Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

František Nachtikal

Theorie dopružování. [II.]

*Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky*, Vol. 49 (1920), No. 4-5, 244--258

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108892

4°. Recherches sur la voie qui conduisit Archimède à la découverte de la formule de la surface d'une calotte sphérique.

5°. Hypothèse sur le procédé par lequel Archimède aurait pu arriver à la découverte des formules de l'aire d'une spirale.

6°. Pourquoi Archimède se servit dans le II. livre de ses 'Επιπέδων ἰσορροπίαι d'un théorème aussi compliqué que l'est le neuvième.

7°. Pourquoi Archimède envoya à Conon parmi ses théorèmes deux qui n'étaient pas corrects et motifs probables de son énociation du premier de ces théorèmes incorrects.

---

# Theorie dopružování.

Napsal dr. **Frant. Nachtikal** v Brně.

(Dokončení.)

15. *Vliv dopružování na šíření se vln. Vlny podélné.* Poměrně nejjednodušší případy, jež lze řešiti, jsou ty, v nichž povrchové podmínky vůbec odpadají, když totiž jde o těleso rozprostírající se do nekonečna. Problémy toho druhu jsou šíření se vln; omezíme se při tom na vlny rovinné. Objemové síly buďtež rovny nulle.

Při vlnách longitudinálních volme osu $X$ ve směru šíření se vln a tedy i ve směru výchylek. Pak jest trvale $v=0$, $w=0$ a výchylka $u$ závisí pouze od $x$ a $t$. Za této volby jest druhá a třetí rovnice soustavy (14) identicky splněna. Prvá rovnice dává

$$\varrho\left(n+\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{E}{2(1+\mu)}\left[n+(1+k)\frac{\partial}{\partial t}\right]\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1}{1-2\mu}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right].$$

Zavedeme-li zkrácené označení

$$a^2=\frac{E(1-\mu)}{\varrho(1+\mu)(1-2\mu)},$$

dostáváme

$$\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}+n\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left[(1+k)\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}+n\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]. \qquad (17)$$

Rovnici této vyhovuje částečný integrál

$$u=e^{\alpha x+\beta t},$$

při čemž pro veličiny $\alpha$ a $\beta$ platí vztah

$$\beta^3+n\beta^2=a^2\alpha^2\left[(1+k)\beta+n\right],$$

z něhož plyne

$$\alpha = \pm \frac{\beta}{a}\sqrt{\frac{n+\beta}{n+(1+k)\beta}} = \pm \frac{\beta}{a}\left(1+\frac{k\beta}{n+\beta}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Máme-li na mysli periodické vlnění o kmitové době $T$, jest

$$\beta = \frac{2\pi i}{T},$$

čemuž přísluší

$$\alpha = \pm \frac{2\pi i}{aT}\left(1 + k\frac{2\pi i}{nT+2\pi i}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

což jsou veličiny soujemné, jež lze psáti ve tvaru

$$\alpha = \pm\left(l + \frac{2\pi i}{\lambda}\right).$$

Pomyslná část určuje délku příslušné vlny $\lambda$, realná část znamená koefficient tlumení vln $l$.

Pro vlny o kmitové době $T$ dostáváme tudíž řešení

$$u = C_1 e^{lx+2\pi i\left(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda}\right)} + C_2 e^{-lx+2\pi i\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)}$$

anebo také

$$u = e^{lx}\left[A_1 \sin 2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda}\right) + A_2 \cos 2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda}\right)\right] +$$
$$+ e^{-lx}\left[B_1 \sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right) + B_2 \cos 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)\right].$$

Druhý člen přísluší periodické tlumené vlně šířící se ve směru rostoucího $x$; prvý člen znamená rovněž tlumenou vlnu šířící se však směrem opačným. Koefficient $e^{+lx}$ značí totiž také tlumení této druhé vlny, neboť ve směru jejího šíření, tedy s ubývajícím $x$, se její amplituda umenšuje.

