Miloslav Pelíšek
O závitnici Pascalově

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 15 (1886), No. 6, 269--271

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108904`

O závitnici Pascalově.

Napsal

Miloslav Pelíšek,

assistent při c. k. německé vysoké škole technické.

V čísle třetím tohoto ročníku byly uveřejněny některé věty o závitnici Pascalově. Dovoluji si při této příležitosti upozorniti na starší výsledky, jimiž hlavně závitnice Pascalova (pojmenování toho užívá poprvé Roberval) vzbudila interes geometrů.

W. Roberts shledal (Journal de Liouville t. XV. p. 196.) pomocí souřadnic elliptických, že oblouk oválu Descartova lze vyjádřiti hyperelliptickým integrálem. *Genocchi* obdržel (Nouvelles Annales 1855, p. 202.) pomocí souřadnic polárných resultat jednodušší. Píšeme-li rovnici oválu Descartova ve tvaru

$$\varrho^2 - 2\varrho\,(a \cos \omega + b) = k, \qquad (1)$$

obdržíme pro oblouk výraz

$$s = \int d\omega \sqrt{a^2 + b^2 + k + 2ab \cos \omega}$$

$$\pm \int \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + k + 2ab \cos \omega}}{\sqrt{k + (a \cos \omega + b)^2}} (a \cos \omega + b) d\omega. \qquad (2)$$

První integrál vyjadřuje oblouk ellipsy, jak patrno ze substituce $\omega = 2\varphi$.

Druhý integrál se transformuje substitucí $\cos \omega = x$, $a^2 + b^2 + k = r$ v integrál Abelův

$$\int \frac{(ax + b)(2 + 2abx)\,dx}{\sqrt{(1 - x^2)(r + 2abx)(k + b^2 + 2abx + a^2x^2)}},$$

jenž se redukuje na integrál první, položíme-li $k = 0$; pak však se rozloží rovnice (1) v tyto

$$\varrho = 0, \; \varrho = 2\,(a \cos \omega + b).$$

Ovál Descartův rozpadává se v isolovaný pól a závitnici Pascalovu, již pokládati můžeme buď za úpatnici kruhovou, neb za konchoidu kruhovou aneb za epicykloidu.

Pro $k = -(a - b)^2$ [taktéž pro $k = -(a + b)^2$] transformuje se (2) ve tvar

$$s = 2\sqrt{b}\left\{2\sqrt{a}\sin\varphi \pm \left[(a-b)\int\frac{d\varphi}{\sqrt{b - a\sin^2\varphi}}\right.\right.$$
$$\left.\left. + 2\int d\varphi\sqrt{b - a\sin^2\varphi}\right]\right\}, \tag{3}$$

a rovnice (1) současně v rovnici závitnice Pascalovy.

Srovnáním obdržených výrazů pro oblouk závitnice obdržíme známý *theorém Landenův,* že elliptickou funkci prvního řádu lze vyjádřiti dvěma oblouky elliptickými.

Vlastnosť závitnice Pascalovy, že se oblouk její dá vyjádřiti obloukem ellipsy, poznal nejdříve *Quetelet*, jenž ji studoval jako speciální *křivku kaustickou* (Nouvelles Mémoires de l'Académie Bruxelles t. III. p. 131) a sice nazývá Quetelet závitnicí jen křivku odpovídající substituci $a = 2b$.

Zavedeme-li $\varrho' = \frac{1}{m}\varrho^2$, $\omega' = 2\omega$, transformuje se závitnice Pascalova v kružnici a naopak, substitucí $\varrho' = \sqrt{m\varrho}$, $\omega' = \frac{\omega}{2}$ se transformuje kružnice v závitnici a ne, jak mylně tvrdili *Chasles a Roberts*, v ovál Descartův, kterou chybu první zpozoroval *Cayley* (Journal de Liouville t. XV. p. 354). Mimo jiné následuje z toho, že v theorému Streborově*), jejž dokazuje *Serret* (Nouvelles Annales t. IX. p. 321.) a jenž zní:

„Procházejí-li oblouky parabol, jež mají společné ohnisko, dvěma pevnými body a protínají-li se pod stálým úhlem, opisuje jich průsečík ovál Descartův" — má státi — „závitnici Pascalovu."

V pozdějším memoiru o kaustikách (1864) zabýval se Genocchi ještě závitnicí Pascalovou a dokázal jmenovitě, že ohnisko závitnice povstává splynutím dvou ohnisek oválných, dále, že mají závitnice jisté vlastnosti společné s kaustikami a úpatnicemi.

Že však jsou úpatnice a kaustika *libovolné* křivky sobě podobné v poměru 1 : 2 dokázal geometricky poprvé *Emil Weyr* (Uiber die Identität der Brennlinien mit den Fusspunktcurven. Schlömilch Z. XIV. 376—381, 1869).

---

*) *Strebor* jest dlouholetý pseudonym slovutného Irčana *Williama Roberts-a.*

Z předcházejícího patrno, že Genocchi vším právem k tomu poukazoval (Comptes rendus 1884. p. 81), že v novějším čase (C. R. 1883 p. 1424) dokazují se věty jím dávno dokázané.

Končím vytknutím věty uvedené v Nouvelles Annales 1864 p. 170.:

Dána-li jest řada závitnic Pascalových vytvořených pomocí jediné kružnice a jež mají společný dvojný bod A; vedeme-li bodem tímto transversálu, jež protíná libovolnou závitnici v bodě P a opíšeme-li kružnici, jež se dotýká závitnice v bodu P a prochází-li bodem A: pak mají všechny tyto kružnice společnou chordálu, a když se otáčí zmíněná transversála okolo bodu A, otáčí se chordála též okolo A, kdežto druhý společný bod všech kružnic opisuje zase kružnici.

Úloha z počtu pravděpodobnosti.

Napsal

Augustin Pánek.

Dva vlaky U a V, jichž délky jsou u a v, pohybují se směrem ke společné křižovatce libovolnou rychlostí; je-li první vlak od ní vzdálen o a, druhý o b, při čemž $a > b$, a supponujeme-li, že konec vlaku V jest buď bližší buď vzdálenější křižovatky než počátek vlaku U, jaká jest pravděpodobnost, že nastane u křižovatky srážka obou vlaků?

Nazvěmež rychlosti vlaků x, y i předpokládejme, že žádná není větší c. Neštěstí nastane, je-li hodnota poměrů rychlostí $\frac{x}{y}$ mezi $\frac{a+u}{b}$ a $\frac{a}{b+v}$, a poněvadž $a > b$, jest zlomek prvý větším druhého.

Budiž O počátkem pravoúhlé soustavy dvouosé a, máme-li zření k mezným případům zde vytčeným, totiž klademe-li $x = c$, $y = c$, rovnice ty představují dvé přímek, jež s osami soustavy činí čtverec OABC. Dále nabudeme z hořejších poměrův úměr $\frac{x}{y} = \frac{a+u}{b}$, $\frac{x}{y} = \frac{a}{b+v}$ aneb ve tvaru