Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Josef Šolín

# Jak řešiti graficky rovnice stupně třetího

*Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky*, Vol. 15 (1886), No. 6, 245--253

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108900

# Jak řešiti graficky rovnice stupně třetího.

Napsal

prof. Josef Šolín.

Konstrukce, kterou tuto ukáži, zakládá se na Lillově strojení celistvých racionalných polynomů a vyplývajícím z toho řešení rovnic algebraických vůbec.

Bychom sestrojili polynom

$$z_\mu = c_0 \zeta^\mu + c_1 \zeta^{\mu-1} + \ldots + c_{\mu-1} \zeta + c_\mu ,$$

kde $c_0, c_1, \ldots, c_{\mu-1}, c_\mu$ jsou přímé úsečky, kterým přisuzujme zároveň určitá znaménka plus nebo minus, $\zeta$ pak číslo, jež pokládati lze za poměr dvou úseček, sestrojme lomenou čáru $c_0 c_1 c_2 \ldots c_\mu c_{\mu+1}$ (viz tabulku, kde $\mu = 3$) tak, aby každé dvě sousední strany byly vzájemně pravoúhelny a hověly rovnicím

$$\begin{array}{ll} \overline{c_0 c_1} = c_0 , & \overline{c_1 c_2} = c_1 , \\ \overline{c_2 c_3} = - c_2 , & \overline{c_3 c_4} = - c_3 , \\ \overline{c_4 c_5} = c_4 , & \overline{c_5 c_6} = c_5 , \\ \overline{c_6 c_7} = - c_6 , & \overline{c_7 c_8} = - c_7 , \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \text{*)} \end{array}$$

Ve příčině znamének bude nejlépe, vytkneme-li hned předem dvě osy pravoúhelné, s nimiž strany lomené čáry střídavě nechť jsou rovnoběžny, a na každé ose určitý směr positivný. Pak jest nám přenésti první dvě úsečky $c_0$, $c_1$ v tom směru, ku kterému vlastní znaménko těchto součinitelů ukazuje; při následujících dvou úsečkách $c_2$, $c_3$ změňme znaménko, t. j. přenesme je opak toho směru, ku kterému ukazuje vlastní jich znaménko, a tak střídavě až na konec. Chceme-li rozhodnouti

*) Písmě $c_\varkappa$ znamená tedy počátek strany $c_\varkappa c_{\varkappa+1}$ a zároveň hodnotu této strany.

hned předem, jest-li určitou úsečku $c_\varkappa$ přenésti ve směru jí příslušném či ve směru opačném, dbejme toho, jaké znaménko má výraz $i^\varkappa$, kde $i = \sqrt{-1}$, a položme toto znaménko před úsečku $c_\varkappa$. Výraz $i^\varkappa$ má hodnotu buď 1 buď $i$ se znaménkem plus nebo minus; znaménko toto, jak snadně se přesvědčiti, vyhovuje tomu, co svrchu o přenášení úseček $c$ bylo dotčeno.

Lomenou čáru $c_0 c_1 c_2 \ldots c_\mu c_{\mu+1}$ nazývejme *čarou základní;* počátek její $c_0$ poznamenejme zároveň písmenem $n_0$ a veďme jím přímku $n_0 n_1$ tak, aby

$$\frac{\overline{n_1 c_1}}{\overline{n_0 c_1}} = \zeta,$$

šetříce v tom ovšem velikosti i znamení; úsečka $\overline{n_0 n_1}$ budiž pak první stranou nové lomené čáry pravoúhelné $n_0 n_1 n_2 \ldots n_\mu$, jež majíc vrcholy své na stranách čáry základní jest v ni vepsána. Jest nám tedy vésti

$$n_1 n_2 \perp n_0 n_1, \quad n_2 n_3 \perp n_1 n_2, \quad \ldots$$

Sestrojena-li čára vepsaná až po bod $n_\mu$, položený na straně $c_\mu c_{\mu+1}$ čáry základní, sestrojen tím nejen polynom $z_\mu$, ale i veškeré polynomy $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_{\mu-1}$ stupňů nižších s týmiž ovšem součiniteli.