Obecné výrazy pro koefficient tlumení $l$ a délku vlny $\lambda$ jsou nepřehledné. Za předpokladu, že dopružování je malé, tedy, že koefficient dopružování je malý proti jedničce, rozvineme příslušný vzorec pro koefficient $\alpha$ v řadu postupující podle mocnin $k$ a omezíme se na lineální člen. Pak jest, značí-li $N = 2\pi/T$,

$$l = \frac{k}{2a}\cdot\frac{4\pi^2 n}{n^2T^2+4\pi^2} = \frac{k}{2a}\,\frac{nN^2}{n^2+N^2},$$

$$\lambda = aT\left(1+\frac{k}{2}\,\frac{4\pi^2}{n^2T^2+4\pi^2}\right) = aT\left(1+\frac{k}{2}\,\frac{N^2}{n^2+N^2}\right).$$

Jak patrno, koefficient tlumení $l$ jest úměrný koefficientu dopružování $k$; tělesa s větším dopružováním silněji tlumí vlny, jak se ovšem dalo očekávati. Koefficient tlumení závisí vlastně také na době kmitové; s rostoucí dobou kmitovou klesá a v limitním případě $T = \infty$ jest nullou. Prakticky však pro vlny akustické jest frekvence $N$ velmi značná proti relaxační rychlosti; má tudíž pro takovéto vlny v prvém přiblížení stálou hodnotu

$$l = \frac{kn}{2a}.$$

Obdobný je vliv dopružování na délku vlny příslušející určité době kmitové. Kdyby nebylo dopružování, byla by délka vlny $\lambda_0 = aT$, při čemž $a$ znamená rychlost vln bez dopružování. Dopružování tudíž délku vlny zvětšuje; to znamená, že zvětšuje také rychlost šíření se vln na hodnotu $a_1$ jež jest

$$a_1 = a\left(1 + \frac{k}{2}\frac{4\pi^2}{n^2 T^2 + 4\pi^2}\right) = a\left(1 + \frac{k}{2}\frac{N^2}{n^2 + N^2}\right).$$

Toto zvětšení rychlosti vln zase mizí pro vlny nekonečně dlouhé. Pro vlny krátké má však téměř stálou hodnotu

$$a_0 = a\left(1 + \tfrac{k}{2}\right).$$

Kdyby na př. byl koefficient dopružování $1\%$, zvýšila by se rychlost krátkých vln o $\frac{1}{2}\%$. Je zajímavým srovnání, že také ve vzduchu při adiabatických dějích, jež znamenají vlastně thermodynamické dopružování, jest rychlost vln větší, než by byla při dějích isothermických bez dopružování.

16. *Vlny příčné.* Zcela podobným způsobem lze řešiti problém šíření se vln transversálních. Položme osu $X$ do směru šíření se vln, osu $Y$ do směru výchylek. Pak jest vždy a všude

$$u = 0, \qquad w = 0$$

a výchylka $v$ závisí pouze od $x$ a $t$. Prvá a třetí z pohybových rovnic (14) jsou zase identicky splněny, z druhé rovnice dostáváme

$$\varrho\left(n + \frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{E}{2(1+\mu)}\left[n + (1+k)\frac{\partial}{\partial t}\right]\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

anebo

$$\frac{\partial^3 v}{\partial t^3} + n\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2\left[(1+k)\frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial t} + n\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right];$$

při tom však znamená

$$a^2 = \frac{E}{2\varrho(1+\mu)}$$

dvojmoc rychlosti transversálních vln pro případ, že by nebylo dopružování. Jak patrno, je to táž rovnice jako (17), až na změněnou hodnotu rychlosti vln. Platí tudíž pro vlny příčné všechny výsledky předešlého odstavce. Vznikají zase vlny tlumené, jež se šíří rychlostí poněkud větší než v případě, že není dopružování.

17. *Vliv dopružování na chvění pružných těles.* Z úvah předchozích dvou odstavců plyne, že dopružování má vliv na rychlost vln a tudíž také na tóny vydávané pružnými tělesy. Ovšem oba hlavní zdroje hudebních tónů, totiž chvění napiatých strun a chvění sloupců vzduchových, na dopružování nezávisí. U strun totiž rozhoduje o výšce vydávaného tónu vedle rozměrů a hmoty struny pouze její napětí, ne však její elastické vlastnosti. Teprve u strun poměrně krátkých a tlustých přistupuje korrekce vlivem nedokonalé ohebnosti struny, jež závisí na pružnosti materiálu. Dopružování způsobuje pouze korrekci tohoto korrekčního členu a lze je tudíž prakticky vždy zanedbati.

Dopružování může míti tudíž vliv pouze na longitudinální, torsní a transversální chvění tyčí jakož i na příčné chvění desek. V dalším se omezíme na podélné chvění tyčí.

