Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

# Úlohy

*Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky*, Vol. 49 (1920), No. 4-5, 306--[326]

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108894

*Minima Algolu:* *4.* v $7^h46^m$; *7.* ve $4^h35^m$; *10.* v $1^h24^m$; *12.* ve $22^h13^m$; *15.* v $19^h02^m$; *27.* v $6^h18^m$; *30.* ve $3^h07^m$.

*Létavice:* *8.—14.* Geminidy; rad. $\alpha$ Gemin.; let rychlý, krátký.

*M.*

---

# Úlohy.

## *a)* Z mathematiky.

1.

Do rotačního paraboloidu vepište rotační válec největšího *a)* objemu, *b)* pláště. Srovnejte objemy a pláště obou výsledků.

Prof. *Jiří Archleb.*

Řešení. Od p. *Nechutného* (VI. r. v Plzni).

Osový řez paraboloidu nechť je $y^2 = 2px$. »Základnou« úseku paraboloidu je kruh, jehož rovina je kolmá na osu. Označme jeho poloměr $y_0$. Je-li pak $x_0$ »výška« úseku paraboloidického, platí $y_0^2 = 2py_0$. Rotační válec vepsaný má osu společnou s paraboloidem, jedna základna jeho leží v základně paraboloidu, druhá základna je omezena kružnicí ležící na paraboloidu. Označme $x$ poloměr a $y$ výšku tohoto válce. I bude $y^2 = 2px$. Objem válce $V = \pi y^2 (x_0 - x) = 2\pi px (x_0 - x)$ a nastane maximum pro $x = \frac{1}{2} x_0$ (pak $y = y_0/\sqrt{2}$). Pro plášť válce máme $P = 2\pi y (x_0 - x) = \frac{\pi}{p} (yy_0^2 - y^3)$, ježto $x_0 = y_0^2/2p$, $x = y^2/2p$. Stačí uvažovati funkci $\varphi(y) = yy_0^2 - y^3$. Zde je $\varphi'(y) = y_0^2 - 3y^2$, $\varphi''(y) = -6y$. Ježto $\varphi'(y) = 0$ pro $y = \pm y_0/\sqrt{3}$ a je $\varphi''(y_0/\sqrt{3}) < 0$, nastává pro $y = y_0/\sqrt{3}$ maximum; příslušné $x = \frac{1}{3} x_0$. Objemy obou válců jsou pak v poměru $9:8$, pláště $3\sqrt{3} : 4\sqrt{2} = 9\sqrt{2} : 8\sqrt{3}$.

2.

Odvoďte vztah platný pro úhly v trojúhelníku

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\beta + \gamma) + \sin(\gamma + \alpha) = 2 (\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma + \sin\alpha \sin^2 \tfrac{1}{2}\alpha + \sin\beta \sin^2 \tfrac{1}{2}\beta + \sin\gamma \sin^2 \tfrac{1}{2}\gamma).$$

Dr. *Jaroslav Bílek.*

Řešení zaslal p. *J. Fuchs* (r. g. Náchod):

Ježto $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, platí $\sin(\alpha + \beta) = \sin\gamma$ a podobné dvě rovnice. Užijeme-li známého vztahu

$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma \sin = 4 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma,$$

lze levou stranu psáti ve tvaru

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma+2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma-\tfrac{1}{2}(\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma)$$
$$=2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma+\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma-\sin\alpha\cos\alpha-\sin\beta\cos\beta-$$
$$-\sin\gamma\cos\gamma$$
$$=2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma+\sin\alpha(1-\cos\alpha)+\sin\beta(1-\cos\beta)+$$
$$+\sin\gamma(1-\cos\gamma),$$

z čehož užitím vzorce $1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{1}{2}\alpha$ ihned se obdrží hledaná identita.

3.

**V trojúhelníku $ABC$ jest půdice $AB$ pevná, vrchol $C$ pohybuje se tak, že mezi úhly $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ neustále v platnosti je relace: $\cos\gamma=\cos\alpha\cos\beta$. Jakou křivku opisuje vrchol $C$?**

† *Rudolf Hruša.*

Řešení zaslal p. *J. Fuchs* (r. g. Náchod):

Ježto $\cos\alpha\cos\beta=\cos\gamma=-\cos(\alpha+\beta)=\sin\alpha\sin\beta-\cos\alpha\cos\beta$,

je daná podmínka převedena na vztah $\operatorname{tg}\alpha.\operatorname{tg}\beta=2$.

Půdici $AB$ položme v pravoúhlé souřadnicové soustavě do osy $x$ tak, aby osa $y$ byla její osou souměrnosti. Je-li nyní délka půdice rovna $2c$ a jsou-li souřadnice vrcholu $C$ $x$, $y$, platí

$$\frac{y}{c+x}\cdot\frac{y}{c-x}=2,\quad \text{to jest}\quad \frac{y^2}{2c^2}+\frac{x^2}{c^2}=1,$$

což jest rovnice hledané křivky. Jest to ellipsa, jejíž malá osa jest totožna s půdicí $AB=2c$ a poloosa velká měří $c\sqrt{2}$ (dle Studničky ellipsa rovnoramenná).

4.

**Číslo $N=2^{173}+1$ dá se děliti prvočísly 3 a 4153. Jak se o tom přesvědčíme, znajíce na př. $2^{43}$, avšak nevypočítávajíce přímo $2^{173}$?** Dr. *Jiří Kaván.*

Řešení dle p. autora:

Že číslo dané jest dělitelno třemi, plyne odtud, že součet lichých mocnin $2^{173}+1^{173}$ jest vždy dělitelen součtem příslušných mocnin prvých, t. j. v tomto případu $2+1=3$.

Méně snadný jest důkaz, že jest číslo $N$ dělitelno 4153. Dělíme-li $2^{43}=8796093022208$ (viz Valouchovy tabulky) prvočíslem $p=4153$, dostáváme podíl $q=2118009396$ a zbytek 620. Jest tedy

$2^{43}=pq+620$, a zmocníme-li tuto rovnici 4,

$$2^{172}=(2^{43})^4=p^4q^4+4p^3q^3.620+6p^2q^2.620^2+$$
$$+4pq.620^3+620^4.$$

Všechny členy mnohočlenu na pravé straně poslední rovnice jsou dělitelny číslem $p$, jenom člen poslední $620^4 = 147763360000$ dává, dělen jsa tímto číslem, podíl 35579908 a zbytek 2076.

Týž zbytek 2076 dostaneme tudíž, dělíce $2^{172}$ číslem 4153, t. j. $2^{172} = mp + 2076$, kdež $m$ je celé číslo.

Odtud plyne dále

$2^{173} = 2 \times 2^{172} = 2mp + 4152$ a konečně

$N = 2^{173} + 1 = 2m . 4153 + 4153 = 4153(2m + 1)$,

t. j. dané číslo jest dělitelno 4153.

Užijeme-li kongruencí, jest důkaz pohodlnější. Jest totiž mod. 4153

$$
\begin{aligned}
2^{43} &= 8796093022208 \equiv 620 \\
2^{86} &\equiv 620^2 = 384400 \equiv 2324 \\
2^{172} &\equiv 2324^2 = 5400976 \equiv 2076 \\
2.2^{172} &= 2^{173} \equiv 2 . 2076 = 4152 \\
2^{173} + 1 &\equiv 0 \quad \text{(mod. 4153).}
\end{aligned}
$$

5.

**Ellipsa jest určena svými poloosami; která kružnice s ellipsou soustředná protíná ji pod největším úhlem?**

Prof. *J. Kroupa.*

Řešení. Dle p. *V. Vikára* (VII. g. v Trenčíně):

Jsou li rovnice ellipsy, po případě kružnice $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, $x^2 + y^2 = r^2$, jsou směrnice tečen v bodě průsečném $(x,y)$ k oběma čarám $\frac{b^2x}{a^2y}$, $\frac{x}{y}$, takže jejich úhel jest $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\frac{x}{y} - \frac{b^2x}{a^2y}}{1 + \frac{x}{y} \cdot \frac{b^2x}{a^2y}} = \frac{exy}{a^2b^2}$.