Trojúhelníky

$$n_0 c_1 n_1, \quad n_1 c_2 n_2, \quad n_2 c_3 n_3, \quad n_3 c_4 n_4, \quad \ldots$$

jsou vesměs podobny, a proto

$$\frac{\overline{n_1 c_1}}{\overline{n_0 c_1}} = -\frac{\overline{n_2 c_2}}{\overline{n_1 c_2}} = \frac{\overline{n_3 c_3}}{\overline{n_2 c_3}} = -\frac{\overline{n_4 c_4}}{\overline{n_3 c_4}} = \ldots = \zeta.*)$$

Z čehož vychází, že

---

*) Co se týče znamének, sluší dbáti toho, že ve dvou pravoúhelných trojúhelnících $abc$, $a'b'c'$, jichžto strany jsou vzájem pravoúhelny, poměry $\frac{\overline{ac}}{\overline{bc}}$, $\frac{\overline{a'c'}}{\overline{b'c'}}$ sdružených odvěsen — správněji součiny $\overline{ac}\,.\,\overline{b'c'}$, $\overline{bc}\,.\,\overline{a'c'}$ — klademe-li v obou sdružené vrcholy v témž pořádku, jsou sice rovny co do velikosti ale protivného znaménka. Jde-li tedy nejen o velikost ale také o znamení, musíme vyjadřujíce onu rovnost položiti před jeden poměr znaménko minus. Odtud střída znamének v rovnici svrchu vytčené.

$$\overline{n_1c_1} = \overline{n_0c_1} \,.\, \xi = c_0\xi,$$
$$\overline{n_1c_2} = \overline{n_1c_1} + \overline{c_1c_2} = c_0\xi + c_1;$$
$$-\overline{n_2c_2} = \overline{n_1c_2} \,.\, \xi = c_0\xi^2 + c_1\xi,$$
$$-\overline{n_2c_3} = -\overline{n_2c_2} - \overline{c_2c_3} = c_0\xi^2 + c_1\xi + c_2;$$
$$-\overline{n_3c_3} = -\overline{n_2c_3} \,.\, \xi = c_0\xi^3 + c_1\xi^2 + c_2\xi,$$
$$-\overline{n_3c_4} = -\overline{n_3c_3} - \overline{c_3c_4} = c_0\xi^3 + c_1\xi^2 + c_2\xi + c_3;$$
$$\overline{n_4c_4} = -\overline{n_3c_4} \,.\, \xi = c_0\xi^4 + c_1\xi^3 + c_2\xi^2 + c_3\xi,$$
$$\overline{n_4c_5} = \overline{n_4c_4} + \overline{c_4c_5} = c_0\xi^4 + c_1\xi^3 + c_2\xi^2 + c_3\xi + c_4;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Jest tedy

$$z_0 = \overline{n_0c_1}, \quad z_1 = \overline{n_1c_2},$$
$$z_2 = -\overline{n_2c_3}, \quad z_3 = -\overline{n_3c_4},$$
$$z_4 = \overline{n_4c_5}, \quad z_5 = \overline{n_5c_6},$$
$$\cdots\cdots \quad \cdots\cdots$$

Obecně

$$z_\mu = \pm \overline{n_\mu c_{\mu+1}};$$

z obou znamének předložených zvoliti jest ono, jež náleží výrazu $i^\mu$. Čemuž snadno se přesvědčiti.

Kdyby bod $n_\mu$ čáry vepsané sjednotil se s bodem $c_{\mu+1}$ čáry základní, bylo by $z_\mu = 0$ a poměr

$$\xi = \frac{\overline{n_1c_1}}{\overline{n_0c_1}}$$

byl by kořenem rovnice

$$c_0\xi^\mu + c_1\xi^{\mu-1} + c_3\xi^{\mu-2} + \ldots + c_{\mu-1}\,\xi + c_\mu = 0.$$

Na tomto základě řeší Lill *rovnice všelikých stupňů* zkusmo; ku snadnějšímu mechanickému vyhledávání kořenů sestrojil zvláštní apparat.*)

Jde-li o rovnici *stupně druhého*, netřeba ovšem postupovati zkusmo; stačuje toliko sestrojiti kružnici z daného průměru, a rovnice jest řešena. Dána-li rovnice

*) Viz „Lill, Résolution graphique des équations numériques des tous les dégrés à une seule inconnue et description d'un instrument inventé dans ce but. (Nouvelles Annales de Mathématiques, 1867).

$$c_0\zeta^2 + c_1\zeta + c_2 = 0,$$

obsahuje základní čára $c_0c_1c_2c_3$ tři strany, čára vepsaná nebo solutivná $n_0n_1n_2$ dvě strany; poněvadž počátek $n_0$ sjednocuje se s počátkem $c_0$ a konec $n_2$ sjednotiti se má s koncem $c_3$, běží jen o bod $n_1$, položený na přímce $c_1c_2$. Opíšeme-li na průměru $c_0c_3$ kružnici, protne přímku $c_1c_2$ ve dvou bodech $n_1$, jimiž kořeny žádané budou ustanoveny.