V tyčích vlastně není ryze podélného chvění, neboť podélné vibrace jsou doprovázeny příčnými kontrakcemi a dilatacemi, čímž se úloha stává velmi složitou. Při tyčích poměrně tenkých proti délce mají však příčné vibrace nepatrnou energii proti vibracím podélným; lze tudíž příčné vibrace v prvém přiblížení zanedbati, čímž se celý problém značně zjednoduší. Mathematicky se projeví zanedbání příčných kontrakcí tak, že v pohybových rovnicích položíme koefficient příčné kontrakce $\mu = 0$. Volíme-li pak osu $x$ ve směru délky tyče, jest $v = 0$ a $w = 0$. Podélná výchylka $u$ závisí pouze na $x$ a $t$. Z pohybových rovnic (14) zbývá pouze rovnice prvá, již možno psáti ve tvaru

$$\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + n\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left[(1+k)\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} + n\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right], \qquad (18)$$

kdež $a^2 = E/\varrho$ znamená dvojmoc rychlosti podélných vln v tenkých drátech, kdyby nebylo dopružování. Úvahy omezíme na případ tyče délky $l$ na jednom konci $x = 0$ upevněné, na druhém $x = l$ volné, což má největší význam fysikální.

Povrchové podmínky v tomto případě redukují se na podmínky na obou koncích, neboť za našeho omezení na plášti tyče nenastávají ani příčné výchylky ani tam nepůsobí vnější síly. Na upevněném konci $x = 0$ musí býti trvale $u_0 = 0$. Na volném konci nepůsobí žádná vnější síla, tedy také skutečné vnitřní napětí $X_x$ musí se tam rovnati nulle. Pro katastatické napětí $X'_x$ platí pak podle (16) rovnice

$$(1 + k) \frac{\partial X'_x}{\partial t} + n X'_x = 0.$$

Při tom jest

$$X'_x = E \, . \, x_x = E \frac{\partial u}{\partial x},$$

takže po dosazení dostáváme pro volný konec $x = l$ podmínku

$$(1 + k) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right)_l + n \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_l = 0. \tag{19}$$

Konečně zbývá stanoviti podmínky počáteční. V čase $t = 0$ musí býti známo podle odst. 14. rozdělení podélných výchylek, rychlostí i zrychlení, tedy

$$\text{pro } t = 0 \qquad u = f(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = f_1(x), \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f_2(x).$$

Partikulární integrál rovnice (18)

$$u = e^{\alpha x + \beta t}$$

musí býti pro $x = 0$ nullou v každém čase; tomu se vyhoví tvarem

$$u = e^{\beta t} \sin \alpha x \, .$$

Pro $x = l$ musí býti splněna podmínka (19) v každém čase, což dává vztah

$$\alpha \left[ (1 + k) \beta + n \right] . \cos \alpha l = 0.$$

Podmínce této lze vyhověti jedině volbou

$$\cos \alpha l = 0,$$

z čehož

$$\alpha = \frac{\pi}{2l}, \quad \frac{3\pi}{2l}, \ldots, \frac{(2r-1)\pi}{2l}, \ldots$$

Možné řešení $\alpha = 0$ značilo by totiž klid. Člen v hranaté závorce nemůže býti nullou, neboť by to odporovalo pohybové rovnici (18), jak se lze dosazením přesvědčiti.

Partikulární integrál příslušný $r$-tému částečnému kmitu, pro nějž jest

$$\alpha_r = \frac{2r-1}{2l}\pi,$$

jest tedy

$$u = e^{\beta t} \sin \alpha_r x.$$

Dosadíme-li tuto hodnotu do pohybové rovnice (18), dostáváme podmínečnou rovnici pro příslušné $\beta$, jež jest

$$\beta^3 + n\beta^3 + (1+k)\, a^2\alpha_r^2\beta + na^2\alpha_r^2 = 0.$$

Tato kubická rovnice má jeden reálný kořen záporný a dva soujemné sdružené kořeny se zápornou částí reálnou. Kdyby bylo $k = 0$, byla by realným kořenem hodnota $\beta = -n$. Při malém dopružování liší se pravý kořen realný od tohoto přibližného jen o malou veličinu. Předpokládáme tudíž realný kořen ve tvaru

$$\beta = -n\,(1-\delta_r),$$

při čemž korrekční $\delta_r$ jest realným kořenem (kladným) kubické rovnice

$$n^2\delta_r^3 - 2n^2\delta_r^2 + [n^2 + (1+k)\, a^2\alpha_r^2]\, \delta_r - ka^2\alpha_r^2 = 0.$$