Veličina $\varphi$ jest závislá pouze na $x$ nebo $y$, neboť z rovnice ellipsy lze $x$ neb $y$ vypočísti a do vzorce pro $\operatorname{tg}\varphi$ dosaditi. Pro snadnější počet uvažujme $\operatorname{tg}^2\varphi = \frac{e^2}{a^4b^4} \cdot x^2y^2$. Je-li $\operatorname{tg}\varphi = z$, pak stačí vyšetřovati jen jeho závislost na $x^2y^2$. Z rovnice ellipsy jest $y^2 = \frac{a^2b^2 - b^2x^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$. Vynecháme-li opět konstantu $\frac{b^2}{a^2}$, a dosadíme-li do součinu $x^2y^2$, vyjde $x^2(a^2 - x^2)$, kterýžto výraz derivován dává $2(a^2 - x^2)x - 2x^2$, $x = 0$, aneb $x[2a^2 - 2x^2 - 2x^2] = 0$, z čehož buď $x_1 = 0$ aneb $x_{2,3} = \pm\frac{a}{\sqrt{2}}$. Snadno se přesvědčíme, že pro $x_1$ nastává minimum, pro $x_{2,3}$ pak maximum. Příslušné $y = \pm\frac{b}{\sqrt{2}}$. Kružnice jest $x^2 + y^2 = \frac{a^2 + b^2}{2}$.

6.

**Vypočísti obsah kužele omezeného rotační plochou kuželovou, jejíž osový řez jest pravý úhel. a rovinou protínající plochu kuželovou v ellipse tak, že největší strana kužele jest $a$, nejmenší $b$.** Prof. *J. Kroupa.*

Řešení. Zaslal p. *Z. Horák,* stud. VI. r. v Pardubicích.

Rovina jdoucí největší a nejmenší stranou jest rovinou souměrnosti pro kužel a obsahuje zároveň větší osu základní ellipsy, která jest co do délky $2A = \sqrt{a^2 + b^2}$. Zároveň obsahuje tato rovina hlavní kružnici vepsané koule dle poučky Quetelet-Dandelinovy. Tato hlavní kružnice jest vepsána do pravoúhlého $\triangle$ a dotýká se základny kužele v ohnisku ellipsy. Její poloměr $\varrho = \frac{a + b - 2A}{2}$.

Lineární výstřednost ellipsy vyplývá z rovnice $e = a - \varrho - A$, aneb z rovnice $e = A - (b - \varrho)$, z čehož vychází, že $e = \frac{a - b}{2}$. Menší poloosa $B = \sqrt{A^2 - e^2} = \sqrt{\frac{ab}{2}}$. Jest tedy plocha základní ellipsy

$$Z = \pi \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2} \sqrt{\frac{ab}{2}} = \frac{\pi}{4} \sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{2ab}.$$

K určení výšky kužele stačí použíti téhož pravoúhlého $\triangle$ osového, v němž výška kužele jeví se jako výška pravoúhlého $\triangle$ vedená na přeponu. Je-li tato $v$, menší úsek přepony $x$, větší úsek $2A - x$, pak platí rovnice $v^2 = x(2A - x)$, $b^2 = 2Ax$, z nichž vychází, že

$$v = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Jest tudíž obsah kužele $O = \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{4} \sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{2ab} \cdot \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, z čehož po zjednodušení vyplývá, že

$$O = \tfrac{1}{12} \pi ab \sqrt{2ab}.$$

7.

**Vypočtěte strany trojúhelníka, v němž dán poloměr $R$ kružnice trojúhelníku opsané, součet čtverců stran a jehož strany tvoří posloupnost arithmetickou.** *Karel Lerl.*

Řešení. Zaslala sl. *Blažena Lašťovičková* (VII. r. Vršovice).

Ježto strany trojúhelníku tvoří arithmetickou posloupnost, můžeme je psáti ve tvaru $a - d$, $a$, $a + d$. Součet čtverců stran označme $S$. Pak je

$$S = 3a^2 + 2d^2. \tag{1}$$

Poloměr kružnice opsané $R$ lze vyjádřiti vzorcem

$$R = abc/4P, 4P = \sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)},$$

takže v uvažovaném případě dostaneme

$$R = \frac{a^2 - d^2}{\sqrt{3(a^2 - 4d^2)}}. \qquad (2)$$

Z této rovnice vylučme $d^2$ pomocí (1). Dostaneme

$$R = \frac{5a^2 - S}{2\sqrt{3(7a^2 - 2S)}}. \qquad (3)$$

Odtud po snadné úpravě obdržíme kvadratickou rovnici pro $a^2$:

$$25a^4 - 2(5S + 42R^2)a^2 + S(S + 24R^2) = 0. \qquad (4)$$

Řešením této rovnice vychází

$$a = \tfrac{1}{5}\sqrt{5S + 42R^2 \pm 6R\sqrt{49R^2 - 5S}}. \qquad (5)$$

Vnější odmocninu dlužno bráti kladně, má-li pak býti řešení reálné, musí býti $\quad 49R^2 - 5S \geq 0, \; 5S \leq 49R^2.$ (6)

Z rovnice (1) plyne $d = \sqrt{\frac{1}{2}(S - 3a^2)}$. Dosadíme-li za $a$ vypočtenou hodnotu, obdržíme

$$d = \tfrac{1}{5}\sqrt{5S - 63R^2 \mp 9R\sqrt{49R^2 - 5S}}. \qquad (7)$$

Z (6) plyne, že $5S - 63R^2$ je záporné. Dlužno tedy, aby $d$ bylo reálné, vzíti u vnitřní odmocniny v (7), tedy i v (5), znamení dolní. Dále musí býti, aby vyšlo $d$ reálné $|5S - 63R^2| \leq 9R\sqrt{49R^2 - 5S}$, tedy $(5S - 63R^2)^2 \leq 81R^2(49R^2 - 5S)$. Tak dostáváme podmínku

$$S \leq 9R^2, \qquad (8)$$

žádající více než (6). Při rovnosti v (8) je $d = 0$, hledaný trojúhelník je rovnostranný. Jinak možno u $d$ voliti znamení kladné, ježto volba znamení záporného má za následek pouze záměnu stran $b$, $c$. A také za podmínky (8) je skutečně úloha vždy řešitelna. Z (5) pak totiž plyne, že

$$5(S - 5a^2) = 6R\sqrt{49R^2 - 5S} - 42R^2 < 0,$$

tak že $S < 5a^2$. Z (1) plyne pak $2(d^2 - a^2) = S - 5a^2 < 0$, tak že $d < a$, t. j. strana $a - d$ je skutečně kladná. Známé podmínky, aby bylo možno sestrojiti ze tří úseček trojúhelník, dávají pak v tomto případě požadavek $a > 2d$. I ten je splněn. Ze (2) totiž plyne, $3R^2(a^2 - 4d^2) = (a^2 - d^2)^2 > 0$, tak že skutečně $a^2 > 4d^2$, $a > 2d$.

8.

**Které trojciferné číslo rovná se součtu trojmocí svých číslic?** Prof. *Ant. Lochmann.*

Řešení. Dle p. autora:

Podmínku v úloze obsaženou lze vyjádřiti rovnicí:

$$100x + 100y + z = x^3 + y^3 + z^3. \qquad a)$$

Pro $z = 0, 1, 4, 5, 6, 9$ jest $z^3 \equiv z \pmod{10}$ a rovnici $a)$ lze nahraditi shodou 1.) $x^3 + x^3 \equiv 0 \pmod{10}$

Pro $z = 2, 3, 7, 8$ jest $z^3 \equiv -z \pmod{10}$ a z rovnice $a)$ obdržíme shodu $x^3 + y^3 \equiv 2z \pmod{10}$ anebo (ježto $2z \equiv 4 \pmod{10}$ neb $2z \equiv 6 \pmod{10}$) též shody dvě

2.) $x^3 + y^3 \equiv 4 \pmod{10}$
3.) $x^3 + y^3 \equiv 6 \pmod{10}$.

Jednotky trojmocí všech jednociferných čísel jsou opět čísla od 0—9 a každé se vyskytuje jen jednou. Proto přísluší určitému $x$ v každé shodě jen jediné $y$. Poněvadž však všech různých čísel pro $x$ jest 9 (1—9), dostáváme pro každou shodu 9 různých dvojic $x$, $y$ a tudíž celkem pro tři různé shody $3 \times 9 = 27$ různých dvojic.

$x^3 + y^3 \equiv 0 \pmod{10}$: 1, 9; 2, 8; 3,7; 4, 6; 5, 5; 6, 4; 7, 3; 8, 2; 9, 1.
$x^3 + y^3 \equiv 4 \pmod{10}$: 1, 7; 2, 6; 3,3; 4, 0; 5, 9; 6, 2; 7, 1; 8, 8; 9, 5.
$x^3 + y^3 \equiv 6 \pmod{10}$: 1, 5; 2, 2; 3,9; 4, 8; 5, 1; 6, 0; 7, 7; 8, 4; 9, 3.

