k''$, jež jsou afinní ke kružnici $\check{s}$ podle osy p a směru $\overline{OS}$. Tečny tedy k elipsám ${}^2k''$, ${}^2k'$, ${}^1k'$ v bodech ${}^2M''$, ${}^2M'$ a ${}^1M'$ protínají se s tečnou sestrojenou ke kružnici $\check{s}$ v bodě M v témž bodě P na ose p.

Podle toho lze určiti tečnu v bodě A_1 a současně ${}^1A_1$ (obr. 2) k naší křivce tím, že nahradíme elipsu u_1 kružnicí dotýkající se této v bodě U a procházející středem o_1, střed její je Ω. Průsečíkem P, přímky $\overline{o_1P} \perp \overline{\Omega o_1}$ s tečnou sestrojenou v bodě S_1 ke kružnici $\check{s}_1$, procházejí tečny křivky v bodech A_1 a ${}^1A_1$.

*

Sur la projection horizontale de la ligne d'ombre propre sur la serpentine, pour les rayons parallèles.

(Extrait de l'article précédent.)

Supposons la serpentine engendrée par une sphère au rayon r dont le centre parcourt une hélice h à l'axe o, perpendiculaire au plan horizontal, au rayon a et au pas réduit v^0. Le théorème a lieu:

La projection horizontale de la ligne d'ombre propre sur une serpentine est la cissoïde du cercle h_1, projection horizontale de l'hélice fondamentale, et de l'ellipse m_1, projection horizontale de la ligne d'ombre propre d'une sphère congruente à la sphère génératrice, ayant son centre au pôle lumineux P, le centre de cette ellipse étant le pôle.

C'est une courbe du 8^e^ ordre, le pôle lumineux P en est point quadruple, les points à l'infini de l'ellipse m_1 en sont des tacnodes, les tangentes en ces points se confondant avec les asymptotes de l'ellipse m_1; de même, les points isotropes sont ses tacnodes et les tangentes en ces points sont les droites isotropes menées par le centre o_1 du cercle h_1. Par conséquent. la courbe est bicirculaire et le point o_1 en est un foyer singulier. Si l'inclinaison des rayons lumineux est la même que celle des tangentes de l'hélice h, la cissoïde dégénère en l'ellipse m_1 et en une courbe bicirculaire du 6^e^ ordre. Dans le cas où le rayon s est parallèle au plan horizontal de projection, cette construcsion n'est pas applicable. Pour ce cas, l'auteur donne une autre méthode de construire les points de la projection horizontale du contour vertical (on peut supposer s perpendiculaire au plan vertical de projection). On construit l'ellipse u_1, projection horizontale du cercle principal de la sphère au centre o_1 et au rayon r, dont le plan est perpendiculaire au diamètre incliné, au plan horizontal de projection, sous le même angle que les tangentes de l'hélice fondamentale h. Un diamètre arbitraire $\overline{o_1 S_1}$ coupe l'ellipse u_1 en un point U et le cercle h_1 en un point S_1; par ce point on mème une perpendiculaire à la direction s_1 et on y détermine deux points A_1, ${}^1A_1$ de la projection horizontale du contour vertical, en faisant $\overline{S_1 A_1} = \overline{S_1 {}^1A_1} = \overline{o_1 U}$. Les points doubles X, ${}^1X$ de cette courbe du 8e ordre sont déterminés comme les points correspondant aux points d'intersection Z, ${}^1Z$ de l'ellipse u_1 avec le cercle ayant $\overline{o_1 {}^1S}$ comme diamètre. L'auter donne ensuite deux constructions de la tangente en un point arbitraire de cette courbe.