Další dva kořeny $\beta$ jsou pak obecně

$$\beta = -\tfrac{1}{2}\, n\delta_r \pm N_r i,$$

v nichž veličina $N_r$ znamená frekvenci $r$-tého částečného kmitu (2 $\pi$-násobný kmitočet) a jest určena vztahem

$$N_r^2 = (1+k)\, a^2\alpha_r^2 + n^2\delta_r\,(1 - \tfrac{3}{4}\,\delta_r).$$

Pro $r$-tý parciální kmit dostáváme tudíž za tohoto označení řešení tvaru

$$u = [C_r e^{-n(1-\delta_r)t} + e^{-\frac{1}{2}n\delta_r t}(A_r \sin N_r t + B_r \cos N_r t)] \sin \alpha_r x.$$

Obecné řešení, vyhovující pohybové rovnici i krajovým podmínkám, jest pak

$$u = \sum_{r=1}^{\infty} \Big[ C_r e^{-n(1-\delta_r)t} + e^{-\frac{1}{2}n\delta_r t}(A_r \sin N_r t + B_r \cos N_r t) \Big] \sin \frac{2r-1}{2l}\pi x.$$

Konstanty $C_r$, $A_r$ a $B_r$ nutno voliti tak, aby bylo vyhověno podmínkám počátečním, totiž aby

$$\text{pro } t = 0 \qquad u = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} = f_1(x), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f_2(x).$$

Musí býti tudíž

$$\sum_1^\infty (C_r + B_r) \sin \frac{2r-1}{2l} \pi x = f(x)$$

$$\sum_1^\infty \left[ -n(1-\delta_r) C_r - \tfrac{1}{2} n\delta_r . B_r + N_r . A_r \right] \sin \frac{2r-1}{2l} \pi x = f_1(x).$$

$$\sum_1^\infty \left[ n^2(1-\delta_r)^2 C_r + (\tfrac{1}{4} n^2\delta_r^2 - N_r^2) B_r - n\delta_r N_r . A_r \right] \sin \frac{2r-1}{2l} \pi x =$$
$$= f_2(x).$$

Příslušné konstanty určí se známým způsobem Fourierovým. Jest totiž

$$\int_0^l \sin \frac{2r-1}{2l} \pi x . \sin \frac{2p-1}{2l} \pi x . dx = 0 \qquad \text{pro } p \gtrless r$$

$$\text{a} \qquad \int_0^l \sin^2 \frac{2r-1}{2l} \pi x . dx = \frac{l}{2}.$$

Označíme-li tedy

$$K_r = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{2r-1}{2l} \pi x . dx,$$

$$L_r = \frac{2}{l} \int_0^l f_1(x) \sin \frac{2r-1}{2l} \pi x . dx,$$

$$M_r = \frac{2}{l} \int_0^l f_2(x) \sin \frac{2r-1}{2l} \pi x . dx,$$

dostáváme podmínečné rovnice

$$C_r + B_r = K_r.$$
$$-n(1-\delta_r) C_r - \tfrac{1}{2} n\delta_r B_r + N_r . A_r = L_r$$
$$n^2(1-\delta_r)^2 C_r + (\tfrac{1}{4} n\delta_r^2 - N_r^2) B_r - n\delta_r N_r . A_r = M_r.$$

Těmito třemi rovnicemi jsou konstanty $C_r$, $B_r$ a $A_r$ pro každý parciální kmit určeny a tím je problém obecně řešen.

Fysikálně zajímavý jest případ tyče, která byla protažena tak, že její relativní prodloužení bylo všude $\lambda$ a byla v tomto stavu podržena tak dlouho, až nastal stav katastatický. Je-li nyní v čase $t = 0$ puštěna, jsou příslušné počáteční podmínky

$$u = f(x) = \lambda x, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = f_1(x) = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f_2(x) = 0 \text{ pro } t = 0.$$

Pak jest

$$K_r = \frac{8l\lambda(-1)^{r-1}}{(2r-1)^2\pi^2}, \qquad L_r = 0, \qquad M_r = 0.$$

Obecné řešení vedle periodických členů vykazuje také člen neperiodický. To znamená, že tyč kmitá, ale kmity dějí se kolem střední polohy určené neperiodickým členem, která se tedy liší od původní rovnovážné polohy. Tato střední poloha kmitů s rostoucím časem blíží se původní rovnovážné poloze podle exponenciálního zákona.