Sestavme ještě tabulku hodnot výrazu $z^3 - z$ pro $z = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$.

| $z$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $z^3 - z$ | 0 | 0 | 6 | 24 | 60 | 120 | 210 | 336 | 504 | 720 |

Z rovnice $a)$ plyne:

$$100x + 10y - (x^3 + y^3) = z^3 - z.$$

Z uvedených 27 různých párů $(x, y)$ vyhovují dané úloze jen ony páry, pro něž výraz $100x + 10y - (x^3 + y^3)$ rovná se některé z hodnot $(z^3 - z)$.

Zkoumáním seznáme, že toliko páry: 3, 7; 4, 0; 1, 5 vyhovují vytknuté podmínce. Tak jest pro pár:

3, 7: $370 - (3^3 + 7^3) - 0$; $z = 0$, $z = 1$
trojcif. čísla: 370, 371.

4, 0: $400 - (4^3 - 0^3) = 336$; $z = 7$;
trojcif. číslo: 407.

1, 5: $150 - (1^3 + 5^3) = 24$; $z = 3$;
trojcif. čísto: 153.

Jsou tedy hledaná trojciferná čísla čtyři:

370, 371, 407, 153.

9.

**Řešte soustavu rovnic** $x + y - z = a$, $x^2 + y^2 - z^2 = b$, $x^3 + y^3 - z^3 = c$. **(Na př.** $a = -1$, $b = -2$, $c = -3$.**)**

† *Jar. Pilnáček.*

Řešení. Zaslala sl. *Blaž. Lašťovičková* (VII. r. ve Vršovicích). Dané rovnice označme (1), (2), (3). Z první rovnice plyne

$$x + y = a + z. \tag{4}$$

Když tuto rovnici zdvojmocníme a odečteme od ní rovnici (2), vyjde

$$2xy - 2az = a^2 - b. \tag{5}$$

Když rovnici (4) ztrojmocníme a odečteme od ní rovnici (3), vyjde

$$c - a^3 + 3xy(x + y) = 3a^2z + az^2$$

aneb vzhledem k rovnici (4)

$$3xy(a + z) - 3az(a + z) = a^3 - c. \tag{6}$$

Vyloučíme-li z rovnic (5), (6) výraz $xy$, vyjde jediná rovnice pro $z$, která je dle $z$ lineární; z ní:

$$z = \frac{3ab - 2c - a^3}{3(a^2 - b)}. \tag{7}$$

Dosazením této hodnoty do rovnice (5) dostaneme

$$2xy = \frac{a^4 + 3b^2 - 4ac}{3(a^2 - b)} \tag{8}$$

a dosazením do rovnice (4) dostaneme

$$x + y = \frac{2(a^3 - c)}{3(a^2 - b)}. \tag{9}$$

Rovnice (8), (9) řeší se již známým způsobem.

Pro $a = -1$, $b = -2$, $c = -3$ jest

$$x = \frac{4 \pm i\sqrt{2}}{18}, \quad y = \frac{4 - i\sqrt{2}}{18}, \quad z = \frac{13}{9}.$$

Je-li $a^2 - b \neq 0$, t. j. $b \neq a^2$, je (7) určeno jednoznačně pomocí (7).

Je-li $a^2 - b = 0$, t. j. $b = a^2$ a též $3ab - 2c - a^3 = 0$, t. j. $c = a^3$, lze voliti zcela libovolně. $x$, $y$ se pak určí ze (4), (5): buď $x = a$, $y = z$, neb $x = z$, $y = -a$.

10.

**Je-li v trojúhelníku $\beta - \gamma = \frac{1}{2}\pi$, dokaž, že platí vztah**

$$\frac{2}{a^2} = \frac{1}{(b + c)^2} + \frac{1}{(b - c)^2}.$$

Prof. *Pleskot.*

Řešení. Zaslal p. *J. Fuchs* (r. g. Náchod). Napišme věty Cagnoliovy:

$$a : (b + c) = \sin\frac{\alpha}{2} : \cos\frac{\beta - \gamma}{2},$$

$$a : (b + c) = \cos\frac{\alpha}{2} : \sin\frac{\beta - \gamma}{2}.$$

Jelikož

$$\sin\frac{\beta-\gamma}{2}=\cos\frac{\beta-\gamma}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

platí

$$\frac{a^2}{(b+c)^2}=2\sin^2\frac{\alpha}{2},\quad \frac{a^2}{(b-c)^2}=2\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

a po sloučení

$$\frac{2}{a^2}=\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}.$$

11.

**Daným bodem $A'$ na pobočné hraně $AD$ pravidelného trojbokého jehlanu (podstavná hrana $a$, úhel pobočných hran $\alpha$) vésti rovinný řez nejmenšího obvodu, stanoviti jeho obsah a odchylku od podstavy.** Prof. *E. Pleva.*

Řešení, Zaslal p. *J. Slaný* (VI. r. v Plzni).

Protneme-li plášť jehlanu rovinou jdoucí bodem $A'(\overline{A'D}=m)$ v trojúhelníku $A'B'C'$ a rozvineme-li plášť od hrany $AD$ počínaje do roviny, přejde průsečný trojúhelník v lomenou čáru $A'B'C'A''$ o délce rovné obvodu trojúhelníku průsečného. Obvod ten bude tedy minimální, přejde-li lomená čára $A'B'C'A''$ v přímku. V rozvinutí bude pak trojúhelník $DA'(B'C')A''$ rovnoramenný. Též průsečný trojúhelník $A'B'C'$ bude rovnoramenný. Je-li $\alpha$ úhel pobočných hran, $\overline{A'B'}=\overline{C'A'}=x$, bude plynouti z $\triangle A''C'D$, v němž proti $m$ je úhel $90^0+\alpha$, $x:m=\sin\alpha:\cos\frac{1}{2}\alpha$, tedy $x=2m\sin\frac{1}{2}\alpha$. Označíme-li $\overline{B'C'}=y$, výšku trojúhelníku $A'A''D$ pak $t$, bude $t=m\cos\frac{1}{2}\alpha$, $y=2t\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha=2m\cos\frac{3}{2}\alpha\operatorname{tg}\alpha$. Označíme-li $\vartheta$ úhel vrcholový v průsečném trojúhelníku $A'B'C'$, bude $\sin\frac{1}{2}\vartheta=\frac{y}{2_x}=\frac{1}{2}\frac{\cos\frac{3}{2}\alpha}{\cos\frac{1}{2}\alpha}$. Plocha tohoto trojúhelníku pak bude $\frac{1}{2}x^2\sin\vartheta=2m^2\sin^2\frac{1}{2}\alpha\sin\vartheta$.

Abychom určili odchylku $\varphi$ roviny $A'B'C'$ od základny $A'BC$ veďme hranou $A'D$ rovinu rovnoběžnou se základnou daného jehlanu. Ta protne jehlan v trojúhelníku $A'B_0C_0$ a rovinu minimálního řezu v přímce $p$. Úhel těchto dvou rovin $\varphi$ určíme ze sferického trojúhelníku příslušného k trojhranu $A'B_0$, $A'B'$, $p$. (o stěnách $A'B'C'$, $A'B_0C_0$, $A'B_0B$). Strany jeho jsou $\sphericalangle pA'B'=90^0-\frac{1}{2}\vartheta$, $\sphericalangle pA'B_0=60^0$, $\sphericalangle B_0A'B'$, o němž snadno zjistíme, že $=\alpha$ (na rozvinutém plášti je $B_0A'B'$ obvodovým úhlem, příslušný středový je $B_0DA''=2\alpha$). $\varphi$ je úhel onoho sferického trojúhelníku ležící proti straně $\sphericalangle B_0A'B'$. I bude dle věty cosinové

$$\cos\varphi = \frac{\cos\alpha - \cos 60^0 \cos(90^0 - \frac{1}{2}\vartheta)}{\sin(90^0 - \frac{1}{2}\vartheta)\sin 60^0} = \frac{2\cos\alpha - \sin\frac{1}{2}\vartheta}{\sqrt{2}\cos\frac{1}{2}\vartheta} =$$

$$= \frac{\sin\frac{3}{2}\alpha}{2\sqrt{2}\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\vartheta},$$ dosadíme-li výraz dříve pro $\sin\frac{1}{2}\vartheta$ nalezený a užijeme vzorců pro $\cos\frac{3}{2}\vartheta$ a $\sin\frac{3}{2}\vartheta$.

