Miloslav Pelíšek

O geometrickém místě os rotací, jimiž lze převésti přimku do libovolné polohy v prostoru

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 15 (1886), No. 6, 253--259

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108905

ke přímce), jest poměr polovice vzdálenosti $\overline{xA}$, ... k délce základní c_0 kořenem ξ rovnice dané.

Jde-li o rovnici číselnou, jest nám změřiti délku $\overline{xA}$ na měřidle; polovice příslušného čísla jest kořenem rovnice.

Dodavek. Jestliže v rovnici (1) položíme

$$c_1 = c_2 = 0,$$

vznikne rovnice

$$\xi^3 = -\frac{c_3}{c_0} = -\gamma_3.$$

Parabolou Π lze tedy výhodně graficky stanoviti třetí odmocniny. Přímka A sjednocuje se tu s osou C, bod o' s vrcholem e paraboly Π; mimo to jest

$$\overline{md} = \overline{ed} = c_0,$$

$$\overline{ds} = c_3 = \gamma_3 c_0.$$

Jest-li f ohnisko paraboly Π, přenesme na osu C délku $\overline{ed} = 2\overline{ef}$ a veďme bodem d přímku $G \perp C$. Jde-li pak o třetí odmocninu daného čísla $\delta = -\gamma_3$, odměřme na měřidle délku δc_0 a přenesme ji na přímku G tak, aby

$$\overline{ds} = -\delta c_0 = c_3.*)$$

Kružnicí K, opsanou ze středu s poloměrem $\overline{se}$, protněme parabolu Π v bodě x a změřme na měřidle vzdálenosť $\overline{xC}$; polovice příslušného čísla jest třetí odmocninou daného čísla δ.

O geometrickém místě os rotací, jimiž lze převésti přímku do libovolné polohy v prostoru.

Napsal

Miloslav Pelíšek,

assistent německé vysoké školy technické v Praze.

Buďtež P a P′ dvě mimoběžné přímky, ab libovolná délka na P, $a'b'$ tatáž délka na P′ (obr. 1.), pak jest *úloha* řešena, převedeme-li ab do $a'b'$ jedinou rotací.

*) V konstrukci šetříme tu i znaménka; poněvadž ostatně znaménko třetí odmocniny předem známe, stačí všímati si tu jen prosté velikosti.

Osa rotace této jest určena, jak známo, následující konstrukcí. Půlícím bodem α délky aa' vedeme rovinu ϱ_α kolmou k délce této, a půlícím bodem β délky bb' rovinu ϱ_β kolmou k délce bb'; průsek p těchto rovin jest hledaná osa.

Správnost výroku tohoto poznáme následující úvahou. Pomysleme sobě rovinu procházející přímkou aa' a rovnoběžnou s přímkou bb'; promítejme na rovinu tu body b, b', β do (b), (b'), (β), pak jest

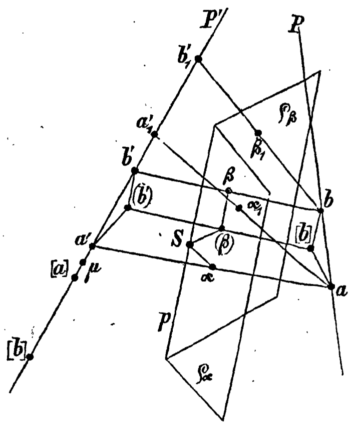
$$b(b) = b'(b')$$

a poněvadž trojúhelníky $\triangle ab(b)$ a $\triangle a'b'(b')$ jsou pravoúhelné

$$\triangle ab(b) \cong \triangle a'b'(b'),$$

z čehož plyne

$$a(b) = a'(b').$$



(Obr. 1.)

V bodech α a (β) vztyčme k přímkám aa', $(b)(b')$ v zmíněné rovině kolmice protínající se v bodu s, pak jest zřejmo, že bod tento jest střed kruhu procházejícího body $a(b)$ $a'(b')$ a že rotací o úhel asa' padne $a(b)$ do $a'(b')$, poněvadž jest

$$\triangle a(b)s \cong \triangle a'(b')s.$$

Vztyčíme-li konečně v bodu s kolmici k řečené rovině a povšimneme-li sobě, že tato jest totožná s výše uvedeným průsekem p, shledáme, že rotací $a(b)$ do $a'(b')$ okolo této osy převedeme současně $\triangle ab(b)$ do polohy $a'b'(b')$ tedy i přímku ab do polohy $a'b'$, čímž tvrzení naše dokázáno.