Dosud vykládali jsme výsledky již známé; obraťme se nyní ku *grafickému řešení rovnic stupně třetího*, t. j.

$$c_0\zeta^3 + c_1\zeta^2 + c_2\zeta + c_3 = 0. \qquad (1)$$

Základní čára $c_0c_1c_2c_3c_4$ skládá se tu ze čtyř stran

$$\overline{c_0c_1} = c_0, \quad \overline{c_1c_2} = c_1, \quad \overline{c_2c_3} = -c_2, \quad \overline{c_3c_4} = -c_3; \qquad (2)$$

jde pak o čáru vepsanou $n_0n_1n_2n_3$, jejíž body krajní $n_0$, $n_3$ se sjednocují onen s bodem $c_0$, tento s bodem $c_4$; neznámy jsou body $n_1$, $n_2$, položené na příslušných přímkách $c_1c_2$, $c_2c_3$.

Kdybychom volili zkusmo na přímce $c_1c_2$ rozličné body $n_1$ a vedli po každé $n_1n_2 \perp c_0n_1$, byly by veškeré přímky $n_1n_2$ obaleny parabolou $\Gamma$, jejížto vrcholem jest bod $c_1$ a ohniskem bod $c_0$; kdybychom naopak vycházejíce z bodu $n_3$ volili na přímce $c_3c_2$ rozličné body $n_2$ a vedli po každé $n_2n_1 \perp c_4n_2$, byly by veškeré přímky $n_2n_1$ obaleny parabolou $\varDelta$, jejížto vrcholem jest bod $c_3$ a ohniskem bod $c_4$. Aby strana $n_1n_2$ vepsané čáry vyhověla výminkám úlohy, musí býti *společnou tečnou parabol* $\Gamma$, $\varDelta$.

Paraboly $\Gamma$, $\varDelta$ mají čtyři společné tečny; jednou z nich jest nekonečně vzdálená přímka $U_\infty$ roviny; ostatními třemi $T_1$, $T_2$, $T_3$, z nichžto jedna nezbytně jest realná, řeší se daná rovnice (1).

Přímky $T_1$, $T_2$, $T_3$, $U_\infty$ sekou se v šesti bodech; každé dva body protější $(T_2T_3)$ a $(T_1U_\infty)$, pak $(T_3T_1)$ a $(T_2U_\infty)$, konečně $(T_1T_2)$, $(T_3U_\infty)$ stanoví příslušnou stranu X, Y, Z společného polového trojúhelníka obou parabol $\Gamma$, $\varDelta$. Patrno, že $X \parallel T_1$, $Y \parallel T_2$, $Z \parallel T_3$; z toho pak vysvitá, že vrcholy trojúhelníka $T_1T_2T_3$ tečen jsou rozpolovacími body (omezených) stran společného polového trojúhelníka XYZ. Sestrojíme-li tedy společný polový trojúhelník XYZ, ustanovíme tím i společné tečny $T_1$, $T_2$, $T_3$.

Jsou-li $x$, $y$, $z$ vrcholy společného polového trojúhelníka, položené proti stranám X, Y, Z, vyznamenává se každý z těchto bodů tím, že poláry jeho vzhledem ku křivkám $\Gamma$, $\varDelta$ se sjednocují. Postupujíce analyticky *) vztahujme paraboly $\Gamma$, $\varDelta$ ke dvěma osám pravoúhelným, které nechť se sjednocují s přímkami $c_0c_1$, $c_4c_3$, a které kratčeji znamenejme písmeny A, B; společný bod jejich $o$ jest tedy počátkem soustavy souřadnicové; positivné směry na osách souřadnicových nechť se srovnávají s positivnými směry os, ježto jsme před tím zvolili strojíce lomenou čáru základní. Pak jest

$$\overline{oc_1} = \overline{c_3c_2} = -\overline{c_2c_3} = c_2$$

úsečka vrcholu paraboly $\Gamma$,

$$\overline{c_1c_0} = -\overline{c_0c_1} = -c_0$$

čtvrtina parametru, t. j. hlavní tetivy obsahující ohnisko.