Jednodušší je výraz pro $\operatorname{tg}\varphi$. Uvážíme-li že je též $\sin\frac{1}{2}\vartheta = \frac{1}{2}(2\cos\alpha - 1)$, $\cos\frac{1}{2}\vartheta = \frac{1}{2}\sqrt{-4\cos^2\alpha + 4\cos\alpha + 3}$, dostaneme

$$\cos\varphi = \frac{2\cos\alpha + 1}{\sqrt{3(3 + 4\cos\alpha - 4\cos^2)}},\quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{\sqrt{8 + 8\cos\alpha - 16\cos^2\alpha}}{2\cos\alpha + 1}$$

$$= \frac{4\sqrt{\cos^2\frac{1}{2}\alpha - \cos^2\alpha}}{2\cos\alpha + 1} = 4\sqrt{\frac{\sin^3\frac{1}{2}\alpha}{\sin\frac{3}{2}\alpha}}.$$

Omezení: $\alpha$ musí býti $< 60^0$.

## 12.

**Dokažte, že ve čtyřúhelníku tetivovém, jehož úhlopříčky stojí na sobě kolmo, jest průměr závislý na protějších stranách tak, že jest úhlopříčkou obdélníka, jehož rozměry jsou protější strany čtyřúhelníka.** Prof. *E. Pleva.*

Řešení. Zaslal p. *J. Fuchs* (r. g. Náchod).

Vrcholy čtyřúhelníka buďtež $ABCD$. V opsané kružnici veďme průměr $\overline{AM}$. Pak tětiva $\overline{CM}$ jest rovnoběžna s úhlopříčkou $\overline{BD}$, z čehož plyne $\overline{BM} = \overline{CD}$ a $\overline{DM} = \overline{BC}$. Dále platí $\overline{AB}^2 + \overline{BM}^2 = \overline{DA}^2 + \overline{DM}^2 = 4r^2$ a tedy $\overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{DA}^2 = 4r^2$, čímž jest relace dokázána.

## 13.

**V pravidelném hranolu $2n$-bokém promítněte ze středu jedné podstavy sudé vrcholy druhé podstavy $n$-hranem, a podobně liché vrcholy první podstavy ze středu druhé. Jak velká část obsahu celého hranolu je omezena oběma mnohohrany?** Prof. *Jan Schuster.*

Řešení. Zaslal p. *Jaroslav Slaný*, stud. VI. tř. r. v Plzni.

**Promítneme-li vrcholy hranolu ze středu obou podstav naznačeným způsobem, vzniknou tím dva pravidelné jehlany $n$-boké, jež se pronikají a to tak, že pobočná hrana jednoho protíná pobočnou stěnu druhého v bodě, jenž leží na výšce stěny pobočné. Těleso tak vzniklé je omezeno $2n$ stěnami, shodnými to deltoidy. Spojíme-li všechny vrcholy tohoto tělesa se středem daného hranolu, rozpadne**

se na $2n$ shodných jehlanů. Jedná se o stanovení objemu $k$ takového jehlanu. Za tím účelem proložme výškou hranolu a jednou hranou rovinu a všimněme si trojúhelníku při tom vzniklého, jehož stranami jsou: výška hranolu $v$, jedna strana $a$ a úhlopříčka deltoidu $b$. V něm proti straně $a$ leží úhel $\alpha$; proti $b$, $\beta$; proti $v$, $\gamma$. Označíme-li $r$ poloměr kružnice opsané, $\varrho = r\cos\omega$ poloměr kružnice vepsané základně, $\omega = 180^0/n$, máme $\operatorname{tg}\alpha = \varrho/v = r\cos\omega/v$, $\operatorname{tg}\beta = r/v$;

$$\sin\alpha = \frac{r\cos\omega}{\sqrt{v^2 + r^2\cos^2\omega}}, \quad \cos\alpha = \frac{v}{\sqrt{v^2 + r^2\cos\omega^2}},$$

$$\sin\beta = \frac{r}{\sqrt{v^2 + r^2}}, \quad \cos\beta = \frac{v}{\sqrt{v^2 + r^2}},$$

$$\sin\gamma = \sin(\alpha + \beta) = \frac{rv(1 + \cos\omega)}{\sqrt{v^2 + r^2}\sqrt{v^2 + r^2\cos^2\omega}}$$

a tedy

$$a = \frac{v\sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{\sqrt{v^2 + r^2\cos\omega}}{1 + \cos\omega}, \quad b = \frac{v\sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{\sqrt{v^2 + r^2\cos^2\omega}}{1 + \cos\omega}.$$

Druhou úhlopříčku $c$ deltoidu určíme na základě té okolnosti, že v pobočné stěně $n$-bokého jehlanu je rovnoběžná se stranou $n$-úhelníku v základně (o délce $2r\sin\omega$), tak že platí úměra $c : a = 2r\sin\omega : s$, značí-li $s$ hranu pobočnou pravidelného jehlanu $n$-bokého. Ježto $s = \sqrt{v^2 + r^2}$, bude $c = \dfrac{2r\sin\omega\cos\omega}{1 + \cos\omega}$. Je pak $k = \frac{1}{6}bch$, při čemž $h$ značí vzdálenost středu tělesa od deltoidické stěny; $h$ je však též vzdálenost středu výšky od úhlopříčky deltoidu. Na základě toho lze pak $h$ stanoviti z trojúhelníku již uvažovaného

$$h = \tfrac{1}{2}v\sin\alpha = \frac{vr\cos\omega}{\sqrt{v^2 + r^2\cos^2\omega}} \quad \text{a tedy} \quad k = \frac{vr^2\sin\omega\cos^2\omega}{6(1 + \cos\omega)^2}.$$

Objem uvažovaného tělesa pak bude

$$K_1 = \tfrac{1}{3}nr^2v\sin\omega\left(\frac{\cos\omega}{1 + \cos\omega}\right)^2$$

a ježto objem hranolu je $K_0 = nr^2\sin\omega$, máme poměr

$$K_1 : K_0 = \tfrac{1}{3}\left(\frac{\cos\omega}{1 + \cos\omega}\right)^2.$$

$n$ musí býti $\geq 3$. Roste-li $n$ do nekonečna, má $\omega$ za limitu 0 a poměr $K_1 : K_0$ za limitu $1/12$. Hranol přejde ve válec, onen vepsaný $2n$ stěn ve dvojkužel.

## 14.

**Sečísti řady $1^2\sin x + 2^2\sin 2x + 3^2\sin 3x + \ldots$, $1^2\cos x + 2^2\cos 2x + 3^2\cos 3x + \ldots$** Dr. *J. Štěpánek*, Tábor.

Řešení. Zaslal p. *J. Fuchs* (r. g. Náchod).

Nekonečné řady $1^2 \sin x + 2^2 \sin 2x + 3^2 \sin 3x + \ldots$, $1^2 \cos x + 2^2 \cos 2x + 3^2 \cos 3x + \ldots$ obecně nekonvergují (jich členy nemají za limitu nullu). Ustanovíme tedy součty řad konečných

$$F(x) = 1^2 \cos x + 2^2 \cos 2x + 3^2 \cos 3x + \ldots + n^2 \cos nx$$
$$G(x) = 1^2 \sin x + 2^2 \sin 2x + 3^2 \sin 3x + \ldots + n^2 \sin nx.$$

Klademe-li

$$f(x) = \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \ldots + \cos nx$$
$$g(x) = \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \ldots + \sin nx.$$

bude $\qquad F(x) = -f''(x), \qquad G(x) = -g''(x).$

Abychom určili $f(x)$ násobme $2 \sin \frac{1}{2} x$. Obdržíme

$$2 \sin \tfrac{1}{2} x \, f(x) = 2 \sin \tfrac{1}{2} x \cos x + 2 \sin \tfrac{1}{2} x \cos 2x + $$
$$+ 2 \sin \tfrac{1}{2} x \cos 3x + \ldots + 2 \sin \tfrac{1}{2} \cos nx$$
$$= (\sin \tfrac{3}{2} x - \sin \tfrac{1}{2} x) + (\sin \tfrac{5}{2} x - \sin \tfrac{3}{2} x) + \ldots +$$
$$+ (\sin (n + \tfrac{1}{2}) x \sin (n - \tfrac{1}{2}) x) = \sin (n + \tfrac{1}{2}) x - \sin \tfrac{1}{2} x,$$

kdež užito vzorce $2 \sin \alpha \cos \beta = \sin (\alpha + \beta) - \sin (\alpha - \beta)$.