Dosud uvedená theorie longitudinálního chvění tyče platí obecně pro jakoukoliv hodnotu koefficientu dopružování $k$. Předpokládáme-li však, že tato hodnota je malá, veškeré výsledky se v prvém přiblížení velmi značně zjednoduší. Dostáváme pak přibližné hodnoty

$$\delta_s = k \frac{a^2\alpha_r^2}{a^2\alpha_r^2 + n^2}$$

$$N_r = a\alpha_r (1 + \tfrac{1}{2}\delta_r) = a\alpha_r \left(1 + \frac{k}{2}\frac{a^2\alpha_r^2}{a^2\alpha_r^2 + n^2}\right).$$

Hodnota $a\alpha_r = N'_r$ znamená frekvenci kmitů, jaké by vznikly, kdyby nebylo dopružování. Tato hodnota při akustických kmitech jest zajisté velmi značně větší než relaxační rychlost $n$. Zanedbáme-li tudíž $n^2$ proti $N'^2_r$, dostáváme

$$\delta_r = k, \qquad N_r = N'_r (1 + k/2),$$

což má jednoduchý význam. Dopružováním zvyšují se tóny tyčí vydávané, a to v prvním přiblížení všechny stejně; tvoří tudíž zase řadu lichých harmonických tónů, jako je tomu v obyčejné theorii pružnosti, ovšem k zvýšenému tónu základnímu. Kmity jsou tlumeny a to rovněž v prvém přiblížení všechny stejně. Za tohoto omezení jest pohyb tyče vyjádřen vztahem

$$u = e^{-n(1-k)t} \cdot \sum_1^\infty C_r \sin \frac{2r-1}{2l}\pi x + e^{-\frac{1}{2}nkt} \sum_1^\infty (A_r \sin N_r t + \\ + B_r \cos N_r t) \sin \frac{2r-1}{2l}\pi x.$$

V případu tyče protažené a puštěné jest v prvém přiblížení

$$Cr \doteq Kr = \frac{8l\lambda\,(-1)^{r-1}}{(2r-1)^2\pi^2},$$

takže pohyb střední polohy kmitů $u_0$ k rovnovážné poloze jest vyjádřen vztahem

$$u_0 = e^{-n(1-k)t} \sum_1^\infty \frac{8l\lambda\,(-1)^{r-1}}{(2r-1)^2\pi^2} \,.\, \sin \frac{2r-1}{2l}\,\pi x \,.$$

Uvážíme-li, jak hodnota konstant $K_r$ byla Fourierovou methodou stanovena, seznáme, že jest to

$$u_0 = \lambda x \,.\, e^{-n(1-k)t} \,.$$

Volný konec tyče ($x = l$), když byl po dosti dlouhou dobu protažen a pak puštěn, koná sice kmity, ale střední poloha těch kmitů $U$ se blíží k rovnovážné poloze podle jednoduchého zákona

$$U = \lambda l \,.\, e^{-n(1-k)t} \,,$$

tedy tak, jakoby na jeho dopružování vzniklé kmity neměly vlivu.

18. *Další rozšíření theorie dopružování. Kombinační tóny.* V dosavadní theorii dopružování jsme předpokládali, že každou změnou deformace vzniká v tělese jisté dopružovací napětí $\sigma$ úměrné této deformační změně; toto napětí se pak zmenšuje rychlostí úměrnou okamžité jeho velikosti. To jest zajisté jen prvé přiblížení, platné pro tělesa jevící malé dopružování. V tělesích, jež mají značné dopružování, nutno ovšem připustiti odchylky od úměrnosti. Mathematicky lze to vyjádřiti tím, že k lineárným členům základní rovnice (2) přistupují ještě členy kvadratické a vyšší. Omezíme se při dalším rozšíření theorie na předpoklad, že dopružovací napětí se zmenšuje rychlostí určenou kvadratickou funkcí tvaru $-n\sigma + a\,.\,\sigma^2$. To znamená fysikálně, že dopružovací napětí kladné zmenšuje se jinou rychlostí než stejně velké napětí záporné (t. j. dopružovací tlak). Tato domněnka jest dosti pravděpodobna, jak ukazuje srovnání s pevností těles. Pevnost v tahu je zpravidla jiná než pevnost v tlaku. Základní rovnice pro časové změny dopružovacího napětí jest pak

$$\frac{d\sigma}{dt} = -n\sigma + a\sigma^2 + kE\frac{d\lambda}{dt}.$$

Zavedeme-li zase napětí skutečné $S$ a katastatické $S'$ vztahem

$$\sigma = S - S' = S - E\lambda,$$

dostáváme rovnici

$$\frac{dS}{dt} + nS = (1 + k)\, E\frac{d\lambda}{dt} + nE\lambda + a\,(S - E\lambda)^2. \quad (20)$$

K dřívější základní rovnici (2) přistupuje tudiž ještě korrekční člen $a\,(S - E\lambda)^2$.