Parabole $\Gamma$ sluší tedy rovnice

$$\eta^2 + 4c_0(\xi - c_2) = 0. \qquad (3)$$

Obdobně jest

$$\overline{oc_3} = \overline{c_1c_2} = c_1$$

pořadnice vrcholu paraboly $\varDelta$,

$$\overline{c_3c_4} = -c_3$$

čtvrtina parametru téže paraboly, a proto

$$\xi^2 + 4c_3(\eta - c_1) = 0 \qquad (4)$$

rovnice paraboly $\varDelta$.

Bodu $\{\xi', \eta'\}$ náležejí vzhledem k parabolám $\Gamma$, $\varDelta$ poláry

$$\eta'\eta + 2c_0(\xi + \xi' - 2c_2) = 0,$$
$$\xi'\xi + 2c_3(\eta + \eta' - 2c_1) = 0,$$

které se sjednocují, jest-li

$$\frac{2c_0}{\xi'} = \frac{\eta'}{2c_3} = \frac{c_0(\xi' - 2c_2)}{c_3(\eta' - 2c_1)}. \qquad (5)$$

Spojíme-li kterékoli dva členy této trojčlenné rovnice, dostaneme rovnici křivky, jež obsahuje body $x$, $y$, $z$. Tak jest

$$\xi'\eta' = 4\,c_0c_3$$

rovnice pravoúhelné hyperboly a

*) Co se týče odvození ryze měřického, viz příslušný článek spisovatelův ve „Zprávách o zasedání král. české společnosti náuk r. 1886.“

$$\eta'(\eta' - 2c_1) = 2c_0(\xi' - 2c_2),$$
$$\xi'(\xi' - 2c_2) = 2c_3(\eta' - 2c_1)$$

nebo-li

$$(\eta' - c_1)^2 = 2c_0\left(\xi' - 2c_2 + \frac{c_1^2}{2c_0}\right), \qquad (6)$$

$$(\xi' - c_2)^2 = 2c_3\left(\eta' - 2c_1 + \frac{c_2^2}{2c_3}\right) \qquad (7)$$

jsou rovnice dvou parabol $\Pi$, $\Pi'$, jež mají osy C, D rovnoběžné s osami A, B parabol $\Gamma$, $\Delta$, leč duté strany křivek $\Pi$ a $\Gamma$, rovněž i křivek $\Pi'$ a $\Delta$ jsou obráceny opak.

Sečteme-li rovnice (6), (7), vznikne rovnice, kterouž uvésti lze ve tvar

$$(\xi' - c_0 - c_2)^2 + (\eta' - c_1 - c_3)^2 = (c_0 - c_2)^2 + (c_1 - c_3)^2; \quad (8)$$

příslušná křivka jest kružnice K, jejížto střed má souřadnice

$$c_0 + c_2, \quad c_1 + c_3,$$

poloměr pak rovná se druhé odmocnině z výrazu

$$(c_0 - c_2)^2 + (c_1 - c_3)^2 = (\overline{c_0c_1} + \overline{c_2c_3})^2 + (\overline{c_1c_2} + \overline{c_3c_4})^2$$
$$= (\overline{c_0c_1} + \overline{c_1o})^2 + (\overline{oc_3} + \overline{c_3c_4})^2 = \overline{oc_0}^2 + \overline{oc_4}^2 = \overline{c_0c_4}^2.$$

Poloměr rovná se tedy vzdálenosti počátku a konce lomené čáry základní.

Na sestrojenou bodů $x$, $y$, $z$ užijme kružnice K a jedné z parabol $\Pi$, $\Pi'$, na př. paraboly $\Pi$ dané rovnicí (6); rovnice tato ukazuje, že osa C paraboly $\Pi$ sjednocuje se s přímkou $c_3c_2$, parametr pak rovná se polovici parametru paraboly $\Gamma$.