Bude tedy

$$f(x) = \frac{\sin (n + \frac{1}{2}) x - \sin \frac{1}{2} x}{2 \sin \frac{1}{2} x} = \frac{\sin (n + \frac{1}{2}) x}{2 \sin \frac{1}{2} x} - \frac{1}{2}$$

a též $f(x) = \dfrac{\sin \frac{n}{2} x \cos \frac{n+1}{2} x}{\sin \frac{1}{2} x}$.

Užijeme však raději výrazu předešlého. Dostaneme

$$f'(x) = \frac{(n + \frac{1}{2}) \cos (n + \frac{1}{2}) x \sin \frac{1}{2} x - \sin (n + \frac{1}{2}) x \,.\, \frac{1}{2} \cos \frac{1}{2} x}{2 \sin^2 \frac{1}{2} x}$$

$$= \frac{n \cos (n + \frac{1}{2}) x \sin \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} [\sin (n + \frac{1}{2}) x \cos \frac{1}{2} x - \cos (n + \frac{1}{2}) x \sin \frac{1}{2} x]}{2 \sin^2 \frac{1}{2} x}$$

$$f'(x) = \frac{n \cos (n + \frac{1}{2}) x}{2 \sin \frac{1}{2} x} - \frac{\sin nx}{4 \sin^2 \frac{1}{2} x}$$

$$f''(x) = -\frac{n}{2} \cdot \frac{(n + \frac{1}{2}) \sin (n + \frac{1}{2}) x \sin \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \cos \frac{1}{2} x \cos (n + \frac{1}{2}) x}{\sin^2 \frac{1}{2} x}$$
$$- \frac{1}{4} \frac{n \cos nx}{\sin^2 \frac{1}{2} x} + \frac{1}{4} \frac{\sin nx \cos \frac{1}{2} x}{\sin^3 \frac{1}{2} x}$$

a odtud po snadné úpravě

$$f''(x) = -n^2 \frac{\sin (n + \frac{1}{2}) x}{2 \sin \frac{1}{2} x} - n \frac{\cos nx}{2 \sin^2 \frac{1}{2} x} + \frac{\sin nx \cos \frac{1}{2} x}{\sin^3 \frac{1}{2} x}.$$

$F(x)$ se pak dostane prostou změnou znamének.

Abychom určili $g(x)$ násobme zase $2\sin\frac{1}{2}x$. Dostaneme

$$2\sin\tfrac{1}{2}x\,g(x) = 2\sin\tfrac{1}{2}x\sin x + 2\sin\tfrac{1}{2}x\sin 2x + 2\sin\tfrac{1}{2}x\sin 3x + \\ + \ldots + 2\sin\tfrac{1}{2}x\sin nx$$

$$= (\cos\tfrac{1}{2}x - \cos\tfrac{3}{2}x) + (\cos\tfrac{3}{2}x - \cos\tfrac{1}{2}x) + \\ + \ldots + (\cos(n-\tfrac{1}{2})x - \cos(x+\tfrac{1}{2})n)$$

$= \cos\frac{1}{2}x - \cos(n+\frac{1}{2})x$, užije-li se vzorce

$$2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta).$$

Bude tedy

$$g(x) = \frac{\cos\frac{1}{2}x - \cos(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{1}{2}x} = \frac{\sin\frac{n+1}{2}x\sin\frac{n}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x}.$$

$$g'(x) = m\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{1}{2}x} - \frac{\sin^2\frac{1}{2}nx}{\sin^2\frac{1}{2}x}$$

$$g''(x) = n^2\frac{\cos(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{1}{2}x} - n\frac{\sin nx}{2\sin^2\frac{1}{2}x} + \frac{\sin^2\frac{1}{2}nx\cos\frac{1}{2}x}{2\sin^3\frac{1}{2}x}.$$

$G(x)$ se pak zase dostane z $g''(x)$ prostou záměnou znamení.

## 15.

**Do ellipsy s poloosami $ab$ jest vepsán kosočtverec, jehož vrchly splývají s vrcholy ellipsy. Do kosočtverce je vepsána maksimální ellipsa souosá, do ní opět kosočtverec atd. Stanoviti jest součet ploch kosočtverců a ellips.** Dr. *J. Zahradníček.*

Řešení. Zaslal p. *J. Fuchs* (r. g. Náchod).

Ellipsa budiž dána rovnicí $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. Pak strana vepsaného kosočtverce, ležící v kladné čtvrti, jest určena přímkou o rovnici $bx + ay = ab$ (1). Tato přímka má se dotýkati ellipsy, jejíž rovnice nechť je $b_1^2x^2 + a_1^2y^2 = a_1^2b_1^2$ (2). Průsečíky přímky a ellipsy musí splňovati obě rovnice (1), (2). Eliminací $y$ dostaneme kvadratickou rovnici pro $x$ a má-li se přímka dotýkati ellipsy, musí míti tato rovnice dva kořeny splývající, t. j. její diskriminant musí se rovnati nulle. Tak dostaneme podmínku $a^2b_1^2 + b^2a_1^2 = a^2b^2$; odtud $b_1^2 = b^2(a^2 - a_1^2)/a^2$. I je čtverec plochy ellipsy vepsané do kosočtverce $z = \frac{\pi^2b^2}{a^2}a_1^2(a^2 - a_1^2)$. Tato funkce může nabýti maksima jen tehdy, je-li $\frac{dz}{da_1} = \frac{2\pi^2b^2}{a^2}a_1(a^2 - 2a_1^2) = 0$, t. j. pro $a_1 = 0$, $a_1 = a\sqrt{2}$. Ježto $\frac{d^2z}{da_1^2} = \frac{2\pi b^2}{a^2}(a^2 - 6a_1^2)$ jen pro $a_1 = a/\sqrt{2}$ je $< 0$, nastává maksimum pro tuto hodnotu. Pak $b_1 = b/\sqrt{2}$. Délky puloos dalších ellips vepisovaných jsou pak $a_2 = \frac{1}{2}a$, $b_2 = \frac{1}{2}b$;

$a_3 = a/2\sqrt{2}$, $b_3 = b2\sqrt{2}$; ... Je tudíž součet ploch všech ellips $\pi ab + \frac{1}{2}\pi ab + \frac{1}{4}\pi ab + \ldots = 2\pi ab$, což jest dvojnásobná plocha dané ellipsy a součet ploch kosočtverců $2ab + ab + \frac{1}{2}ab + \ldots = 4ab$, což jest dvojnásobná plocha prvního kosočtverce.

## *b*) Z deskriptivní geometrie.

### 1.

**Třemi mimoběžkami proložiti roviny tvořící pravoúhlý trojhran.** Dr. *Josef Klíma.*

Řešení. Zaslal p. *Jar. Fuchs*, stud. r. g. v Náchodě.

Na mimoběžce $c$ vytkněme dva body $A$, $B$ a jimi veďme rovnoběžky $a'$, $b'$ s mimoběžkami $a$, $b$. Nad přímkami $a'$, $c$, $b$ sestrojme pravoúhlý trojhran, jenž bude pošinutým trojhranem hledaným. Pravoúhlost trojhranu vyžaduje, aby vrchol $V'$ ležel na kouli nad průměrem $\overline{AB}$. Rovina proložená bodem $A$ kolmo k přímce $b'$ jest zároveň kolmá ke stěně trojhranu a tudíž musí obsahovati hranu trojhranu $\overline{AV'}$; podobně rovina jdoucí bodem $B$ kolmo k přímce $a'$ obsahuje hranu $BV'$. Jsou tedy průsečíky průsečných kružnic těchto dvou rovin s koulí vrcholy trojhranu $V'_1$, $V'_2$. Pošinutím trojhranových stěn, jdoucích přímkami $a'$, $b'$ do mimoběžek $a$, $b$ obdržíme zároveň s rovinou, procházející přímkou $c$, hledaný trojhran. Úloha obecně dvojznačná.

Pozn. redakce. Možno též libov. bodem $M$ v prostoru sestrojiti rovnoběžky $a'$, $b'$, $c'$ s danými mimoběžkami $a$, $b$, $c$ a trojhranu $a'b'c'$ opsati trojhran pravoúhlý, s jehož stěnami jsou stěny hledaného trojhranu rovnoběžné. Hrana $m$ trojhranu pravoúhlého opsaného trojhranu $a'b'c'$, jež je protější k stěně jdoucí hranou $a'$, musí býti 1. na orthogonálném kuželi, jejž vytvořuje průsečnice rovin vzájemně kolmých a jdoucích přímkami $b'$, $c'$ a 2. v rovině kolmé k hraně $a'$. Hrany ty jsou dvě obecně a proto úloha dvojznačná.