Tato rozšířená theorie dopružovaní zajímá nás hlavně proto, že podává jednoduchý výklad kombinačních tónů, jak stručně naznačíme. Vyjdeme z výsledků odst. 11., v němž jsme vyvodili theorii vynucených kmitů. Periodická síla

$$S = A\, sin\, Nt$$

působící na volný konec tyče (na druhém konci upevněné) vzbudí vynucené kmity volného konce, takže relativní prodloužení tyče $\lambda$ jest určeno rovnicí

$$\lambda = \frac{A}{(1 + k)\, E}\, sin\, N\,(t - t_0).$$

Při tom fázové zpoždění $Nt_0$ vyjádřené úhlem v míře obloukové jest veličinou malou druhého řádu; můžeme je tudíž v prvém přiblížení zanedbati.

Nechť působí na tyč dvě periodické síly o různých frekvencích $N_1$ a $N_2$, tedy jest

$$S = A_1\, sin\, N_1\, t + A_2\, sin\, N_2\, t.$$

Podmínečná differenciální rovnice není lineárná; lze ji tudíž integrovati buď nekonečnými řadami nebo methodou postupného přibližování. Pro fysikální význam řešení volíme tuto druhou methodu. Kdybychom zanedbali v rovnici (20) korrekční člen, byl by jejím intengrálem v prvém přiblížení

$$\lambda = \frac{1}{(1 + k)\, E}\,(A_1\, sin\, N_1 t + A_2\, sin\, N_2 t).$$

Toto přibližné řešení dosadíme do korrekčního členu rovnice (2), čímž se stane lineární. Pak jest jejím integrálem

$$\lambda = \frac{1}{(1 + k)\, E}\,(A_1\, sin\, N_1 t + A_2\, sin\, N_2 t) + \varphi\,(t),$$

při čemž dodatek $\varphi(t)$ odpovídá přítomnosti korrekčního členu. Po dosazení dostáváme pro dodatek $\varphi$ rovnici

$$0 = (1+k)\,E\frac{d\varphi}{dt} + nE\varphi + a\frac{k^2}{(1+k)^2}(A_1 \sin N_1 t + + A_2 \sin N_2 t)^2,$$

což možno také uvésti do tvaru

$$(1+k)\,E\frac{d\varphi}{dt} + nE\varphi = -a\frac{k^2}{(1+k)^2}\Big[\tfrac{1}{2}A_1^2(1-\cos 2N_1 t) + + \tfrac{1}{2}A_2^2(1-\cos 2N_2 t) + A_1 A_2 (\cos(N_1 - N_2)t - \cos(N_1 + N_2)t)\Big].$$

Tuto lineárnou rovnici možno nyní integrovati pro každý člen pravé strany zvláště; obecné řešení rovná se pak součtu těchto jednotlivých řešení. Vedle neperiodického řešení budou se tudíž v obecném řešení vyskytovati periodické členy o frekvencích $2N_1$ a $2N_2$, což jsou oktávy původních tónů a znamenají autokombinační tóny každého z primárních tónů zvláště. Další členy mají frekvence $(N_1 - N_2)$ a $(N_1 + N_2)$, což odpovídá prvému differenčnímu a summačnímu tónu. Pro tyto tóny platí tudíž podmínečná rovnice

$$(1+k)\,E\frac{d\varphi}{dt} + nE\varphi = \mp a\frac{k^2}{(1+k)^2}A_1 A_2 \cos(N_1 \mp N_2)t.$$

Rovnici této vyhovuje integrál tvaru

$$\varphi = M \sin(N_1 \mp N_2)(t - t_0),$$

při čemž $t_0$ odpovídá fázovému zpoždění. Propočtením dostáváme pro amplitudu těchto tónů

$$M = a\frac{k^2}{(1+k)^2}\cdot\frac{A_1 \,.\, A_2}{E(N_1 \mp N_2)}.$$

Amplituda jest tudíž úměrná součinu z amplitud obou primárních tónů, což úplně souhlasí s měřeními Stumpfovými a Waetzmannovými. Jest však mimo to nepřímo úměrná výšce příslušného kombinačního tónu. Amplituda differenčního tónu jest tedy značně větší než amplituda summačního tónu, což rovněž dobře souhlasí se skutečností. Objektivní intensita tónů jest ovšem úměrná dvojmoci součinu z absolutní výšky a z amplitudy, proto jsou objektivní intensity těchto tónů stejně velké. Ucho však ze souzvuku několika tónů nejsnáze rozeznává nejhlubší tón, čímž lze vysvětliti, proč nejsnáze slyšíme differenční tón. Tón summační zpravidla bývá zakryt vyššími harmonickými tóny obou primárních a proto lze jej vnímati jen za zvláštní pozornosti.