Z rovnice (5) vysvitá, že obě křivky K, $\Pi$ obsahují bod, jehožto souřadnice jsou $\xi' = 2c_2$, $\eta' = 2c_1$; parabola $\Pi$ tedy ovšem i bod souměrně k onomu položený vzhledem k ose C, jehožto souřadnice jsou $\xi' = 2c_2$, $\eta' = 0$. Znamenejme onen písmenem $o'$, tento — obsažený v ose A paraboly $\Gamma$ — písmenem $a$; seče-li pak tetiva $ao'$ osu C v bodě $m$, jest

$$\overline{c_2m} = \overline{c_1a} = \overline{oa} - \overline{oc_1} = 2c_2 - c_2 = c_2,$$

$$\overline{am} = \overline{mo'} = \frac{\overline{ao'}}{2} = c_1.$$

Vrchol $e$ paraboly $\Pi$ má souřadnice

$$\xi' = 2c_2 - \frac{c_1^2}{2c_0}, \quad \eta' = c_1;$$

proto

$$\overline{c_3 e} = 2c_2 - \frac{c_1^2}{2c_0} = \overline{c_3 m} - \frac{c_1^2}{2c_0}$$

nebo-li

$$\overline{em} = \frac{c_1^2}{2c_0}.$$

Kolmice, jdoucí středem $s$ kružnice K k ose C paraboly $\Pi$, seče tuto osu v bodě $d$ a osu A paraboly $\Gamma$ v bodě $g$; jest pak

$$\overline{c_2 d} = \overline{c_3 d} - \overline{c_3 c_2} = c_0 + c_2 - c_2 = c_0,$$

$$\overline{ds} = \overline{gs} - \overline{gd} = c_1 + c_3 - c_1 = c_3.$$

Tím určeny jsou křivky K, $\Pi$ úplně; obsahujíce bod $o'$ (jehož poláry vzhledem ku křivkám $\Gamma$, $\Delta$ jdou bodem $o$, ale nesjednocují se) protínají se ještě ve třech bodech $x$, $y$, $z$, hledaných to vrcholech společného polového trojúhelníka parabol $\Gamma, \Delta$.

Nyní jde o to, jak z jednoho takového bodu $x$ odvoditi příslušnou společnou tečnu $T_1$ parabol $\Gamma$, $\Delta$, nechť ostatní dva body $y$, $z$ jsou realné či imaginarné.

Bod $x$ jest jeden vrchol společného polového trojúhelníka parabol $\Gamma$, $\Delta$; protější strana X tohoto trojúhelníka, jsouc polárou bodu $x$ vzhledem k parabole $\Gamma$, seče osu A této paraboly v bodě $t$ tak, že body $x$, $t$ mají od vrcholové tečny $c_1 c_2$ paraboly $\Gamma$ vzdálenosti rovné směru protivného; rozpolovací bod délky $\overline{xt}$ jest proto položen na oné vrcholové tečně $c_1 c_2$. Tečna $T_1$ jest rovnoběžna s přímkou X a rozpoluje vzdálenosť bodu $x$ od přímky X, obsahuje tedy dotčený rozpolovací bod délky $\overline{xt}$. Tečna $T_1$ seče však stranu $c_1 c_2$ lomené čáry základní v bodě $n_1$, jímž určen jest příslušný kořen rovnice (1); bod $n_1$ sjednocuje se tedy s dotčeným rozpolovacím bodem délky $\overline{xt}$. Kořen hledaný jest pak

$$\xi = \frac{\overline{n_1 c_1}}{\overline{c_0 c_1}}.$$

Jak patrno, strojí se bod $n_1$ snadně. Leč netřeba nám ani bodu $n_1$; neboť délka $\overline{n_1 c_1}$ rovná se polovici vzdálenosti $\overline{x\mathrm{A}}$ bodu $x$ od přímky A (vzdálenosti to, jak pořádkem písmen jsme naznačili, měřené od bodu ku přímce). Lze tedy přestati na sestrojení bodu $x$. —

Řešení úlohy záleželo by tedy v konstrukci kružnice K a paraboly $\Pi$. Kružnice strojí se snadně; kdybychom však, řešíce dané rovnice číselné, musili po každé strojiti příslušnou parabolu $\Pi$, nebylo by řešení toto zvláště výhodné. Leč parabola $\Pi$ určena jest, nedbáme-li polohy její, parametrem $2c_0$, jenž visí jen na součiniteli $c_0$ nejvyšší mocnosti neznámé $\xi$. Všecky rovnice, jež by měly rovného součinitele $c_0$, řešiti lze tedy touž parabolou $\Pi$. Poněvadž však každou rovnici, jež by měla jiného součinitele $c'_0$, násobiti lze poměrem $\frac{c_0}{c'_0}$, čímž nabude pak v nejvyšším členu součinitele $c_0$, můžeme veškeré rovnice stupně třetího řešiti jedinou parabolou $\Pi$, kterou hned předem sestrojíme, zvolíce případně parametr její. Jde-li o rovnice číselné