### 2.

**Dvěma body proložiti v prostoru kružnici protínající *a*) dvě rovnoběžky, *b*) dvě různoběžky.** Dr. *Josef Klíma.*

Řešení. Zaslal p. *Jaroslav Slaný*, stud. VI. tř. I. r. v Plzni.

Řešme úlohu $a$) i $b$) společně rozumějíce přímkami $a$, $b$ rovnoběžky nebo různoběžky. Průsečík přímky, vedené danými body $A$, $B$ s rovinou $\varrho$, určenou danými přímkami $a$, $b$, budiž $S$. Nalezneme-li nyní v rovině $\varrho$ takovou přímku, procházející bodem $S$ a protínající přímky $a$, $b$ v bodech $M$ a $N$, že platí vztah $\overline{SM}\,.\,\overline{SN} = \overline{SA}\,.\,\overline{SB} = r^2$

kdež $r$ dá se sestrojiti ze známých délek $\overline{SA}$, $\overline{SB}$, nalezli jsme v bodech $M$ a $N$ průsečné body hledané kružnice s přímkami $a$ a $b$. Opišme proto v rovině $\varrho$ kol bodu $S$ kružnici $k$ poloměru $r$. Veškeré body přímky $a$ mají vzhledem ke kružnici $k$, jako ke kružnici inversní, své invesní body na kružnici $a'$ a průsečíky této s přímkou $b$ — neexistují-li, jest úloha neřešitelna — jsou body $N_1$, $N_2$, jež spolu s body $A$, $B$ dávají obecně dvě kružnice vyhovující úloze.

Jiné řešení úlohy $a$) zaslal p. *Jarosl. Fuchs*, st. r. g. v Náchodě. Veďme bodem $S$ paprsky, jež protnou rovnoběžky $a$, $b$ v bodech $M_0$, $M_1$, . . ., $N_0$, $N_1$, . . . a hledejme na nich body $X_0$, $X_1$, . . . tak, že jsou splněny podmínky $\overline{SX}_0^2 = \overline{SM}_0 \,.\, \overline{SN}_0$, $\overline{SX}_1^2 = \overline{SM}_1 \,.\, \overline{SN}_1$ . . . Platí $\overline{SM}_0 : \overline{SM}_1 = \overline{SN}_0 : \overline{SN}_1$, čili spojením prvých dvou podmínek $\overline{SX}_0 : \overline{SX}_1 = \overline{SM}_0 : \overline{SM}_1$, odkudž jest zřejmo, že body $X_0$, $X_1$, . . . vyplňují přímku rovnoběžnou s rovnoběžkami $a$, $b$. Spojnice bodu $S$ s průsečíky této přímky s kružnicí $k$ protnou rovnoběžky $a$, $b$ ve výsledných bodech $M_1$. $M_2$, $N_1$, $N_2$.

Pozn. redakce. Též v případě $b$) dá se určiti geom. místo bodů $X$ stejně definovaných jaho v předchezím a sice je to hyperbola mající v bodě $S$ střed a asymptoty rovnoběžné s přímkami $a$, $b$.

3.

Jest sestrojiti rotační plochu kuželovou, určenou rovinou, jež seče plochu v rovnoosé hyperbole, osou $o$ a bodem povrchu $M$.

Prof. *E. Pleva.*

Řešení. Zaslal p. *Jar. Fuchs*, stud. r. g. v Náchodě.

Rovina hyperbolického průseku budiž $\sigma$, její průsečík s osou kužele $P$. Přímky $a$, $b$ vedené bodem $P$ v rovině $\sigma$ tak, že svírají spolu pravý úhel a přímka, jež jest pravoúhlým průmětem kuželové osy do roviny $\sigma$, jest jich symetrálou, jsou rovnoběžny s asymptotami rovnoosé hyperboly, a tedy kužel již jednou z nich určený jest pošinutým kuželem hledaným. Zbývá pošinouti jej, aby daný bod $M$ ležel na jeho ploše: sestrojíme povrchovou kružnici kužele, procházející bodem $M$. Jejími průsečíky s rovinou, proloženou kuželovou osou a přímkou $a$ vedeme rovnoběžky s přímkou $a$, jež protnou kuželovou osu ve hledaných vrcholech $V_1$, $V_2$. Dvě řešení.

## $c$) Z fysiky.

1.

**Vodorovná kruhová deska o průměru 10 *cm* se otáčí ve vodorovné rovině kolem svého středu, rovnoměrně tak, že doba jednoho oběhu je 4 vteřiny. Při tom běží po ní podél jednoho průměru moucha od jednoho kraje desky k druhému, rovno-**

**měrně vzhledem k desce a proběhne celý průměr právě za dobu jedné otočky, t j. 4 vteřiny. Jaká je skutečná dráha mouchy a která jest její největší a nejmenší rychlost vzhledem k pevnému okolnímu prostoru?**

(*B. K.* dle vstupní zkoušky na londýnské universitě.)

Řešení, jež zaslal p. *Jar. Fuchs* z r. g. v Náchodě.

Ze snadné konstrukce poznáme, že dráha mouchy vzhledem k okolnímu prostoru je Archimedovou spirálou.

Rychost mouchy vzhledem k desce je $c = 2a/T$, zveme-li poloměr desky $a$, dobu jedné otočky $T$, numericky $c = 2{\cdot}5\ cm/sec$. Uhlová rychlost desky jest $\omega = 2\pi/T$ a rychlost místa ve kterém se moucha právě nachází, $v = r\,.\,\omega$, je-li $r$ okamžitá vzdálenost její od středu. Ježto jsou $c$ a $v$ neustále na sobě kolmé, platí pro absolutní rychlost $V$ mouchy $V^2 = v^2 + c^2$. Pro stálé $c$ je $V$ největší a nejmenší současně s $v$, tedy největší na okraji desky pro $v = a\,.\,\omega = a\,2\pi/T$ a to

$$V = 2a/T\sqrt{1 + \pi^2} = 8{\cdot}24\ cm/sec$$

a nejmenší pro střed desky ($r = 0$, $v = 0$) a to $V = c = 2{\cdot}5\ cm/sec$. Rovnici spirály při postupu mouchy ke středu desky získáváme jakožto

$$r = a - ct = a - \frac{a}{\pi}\varphi,$$

při pohybu dalším pak

$$r = ct = \frac{a}{\pi}\varphi,$$

kde $t$ je proměnlivý čas a $\varphi$ úhel, který svírá průměr, po němž se moucha pohybuje, se svou původní polohou v čase $t = 0$, kdy právě moucha byla na okraji desky.

2.

**K homogenní tyči *AB*, 40 *cm* dlouhé, jež se může otáčeti ve vertikální rovině kolem konce *A*, jest v *B* přivázána nit, která jest vedena přes kladku *C* a zatížena na svém konci závažím 1 *kg*. Je-li *BC* horizontální a má-li kolmice *AD* spuštěná z *A* na zpětné prodloužení horizontály *BC* délku 20 *cm*, najděte váhu tyče a velikost i směr reakce v bodě otáčecím *A*.**

(*B. K.* dle vstupní zkoušky na londýnské universitě.)

Řešení, jež zaslal p. *Emil Fišer* ze VI. r. v Plzni.

Síla $P$, jež se rovná váze tyče a působí vertikálně dolů v jejím středu čili těžišti, má vzhledem k otáčecímu bodu $B$ otáčivý moment $Pp$, kde rameno síly $p = \frac{1}{2}\overline{BD} = \overline{BE}$, zveme-li $E$ bod půlící přímku $\overline{BD}$. Tento moment musí se rovnati otáčivému momentu od napětí niti $Q = 1\,kg$, kterýž sám jest $Q\,.\,\overline{AD}$. Vypočteme-li $\overline{BE}$ pomocí $\sphericalangle ABD = 30^0$, plyne ze vztahu

$$P\,.\,\overline{BE} = Q\,.\,\overline{AD} \qquad P = 1{\cdot}1547\,kg.$$

Abychom vypočetli reakci $R$ v bodě $A$, rozložme $P$ na vertikální složky $\frac{1}{2}P$ působící v bodech $A$ a $B$. Složíme-li v bodě $B$ sílu $\frac{1}{2}P$ a (horizontální) napětí niti $S$ $(= 1\,kg)$, musí výslednice míti směr tyče, má-li býti rovnováha. (Také z tohoto vztahu $\frac{1}{2}P = S \operatorname{tg} 30^0$ jsme mohli počítati $P = 2 \operatorname{tg} 30^0$) Tuto výslednici přenesme podél tyče do bodu $A$ a složme s vertikální sílou $\frac{1}{2}P$ tam působící.