Pošinouce délku $a'b'$ do polohy $a_1'b_1'$ na přímce P', obdržíme stejnou konstrukcí osu p_1, okolo které se ab musí otáčeti, by padla do $a'_1b'_1$ a tedy současně P do P'. Pohybuje-li se tedy délka $a'b'$ na P', odpovídá každé poloze jistá osa p a osy tyto jsou tedy povrchovými přímkami plochy, jejíž vlastnosti máme vyšetřiti.

Pomysleme sobě dále na přímce P' délku $[a]\,[b]$ rovnající se délce ab, mající však opáčný směr délky $a'b'$. Zmíněnou konstrukcí obdržíme opět osu $[p]$, různou od všech předešlých. Pohybuje-li se délka $[a]\,[b]$ na P', zaujímajíc všechny možné polohy, naplňuje $[p]$ současně povrch plochy, mající tytéž vlastnosti jako předešlá.

Že kromě těchto os nemohou existovati žádné jiné, lze velmi snadno pochopiti.

O soustavách os p a $[p]$ dokážeme nyní následující věty:

1. Všechny osy systému p jsou mimoběžné; totéž platí o osách soustavy $[p]$.

2. Libovolná osa soustavy p protíná veškeré osy systému $[p]$ a naopak.

3. Osy soustavy p jsou rovnoběžny jisté rovině R, osy $[p]$ rovnoběžny jisté rovině [R] a sice jsou roviny R a [R] k sobě kolmé.

Ad 1. Poněvadž osa p se nachází v ϱ_α, jest kolmá k aa' a taktéž k bb', tedy kolmá k rovině rovnoběžné k přímkám aa' bb'. Z týchž důvodů jest p_1 kolmá k rovině rovnoběžné přímkám aa'_1, bb'_1. Z toho vychází na jevo, že osy p a p_1 nemohou býti rovnoběžné, poněvadž by pak tyto roviny musely býti rovnoběžné a tedy, procházejíce obě bodem a, totožné; dané přímky P a P' musely by tedy ležeti v rovině, což se příčí našemu předpokládání.

Mysleme si na okamžik, že by se dvě osy p p_1 protínaly v jistém bodu s v konečnu; pak by bodem tím procházely roviny ϱ_α ϱ_β, ϱ_{α_1} ϱ_{β_1}, tedy i průseky rovin ϱ_α ϱ_{α_1}; ϱ_β ϱ_{β_1}.

Poněvadž se však v trojúhelníku $a\,a'a'_1$ kolmice v půlících bodech stran protínají v jediném bodu — tedy roviny strany trojúhelníku kolmo půlící v jedné přímce — musela by bodem s procházeti rovina délku $a'a'_1$ kolmo půlící. Z týchž příčin by musel bod s ležeti v rovině půlící kolmo délku $b\,b'_1$.

Bod s nemůže se tedy nacházeti v konečnu, poněvadž jsou řečené roviny rovnoběžné, jsouce obě kolmé ku P′. Že však s nemůže býti v nekonečnu, dokázali jsme před tím; osy p a p_1 jsou tudíž mimoběžky a totéž platí o dvou libovolných osách systému p.

Týmž způsobem lze dokázati, že dvě libovolné osy $[p]$ jsou mimoběžné.

Ad 2. Roviny ϱ_α, $\varrho_{[\alpha]}$ a ϱ_μ přímky aa' $a[a]$, $a'[a]$ kolmo půlící protínají se, jak jsme v předcházejícím vytkli, v jediné přímce π_α; taktéž se protínají v jediné přímce π_β roviny půlící strany trojúhelníku $bb'[b]$ totiž ϱ_β $\varrho_{[\beta]}$ ϱ_μ, poněvadž μ jest současně půlícím bodem délek $a'[a]$, $b'[b]$. Průsečík s přímek π_α, π_β jest tedy průsek rovin ϱ_α $\varrho_{[\alpha]}$ ϱ_β $\varrho_{[\beta]}$, procházejí jím tudíž průseky rovin ϱ_α $\varrho_\beta \equiv p$ a $\varrho_{[\alpha]}$ $\varrho_{[\beta]} \equiv [p]$. Jelikož p a $[p]$ představují libovolné osy obou systémů, jest tím druhá věta dokázána.