Stejným způsobem bylo by možno také nahraditi úměrnost mezi změnou deformace a tím vzbuzeným napětím dopružovacím. To by znamenalo, že by k základní rovnici dopružování přistoupil ještě člen obsahující $(d\lambda/dt)^2$, po př. mocniny vyšší. I připojení tohoto kvadratického členu vedlo by k obdobnému výkladu kombinačních tónů. Jak totiž Schaefer[11]) ukázal, vede k výkladu kombinačních tónů každá theorie, jež v differenciální rovnici pohybové obsahuje kvadratický člen (obecně součin dvou libovolných derivací výchylky podle času). Předností naší theorie kombinačních tónů jest její jednoduchý fysikální podklad. Dřevěné stěny měchu píšťal nebo bubínek našeho ucha jsou tělesa, o nichž se dá souditi, že jeví asymmetrické dopružování, jak žádá tato theorie.

---

## Théorie de l'hystérésis élastique.

Par M. Fr. Nachtikal.

(Sommaire.)

On peut expliquer l'hystérésis élastique par la supposition que la tension interne d'un corps déformé dépend non seulement de ses déformations, mais qu'elle change aussi avec le temps. Si l'on maintient la déformation constante, il s'établit après un temps suffisamment long un régime permanent (r catastatique d'après Wiechert), dans lequel les tensions respectives (tensions catastatiques) sont déterminées seulement par les déformations.

Dans la première partie de son travail (chapitre 2.—11.) l'auteur s'occupe du simple cas que la déformation du corps est définie par un seul paramètre (par exemple par l'allongement relatif $\lambda$). Pour un allongement relatif donné $\lambda$ la tension interne réelle $S$ diffère de la tension catastatique $S' = E\lambda$,

---

[11]) C. Schaefer, Ann. d. Phys. *33*. 1216. 1910.

$E$ étant le module d'élasticité. On peut appeler la différence de ces deux tensions

$$\sigma = S - S' = S - E\lambda$$

tension de réactivité. On en suppose:

1. Sans une déformation constante la tension de réactivité va en diminuant, avec une vitesse proportionnelle à sa grandeur actuelle, ce qu'on appelle la relaxation.

2. Si la déformation varie, la tension de réactivité augmente d'une valeur $d\sigma$ proportionnelle à la variation de la déformation $d\lambda$.

L'association de ces deux suppositions donne

$$\frac{d\sigma}{dt} = -n\sigma + kE\frac{d\lambda}{dt}, \tag{1}$$

où $n$ est la vitesse de relaxation, $k$ le coefficient de réactivité.

En substituant il s'en suit l'équation fondamentale pour la réactivité

$$\frac{dS}{dt} + nS = (1+k)\,E\frac{d\lambda}{dt} + nE\lambda. \tag{2}$$

Par cette équation est déterminé soit la tension réelle $S$ du fil soumis à la traction, $\lambda$ étant donné comme une fonction de temps (chap. 5.), soit au contraire l'allongement relatif $\lambda$ du fil tendu, étant donnée la tension externe (égale à la tension interne réelle $S$) comme une fonction de temps (chap. 6.).

L'auteur calcule le travail nécessaire pour l'allongement du fil (chap. 7.), et l'énergie $L$ de l'unité de volume du corps déformé (chap. 8.), pour laquelle il trouve

$$L = \tfrac{1}{2}E\lambda^2 + \frac{\sigma^2}{2kE}.$$

Pour le même allongement relatif cette énergie est plus grande qu'elle ne serait sans la réactivité, l'augmentation étant exprimée par un membre proportionnel au carré de tension de réactivité $\sigma$.

Une comparaison de cette théorie avec la théorie thermodynamique du fil parfaitement élastique (chap. 9.) montre qu'on ne peut pas expliquer la réactivité par de purs changements de température dans le fil tendu.