Výslednice má tutéž velikost a opačný směr než reakce, která v tomto bodě působíc ji drží rovnováhu. Tak nalezneme že reakce má velikost $1{\cdot}527\,kg$ a sklon k horizontále $49^0 6'$.

Jinak jsme mohli postupovati takto (p. *Emil Jagemann*): Veškeré síly, které působí na tyč jsou: Její váha $P$ ve směru vertikálním, napětí nitě $S$ ve směru horizontálním a reakce $R$ ve směru šikmo vzhůru za sklonu $\beta$ k horizontále. Proložíme-li bodem $A$ pravoúhlé souřadnice ($X$ horiz., $Y$ vertikálně), musí za rovnováhy součet složek v obou osách býti roven nulle. Z toho plynou rovnice

$$S = R\cos\beta,\ P = R\sin\beta,\ \text{tedy } \operatorname{tg}\beta = \frac{P}{S} = 1{\cdot}155, \text{ z čehož } \beta = 49^0 6' \text{ a } R = 1{\cdot}527\,kg,$$ jako dříve.

Konečně lze též říci: Mají-li si $P$, $S$ a $R$ držeti rovnováhu, musí procházeti týmž bodem, čili $R$ ve zpětném prodloužení musí procházeti bodem $E$, v němž se protínají $P$ a $S$. Pak tvoří tyto síly trojúhelník podobný $\triangle\ ADE$, takže

$$\frac{\overline{AD}}{P} = \frac{\overline{DE}}{S} = \frac{\overline{EA}}{R}.$$

Z těchto vztahů lze vypočísti jak $P$, tak $R$, jehož směr jest $EA$.

3.

**Na dokonale hladké horizontální rovině $AD$ jest v bodě $A$ zakloubena bezvážná tyč $AC$ tak, že se může volně (bez tření) otáčeti v rovině vertikální. Na svém konci $C$ nese druhou stejně dlouhou bezváznou tyč $CB$, která se v kloubu v $C$ zase může volně otáčeti v téže vertikální rovině jako $AC$. Konec její $B$ spočívá na hladké rovině $AD$, takže $ABC$ tvoří rovnoramenný vertikální trojúhelník. V jeho rovině působí na střed tyče $AC$ síla $Q$, na střed $CB$ síla $P$, obě kolmé na příslušných tyčích a směřující dovnitř trojúhelníku $ABC$. Najděte rovnovážnou polohu tyčí (úhel $\vartheta$, který svírá $AC$ s vertikálou) a dokažte, že je-li $P = 2Q$, je trojúhelník $ABC$ rovnostranný. (Důkaz lze vésti také principem virtuálných posunutí.)** (*B. K.*)

Řešení, jež poslal p. *Jar. Fuchs* z r. g. v Náchodě.

Síly $P$ a $Q$ můžeme nahraditi vovnoběžnými složkami $\frac{1}{2}P$ a $\frac{1}{2}Q$, působícími v bodech $C$ a $B$ resp. $C$ a $A$. Sílu $\frac{1}{2}P$ v bodě $C$ rozložme na dvě složky, z nichž jedna směřuje ke kloubu $A$ a ruší se jeho pevností, kdežto druhá působí proti síle $\frac{1}{2}P$. Aby byla rovnováha na tyči $AC$, musí tyto dvě síly býti stejné, čili musí

$$\tfrac{1}{2}Q = \tfrac{1}{2}P\cos 2\vartheta \quad \text{čili} \quad \cos 2\vartheta = \frac{Q}{P}.$$

Pro $P = 2Q$ nabývá úhel $2\vartheta$ hodnoty $60^0$, trojúhelník $ABC$ je rovnostranný. Je-li $Q = P$ je $\vartheta = 0$. Druhý krajní případ za kladných $P$ a $Q$ nastává, vyrůstá-li síla $P$ nekonečně proti $Q$ nebo blíží-li se $Q$ nulle. Pak se blíží $2\vartheta$ úhlu pravému. Hodnoty větší než $90^0$ může $2\vartheta$ nabýti jedině tehdy, je-li $Q$ záporné, čili směřuje-li tato síla z trojúhelníku $ABC$ ven.

Z principu o virtuálných posunutí lze úlohu řešiti takto:

Nekonečně malým posunutím tyčové soustavy posune se vrchol $C$ ve směru síly $\frac{1}{2}Q$ do bodu $E$. Je-li $\overline{EF}$ vzdálenost tohoto bodu od tyče $CB$, jsou virtuálné práce sil $\frac{1}{2}Q.\overline{CE}$ a $\frac{1}{2}P.\overline{EF}$. Ježto za rovnováhy jsou stejné, jest

$$\frac{Q}{P} = \frac{\overline{EF}}{\overline{CE}} = \sin(90 - 2\vartheta) = \cos 2\vartheta$$

jako dříve.

4.

**Homogenní deska má tvar čtverce, k jehož jedné straně je připojen rovnoramenný trojúhelník. Strana čtverce je $a$, výška trojúhelníku $h$. Najděte polohu těžiště celku a určete velikost $h$, při které leží těžiště právě na straně čtverce, která je základnou trojúhelníku. Výsledek můžete snadno verifikovati pokusem na obrazci vyříznutém z lepenky.** (*B. K.*)

Řešení, jež zaslal p. *Jar. Fuchs* z r. g. v Náchodě.

Označme těžiště celého útvaru $T$, těžiště čtvercové desky $T_1$, těžiště trojúhelníkové desky $T_2$. Těžiště $T$, které musí ležeti na spojnici $T_1T_2$, dělí ji na dvě části $p_1$ a $p_2$ tak, že jest vyhověno rovnici

$$a^2p_1 = \tfrac{1}{2}ahp_2. \quad \text{Ježto} \quad p_1 + p_2 = \frac{a}{2} + \frac{h}{3},$$

musí

$$p_1 = \frac{h(3a + 2h)}{6(2a + h)}.$$

Aby těžiště leželo na straně čtverce, musí $p_1 = \frac{1}{2}a$, takže výška trojúhelníka musí býti $h = a\sqrt{3}$.

5.

Polokruhovitá homogenní deska stojí ve vertikální rovině opřena zakřivenou částí svého obvodu jednak na půdě jednak na vertikální zdi. Koefficient tření mezi deskou a půdou a mezi deskou a zdí je týž, rovný $f$. Dokažte, že deska může spočívati v klidu v každé poloze, ve které její přímá strana svírá s vertikálou úhel $\alpha > \alpha_0$, kdež

$$\cos \alpha_0 = \frac{3\pi}{4} \frac{f+f^2}{1+f^2}.$$

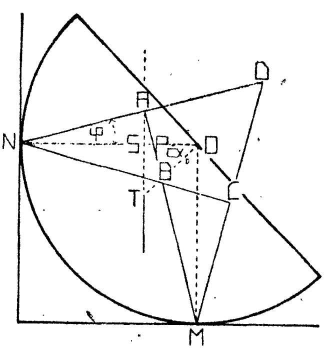
Vzdálenost těžiště desky od středu jejího, kteráž jest rovna $^4/_3\pi$-násobnému poloměru, a kterou ve vývodu potřebujete, také odvoďte. (*B. K.*)

Řešení, jež podal p. *Jar Fuchs* z r. g. v Náchodě.