Ad 3. Otáčí-li se přímka kol jisté osy, nemění se tím úhel obou přímek. Z toho soudíme, že libovolná osa p uzavírá s přímkami P a P′ stejné úhly. Vedouce libovolným bodem prostoru x rovnoběžky ku P a P′ a systému os p, poznáme snadno, že místo přímek posledních jest rovina R, půlící kolmo úhel přímek prvých a že tedy rovina tato jest řídící rovina os systému p.

Jest jasno, že rovina [R] půlící vedlejší úhel jest řídící systému $[p]$ a že tedy roviny R a [R] jsou k sobě a rovině přímek P a P′ kolmé.

Z věty prvé soudíme, že místo os p jest zborcená plocha, totéž platí o místě os $[p]$.

Z věty druhé poznáváme, že obě tyto plochy splývají v jedinou, která má tu vlastnost, že se v každém jejím bodu protínají dvě povrchové přímky. Plocha ta může býti tedy buď hyperboloid aneb hyperbolický paraboloid. Dle věty třetí má plocha ta dvě kolmé roviny řídící, jest to tedy stejnostranný hyperbolický paraboloid.

Nebude nám těžko polohu tohoto paraboloidu k daným přímkám vyhledati.

Určeme si nejkratší vzdálenost mm' přímek P a P', rozpůlme ji bodem O, a veďme tímto bodem rovnoběžky k daným přímkám a rozpůlme konečně úhly těchto rovnoběžek kolmými rovinami, procházejícími tedy přímkou mm'. Průseky těchto rovin s rovinou zmíněných rovnoběžek jsou, jak patrno, též osy rotací, jimiž lze P do polohy P' převésti a sice polovičním otočením. Shledáme pravost tohoto tvrzení, uvažujíce, že tyto průseky mají předně stejnou vzdálenost $om = om'$ od daných přímek a za druhé, že s nimi uzavírají stejné úhly. Průseky tyto jsou tedy též dvě přímky paraboloidu. Poněvadž však přímky tyto stojí na sobě kolmo, jsou to hlavní přímky povrchové, O tedy vrchol a rovina těch přímek tečná rovina vrcholová, přímka mm' konečně osa paraboloidu.

Souhrn dřívějších výsledků jest tedy:

Místo os rotací, jimiž lze převésti danou přímku P *do libovolné polohy P' v prostoru jest stejnostranný hyperbolický paraboloid, jenž má za osu přímku nejmenší vzdálenosti daných přímek, za vrchol půlící bod této vzdálenosti a jehož řídící roviny úhly daných přímek rozpolují kolmo.*

K řešené úloze druží se svou podobností úloha následující:

Má se určiti místo os polovičních otočení šroubových, jimiž lze převésti přímku P do libovolné polohy mimoběžné P_1.

Volme (obr. 2.) na P a P_1 stejné délky ab, a_1b_1, veďme spojivé přímky aa_1, bb_1 a rozpůlme tyto v bodech α, β; pak jest $\alpha\beta$ hledaná osa.

Důkaz provedeme následujícím způsobem:

Budiž ab libovolná délka, O osa otočení. Spustíce z bodů ab kolmice $a\alpha_0$, $b\beta_0$ na tuto osu a nanesouce na přímky tyto $\alpha_0 a_0 = \alpha_0 a$ $\beta_0 b_0 = \beta_0 b$, obdržíme v $a_0 b_0$ polohu přímky ab po polovičním otočení. Vedouce body $a_0\,b_0$ rovnoběžky k ose, na něž naneseme stejné délky $a_0 a_1 = b_0 b_1$, obdržíme v $a_1 b_1$ polohy přímky ab po polovičním otočení šroubovém, jehož poloviční chod jest $a_0 a_1$. Spojivé přímky aa_1, bb_1 protínají osu v bodech $\alpha\beta$; poněvadž však platí podobnosti:

$$\triangle a\alpha\alpha_0 \sim \triangle aa_1a_0,\ \triangle b\beta\beta_0 \sim \triangle bb_1b_0,$$

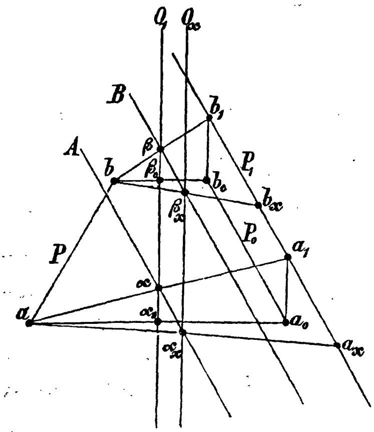
následuje:

$$a\alpha = a_1\alpha \quad b\beta = b_1\beta,$$

čímž věta dokázána.