$$\xi^3 + \gamma_1\xi^2 + \gamma_2\xi + \gamma_3 = 0,$$

kde tedy $\gamma_1$, $\gamma_2$, $\gamma_3$ jsou daná čísla, jest nám ještě sestrojiti měřidlo, jehožto délka základní (jednička) rovná se polovici $c_0$ parametru paraboly $\Pi$; součinitelé $\gamma_1$, $\gamma_2$, $\gamma_3$ vyjadřují pak poměry délek $c_1$, $c_2$, $c_3$ k oné základní délce $c_0$.

Dejme tomu, že jsme parabolu $\Pi$ sestrojili a opatřili příslušným měřidlem. Tím zřídili jsme grafickou tabulku k řešení rovnic stupně třetího. Dána-li určitá rovnice, jde jen o to, bychom sestrojili kružnici K a přímku A v náležité poloze k parabole $\Pi$. Relace svrchu vyvozené ukazují, jak při tom jest si počínati. Nejpohodlněji postupujeme takto:

1. Sestrojme tetivu $\overline{ao'}$ paraboly $\Pi$ pravoúhelně k ose C tak, aby polovice této tetivy $\overline{am} = \overline{mo'} = c_1$. Tím ustanovíme bod $o'$ a přímku A. (Ku kontrole můžeme sestrojiti

$$\overline{em} = \frac{c_1^2}{2c_0},$$

t. j. třetí úměrnou k délkám $c_1$, $2c_0$.)

2. Od bodu $m$ přenesme $\overline{md} = -c_2 + c_0$ na osu C a pravoúhelně k ní $\overline{ds} = c_3$. Tím ustanovíme střed kružnice K, tímto středem a bodem $o'$ ustanovena bude kružnice sama.

3. Kružnicí K protněme parabolu $\Pi$ v bodě $x$, ...; znamená-li $\overline{xA}$, ... vzdálenost bodu $x$ od přímky A (ve směru od bodu

ke přímce), jest poměr polovice vzdálenosti $\overline{xA}$, ... k délce základní $c_0$ kořenem $\xi$ rovnice dané.

Jde-li o rovnici číselnou, jest nám změřiti délku $\overline{xA}$ na měřidle; polovice příslušného čísla jest kořenem rovnice.

*Dodavek.* Jestliže v rovnici (1) položíme

$$c_1 = c_2 = 0,$$

vznikne rovnice

$$\xi^3 = -\frac{c_3}{c_0} = -\gamma_3.$$

Parabolou $\Pi$ lze tedy výhodně graficky stanoviti třetí odmocniny. Přímka A sjednocuje se tu s osou C, bod $o'$ s vrcholem $e$ paraboly $\Pi$; mimo to jest

$$\overline{md} = \overline{ed} = c_0,$$

$$\overline{ds} = c_3 = \gamma_3 c_0.$$

Jest-li $f$ ohnisko paraboly $\Pi$, přenesme na osu C délku $\overline{ed} = 2\overline{ef}$ a veďme bodem $d$ přímku $G \perp C$. Jde-li pak o třetí odmocninu daného čísla $\delta = -\gamma_3$, odměřme na měřidle délku $\delta c_0$ a přenesme ji na přímku G tak, aby

$$\overline{ds} = -\delta c_0 = c_3.\text{*)}$$

Kružnicí K, opsanou ze středu s poloměrem $\overline{se}$, protněme parabolu $\Pi$ v bodě $x$ a změřme na měřidle vzdálenost $\overline{xC}$; polovice příslušného čísla jest třetí odmocninou daného čísla $\delta$.

---

# O geometrickém místě os rotací, jimiž lze převésti přímku do libovolné polohy v prostoru.

Napsal

**Miloslav Pelíšek,**

assistent německé vysoké školy technické v Praze.

Buďtež P a P′ dvě mimoběžné přímky, $ab$ libovolná délka na P, $a'b'$ tatáž délka na P′ (obr. 1.), pak jest *úloha* řešena, převedeme-li $ab$ do $a'b'$ jedinou rotací.

*) V konstrukci šetříme tů i znaménka; poněvadž ostatně znaménko třetí odmocniny předem známe, stačí všímati si tu jen prosté velikosti.