Odvoďme nejprvé vzdálenost těžiště polokruhové desky od jejího středu $O$, a to nejsnáze pomocí pravidla Guldinova: Objem tělesa vzniklého rotací rovinného obrazce kolem osy v jeho rovině ležící jest roven ploše obrazce násobené drahou jeho těžiště při rotaci. Leží-li těžiště $T$ ve vzdálenosti $TO = \eta$ od středu, jest

$$\tfrac{4}{3}\pi r^3 = \tfrac{1}{2}\pi r^2 \,.\, 2\pi \eta \quad \text{čili} \quad \eta = \frac{4}{3\pi} r.$$

Polokruhová deska o středu $O$ opírá se v bodě $M$ o rovinu horizontální, v bodě $N$ o vertikální. Sestrojme v těchto oporných




bodech $M$ a $N$ po obou stranách normál $MO$ a $NO$ úhly tření $\varphi$, takže $\operatorname{tg} \varphi = f$. Krajní paprsky těchto úhlů vytknou kolem $O$ čtyřúhelník $ABCD$. Prochází-li těžnice, to jest vertikála těžištěm $T$ vedená, čtyřúhelníkem $ABCD$, jest deska následkem tření ve stavu rovnovážném; neprochází-li, není rovnovážný stav možný. Tuto zcela obecnou větu dovodíme velmi snadno. Budiž na př. bod $T_1$ bodem těžnice uvnitř čtyřúhelníka $ABCD$. Pak sílu tíže můžeme rozložiti na složky $T_1 M$ a $T_1 N$, které svírajíce s normálami stěn úhel menší než $\varphi$, nemohou způsobiti pohybu. Jde-li výslednice (těžnice) vně čtyrúhelníka $ABCD$, poznáváme, rozloživše ji podobně jako dříve, volíce však nyní bod $T_1$ na některém ze zmíněných krajních paprsků, že se deska musí sešinouti vlivem té složky, jež neprochází prostorem vymezeným úhly tření. V naši úloze nastává mezný případ, prochází-li těžnice bodem $A$. Pak je $\sphericalangle NOT = \alpha_0$. Z obrazce vyčteme

$$\overline{NS} = \overline{NA} \cos \varphi, \quad \overline{NA} = \overline{NP} \cos \varphi, \quad \overline{NP} = r\,(1 - \operatorname{tg} \varphi),$$

takže

$$\overline{NS} = r \frac{1 - f}{1 + f^2}.$$

Zároveň však jest

$$\overline{NS} = r \left(1 - \frac{4}{3\pi} \cos \alpha_0\right),$$

tedy

$$\cos \alpha_0 = \frac{3\pi}{4} \frac{f + f^2}{1 + f^2},$$

jak bylo dokázati.

Je-li úhel $\alpha > \alpha_0$, padne těžnice jak žádáno do čtyrúhelníka $ABCD$.

## Seznam řešitelů úloh.

Pánové: *Balada Frant.*, VII. r. Pardubice, m.: 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 15, d: 1, 2, 3, f.: 1, 2, 3, 4; *Burian Oldřich*, VI. I. r. Plzeň, m: 2, 3, 6, 7, 9, 10, 11, 12, d.: 2, 3, f.: 1, 2, 3, 4, 5; *Danzer Bohumil*, VII. r. g. Kolín, m.: 1, 5, 6, f.: 3, 4; *Erlebach Jan*, Jilemnice, m.: 3—13, d.: 1—3, f.: 1, 2, 4; *Fišer Emil*, VI. r. Plzeň, m.: 2, 6, 9, 10, 12, d.: 3, f.: 1, 2, 3, 5, 5; *Fuchs Jaroslav*, VIII. r. g. Náchod, m.: 1—15, d.: 1—3, f.: 1—5; *Hejduk Antonín*, VII. r. Nové Město na Moravě, m.: 3, 5, 10, 15, f.: 4; *Honzík Em.*, VII. r. Písek, m.: 5, 6, 15, f.: 1, 4, 5; *Horák Zdeněk*, VI. r. Pardubice, m.: 1, 3, 5, 6, 10, 12, 13, 15, f.: 4; *Hyška A.*, Bubeneč, m.: 6, 7, 15, d: 3, f.: 1, 4; *Jagemann Emil*, VIb. I. r. Brno, f.: 1—5; *Janíček Ladislav*, VI. (neudáno odkud). m.: 8, 9, 15; *Kalčík Otakar*, VII. r. Praha-III., m.: 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 12, 15; *Kalivoda Vlastimil*, g. Žižkov, m.: 3, 6, 9, f.: 4; *Kuba Bohumil*, VII. r. Příbram, m.: 3, 6, 9, 10, 13, 15, d: 2, 3; *Kůst Jiří*, VII. r. g. Domažlice, m.: 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 12, 13, 15, d.: 1, 2, 3, f.: 4; *Lašek Emil*, VIb. I. r. Brno, m.: 1—15; sl. *Lašťovičková Blažena*, VII. r. Vršovice, m.: 1, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 15, f.: 4; pánové: *Linhart Jaromír*, VII. r. g. Bučovice, m.: 1, 3, 5, 6, 9, 15; *Macků Vladimír*, VIb. I. r. Brno, m.: 12, 14, f.: 1—5; *Možný Frant.*, V. g. Hradec Král., m.: 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12; *Nechutný Jan*, VI. I. r. Plzeň, m.: 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 12, 12, d.: 3, f.: 1—5; *Nekola Miloslav*, VI. I. r. Plzeň, m.: 2, 6, 9, 10, 12, d.: 2, f. 1—5; *Němec Jiří*, VIb. I. r. Brno, f.: 1—5; *Novotný Frant.*, V. g. Vys. Mýto, m.: 9; *Novotný Vladimír*, VIII. r. g. Litovel, m.: 1—8, 10, 12, 15; *Pavel Josef*, VI. r. Plzeň, m.: 2, 7, 9, 10, 12, f.: 1, 4, 5; *Pechmann Ol.*, VI. r. Plzeň, m.: 2, 6, 9, 10, 12, f.: 1, 2, 4; *Pokorný Frant.*, VIb. I. r. Brno, m.: 1, 2, 3, 5, 9, 10; *Rott Frant.*, VII. r. Praha-III., m.: 3, 5; *Schmidt Bořivoj*, VIb. I. r. Brno, m.: 1—5, 9, 10, f.: 4; *Sitař Ludvík*, VIb. I. r. Brno, m.: 1, 2, 3, 5, 7, 9, 10, 12, 14, 15; *Slaný Jaroslav*, VI. I. r. Plzeň, m.: 1—3, 5—15, d.: 1—3, f.: 1, 2, 4, 5; *Smolař Václav*, VII. r. g. Brandýs n./L., m.: 3, 5, 6, 8, 9, 15; *Steiger Frant.*, VII. g. Benešov, f.: 1—4; *Tuláček Antonín*, stud. z Dol. Štěpanic, m.: 6, 7, 11, 13, 15, d.: 3, f.: 4; sl. *Tůmová Božena*, I. obch. akad. Olomouc, m.: 8; pánové: *Valenta Vladimír*, Vb. r. Žižkov, m.: 1, 3, f.: 1, 2, 4; *Valeš Josef*, VI. r. Brno, m.: 6, 7, 13, 15, d.: 1, 2, 3, f.: 1, 4; *Vávra Frant.*, r. Vel. Meziříčí, m: 8, 10, 12, 15, d.: 3; *Vikár Vojtěch*, VII. r. g. Trenčín, m.: 1—3, 5—10, 12, 15, f.: 2—4; *Vodička Jiří*, VII. g. Něm. Brod, m.: 1, 3, 5, 15.

## Udělení cen.

Redakce úloh přihlížejíc nejen k počtu, ale i k jakosti řešení, přisoudila těmto řešitelům ceny, vypsané výborem „Jednoty českých mathematiků a fysiků“.

Z mathematiky.

Ceny první:

Pan *Jaroslav Fuchs*, stud. VIII. r. g. v Náchodě.
„ *Jaroslav Slaný*, stud. VI. I. r. v Plzni.

Ceny druhé:

Pan *František Balada*, stud. VII. r. v Pardubicích.
„ *Emil Lašek*, stud. VIb. I. r. v Brně.
Sl. *Blažena Lašťovičková*, stud. VII. r. ve Vršovicích.
Pan *Vojtěch Vikár*, stud. VII. r v Trenčíně.

Ceny třetí:

Pan *Jan Erlebach*, stud. z Jilemnice.
„ *Jiří Kůst*, stud. VII. r. g. v Domažlicích.
„ *Frant. Možný*, stud. V. g. v Hradci Králové.
„ *Vladimír Novotný*, stud. VIII. r. g. v Litovli.
„ *Ludvík Sitař*, VIb. I. r. v Brně.

Z deskriptivní geometrie.

Pánové: *Jaroslav Fuchs*, *Jaroslav Slaný*, *Jiří Kůst*.

Z fysiky.

Cenu první a druhou:

Pan *Jaroslav Fuchs*, r. g. v Náchodě.

Ceny druhé:

Pan *Oldřich Burian*, I. r. v Plzni.
„ *Emil Fišer*, I. r. v Plzni.
„ *Emil Jagemann*, I. r. v Brně.
„ *Vladimír Macků*, I. r. v Brně.
„ *Jan Nechutný*, I. r. v Plzni.
„ *Mil. Nekola*, I. r. v Plzni.
„ *Jiří Němec*, I. r. v Brně.

## Z fondu Jaromíra Mareše:

obdrží ceny:

Pan *Jaroslav Fuchs*, stud. VIII. r. g. v Náchodě.
„ *Jaroslav Slaný*, stud. VI. I. r. v Plzni a
*Karel Kuta*, o. š. v Čes. Budějovicích.