Povšimněme si dále, že přímky ab, a_0b_0, a_1b_1 uzavírají s osou tentýž úhel, pak plyne z předcházejícího následující věta:

Jsou-li v čtyřúhelníku rovinném neb prostorovém dvě protilehlé strany (AB, CD) stejné, uzavírá spojivá přímka půlících bodů druhých stran (AC, BD) s prvními stejné úhly.



(Obr. 2.)

Poněvadž můžeme stejným způsobem délku ab do délky b_1a_1 převésti, platí ještě následující část věty:

Jsou-li v čtyřúhelníku rovinném neb prostorovém dvě protilehlé strany stejné, uzavírá též spojivá přímka půlících bodů diagonál s řečenými přímkami stejné úhly.

Po této malé odchylce můžeme pokračovati v hlavní úvaze. Přejde-li a_1b_1 do libovolné polohy a_xb_x, odpovídá jí osa $\alpha_x\beta_x$. Jest jasné, že body α_x, β_x naplňují přímky A, B rovnoběžné s P'. Místo os $\alpha_x\beta_x$ jest tedy rovina určená těmito rovnoběžkami. Vedouce půlícím bodem O nejmenší vzdálenosti daných přímek rovinu rovnoběžnou k těmto, seznáme, že jest totožná s rovinou AB, ponévadž rozpoluje paprsky, jimiž přímku P_1 z libovolného bodu přímky P promítáme.

Uvažované osy šroubové uzavírajíce taktéž jako osy otočení, stejnou odchylku s přímkami danými, jsou rovnoběžné k rovině úhel jich půlící.

Jest tedy výsledek našeho uvažování:

Místo os šroubových pohybů a sice polovičního chodu, jimiž lze přímku do dané mimoběžné polohy převésti, jest rovina k daným přímkám rovnoběžná a vzdálenost těchto půlící; uvažované osy tvoří v rovině této dva systémy přímek rovnoběžných s rovinami, úhly daných přímek kolmo půlících.

Místo toto jest tedy rovnostranný hyperbolický paraboloid, degenerovaný v rovinu.

Analytické cvičení o trojúhelníku.

Napsal

A. Strnad,

professor v Hradci Králové.

Uložili jsme sobě vyšetřiti v článku tomto spůsobem analytickým některé vztahy týkající se trojúhelníka a čtverců sestrojených nad stranami jeho.

1. Dán buď libovolný trojúhelník abc, kterýž základním jmenovati budeme, pravoúhlými souřadnicemi svých vrcholů

$$a(x_1, y_1), \quad b(x_2, y_2), \quad c(x_3, y_3);$$

nad stranami tohoto trojúhelníka vně plochy jeho sestrojme čtverce $abc'c''$, $bca'a''$, $cab'b''$ (obrazec račiž sobě čtenář sám zhotoviti), a označme souřadnice jich vrcholů

$$a'(x'_1, y'_1), \quad b'(x'_2, y'_2), \quad c'(x'_3, y'_3);$$
$$a''(x''_1, y''_1), \quad b''(x''_2, y''_2), \quad c''(x''_3, y''_3).$$

Souřadnice tyto můžeme velmi jednoduše vyjádřiti souřadnicemi vrcholů základního trojúhelníka; jestiť, jak z obrazu snadně lze poznati,

$$\begin{array}{lll} x'_1 = x_3 + y_3 - y_2, & x'_2 = x_1 + y_1 - y_3, & x'_2 = x_2 + y_2 - y_1, \\ y'_1 = y_3 + y_2 - x_3, & y'_2 = y_1 + x_3 - x_1, & y'_3 = y_2 + x_1 - x_2, \\ x''_1 = x_2 + y_3 - y_2, & x''_2 = x_3 + y_1 - y_3, & x''_3 = x_1 + y_2 - y_1, \\ y''_1 = y_2 + x_2 - x_3, & y''_2 = y_3 + x_3 - x_1, & y''_3 = y_1 + x_1 - x_2. \end{array}$$

Jak patrno, lze souřadnice bodů a', b', c' jedny z druhých odvoditi cyklickou záměnou ukazatelů; rovněž tak lze učiniti při bodech a'', b'', c''. —

Povšimněme si trojúhelníků $a'b'c'$, $a''b''c''$; ustanovme jich těžiště a ploský obsah. Jelikož jest