L'auteur étudie de plus (chap. 10.) la marche du phénomène de réactivité d'un fil qui a été tendu pendant un temps prolongé et après lâché, en tenant compte de l'amortissement. L'écart $u$ diminue avec le temps d'après la formule de forme

$$u = K_1 e^{-r_1 t} + K_2 e^{-r_2 t} \tag{9}$$

ce qui est la même expression qui a été trouvée expérimentalement par M. F. Neesen (1874).

La théorie des oscillations imposées (chap. 11.) montre que l'influence de la réactivité sur les oscillations rapides n'est qu'insignifiante.

Dans la seconde partie de son travail (chap. 12.—17.) l'auteur généralise cette théorie au cas des déformations quelconques. On trouve que le corps isotrope n'a que deux constantes hystérétiques, la vitesse de rélaxation $n$ et le coeffi cient de réactivité $k$ qui ont alors pour la tension de traction comme celle de glissement la même valeur. Les équations de mouvement du corps élastique doué de réactivité sont

$$\varrho\left(n+\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\left(n+\frac{\partial}{\partial t}\right)X+$$
$$+\frac{E}{2(1+\mu)}\left[n+(1+k)\frac{\partial}{\partial t}\right]\left[\Delta u+\frac{1}{1-2\mu}\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right]$$

et deux équations analogues. Ici signifie $\varrho$ la masse spécifique, $u$, $v$, $w$ les élongations du point de sa position d'équilibre, $X$, $Y$, $Z$ les composantes de la force extérieure agissante sur l'unité de volume, $\mu$ le coefficient de Poisson, $\Delta$ le symbol de Laplace et $\vartheta$ la divergence des élongations.

L'auteur resout le problème de la propagation des ondes longitudinales et des ondes transversales. Ces ondes sont amorties et se propagent avec une vitesse plus grande que dans le cas où il n'y a pas de réactivité. Aussi bien le coefficient d'amortissement que l'augmentation de la vitesse de propagation sont, en première approximation, proportionnels au coefficient de réactivité $k$.

On peut aussi donner une solution générale des vibrations des corps élastiques, ainsi qu'on le montre sur l'exemple d'une barre vibrant longitudinalement. La méthode est analogue à celle de la théorie ordinaire de l'élasticité, à l'aide de séries de Fourier.

Dans le dernier chapitre on examine une nouvelle généralisation de la théorie en admettant des écarts de la loi de proportionnalité. Cette généralisation se manifeste mathématiquement en ce que dans l'équation primitive (1) arrivent à la droite encore des membres quadratiques, éventuellement plus élevés. Cette généralisation est intéressante par le fait qu'elle permet simplement d'expliquer la formation des sons résultants.

---

# Odpověď ku článku p. Dra. W. W. Heinricha „O methodě instantánních oscillací v asteroidickém problému tří těles.“[1])

**Jindřich Svoboda** v Praze.

Vyvraceti námitky p. Heinrichovy proti mé kritice[2]) znamenalo by opakovati znovu veškeré výtky, které jsem proti jeho pracím již uvedl. Proto k vůli stručnosti prohlašuji předem, že na všech v první své kritice uvedených výtkách trvám. Poněvadž p. Heinrich se odvolává na cizí odborníky a článek jeho by mohl vzbuditi zdání, že samojediný pokládám práce Heinrichovy za nesprávné, uvedu v dalším dva dopisy vynikajícího odborníka v tom oboru, professora vratislavské university A. Wilkense, kterého se též p. Heinrich dovolává. (Viz Čas. XLVIII., str. 323., ř. 18. zdola.) Na dopis, ve kterém jsem prof. Wilkensovi sdělil své námitky proti práci Heinrichově a ve kterém jsem ho požádal, aby mi sdělil svůj náhled, odpověděl mi takto „Ich habe mir die Arbeit von Dr. Heinrich aus den früheren Jahren[3]) angesehen und kann Ihnen nun eine exakte Antwort geben. Ihr Einwand ist genau derselbe, den ich damals Dr. Heinrich gegenüber geltend machte; er war aber nicht damit zufrieden und wandte sich an Schwarzschild, ohne dass ich hiervon wusste u. ohne dass ich das Urteil von Schwarzschild erfuhr. Es muss aber auch nicht zustimmend gewesen sein. Es

---

[1]) Čas. XLVIII., str. 320. a násl.

[2]) Čas. XLVIII., str. 37. a násl.

[3]) Astr. Nachr. Bd. 194., pag. 209. (Článek téhož obsahu jako v Čas. XLVII., str. 175. a 407.)