Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Quido Vetter

Několik poznámek in margine Archimedových spisů, zvláště "Metody"

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 49 (1920), No. 4-5, 224--244

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108890

Několik poznámek in margine Archimedových spisů, zvláště „Metody".

Napsal Dr. Q. Vetter.

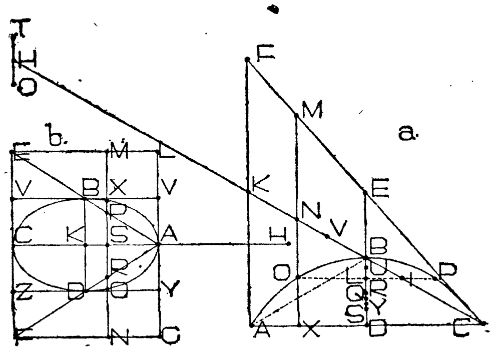
I.

Rok 1906 přinesl matematicko-historický objev, který způsobil ve vědeckém světě velký rozruch a proběhl snad všemi odbornými časopisy. Dánský učenec, vydavatel Euklida a Archimeda, J. L. Heiberg nalezl dosud neznámý spis *Περὶ τῶν μηχανικῶν θεωρημάτων πρὸς Ἐρατοσθένην ἔφοδος* neboli, jak se v literatuře stručně uvádí: „Metodu." V Cařihradském klášteře Sv. Hrobu byl uložen pergamenový rukopis pocházející z jerusalémského kláštera sv. Sabby, který obsahoval opisy Archimedových některých spisů z X. stol. Zbožní mniši litovali krásného pergamenu pro světské, jim snad dokonce nesrozumitelné spisy Archimedovy a smyli ve XII. až XIV. stol. staré písmo, aby na drahocenném pergamenu mohli napsati posvátné euchologion, totiž knihu liturgickou. Na štěstí pro dějiny matematiky nesmyli staré písmo úplně. Heibergovi podařilo se zbytky písma tohoto rozluštiti a velkou část scházejícího i doplniti. Vedle některých známých spisů nalezl v rukopise tom i dosud neznámý Archimedův spis „Metodu." Nález svůj uveřejnil v časopise „Hermes" r. 1907 a — po novém prozkoumání rukopisu — doplněný v 2. vyd. Archimedových spisů r. 1913. Německý překlad vyšel r. 1907 v časopise „Bibliotheca mathematica," český překlad od prof. Fr. Vrány o 2 roky později ve výroční zprávě gymnasia v Prostějově.

V „Metodě" poslal Archimedes slavnému matematikovi a zeměpisci Eratosthenovi důkaz dvou vět o obsahu úseků válců, vepsaných do kvádru. Leč tyto důkazy, které Archimedes označuje za cíl spisu v dopise, jej provázejícím, nezpůsobily onen velký rozruch.

Dějepisce matematiky mnohem více zajímalo 13 kapitol, které důkazy tyto předcházely a v nichž Archimedes Eratosthenovi sděluje mechanické úvahy, na jichž základě objevil skoro všechny hlavní poučky svých slavných geometrických spisů. Zřídka kdy jest dovoleno zvědavému historikovi nebo psychologovi nadzvednouti okraj neproniknutelné clony, zahalující všetečným našim zrakům taje duševní dílny geniovy, aby shlédl, jakými cestami se dopracovává tvůrčí duch svých objevů. Proto uvedu zde jako ukázku jeho způsobu myšlenkový postup, jak objevil vzorec pro plochu paraboly, první to poučku objevenou tímto způsobem, a vzorec pro obsah rotačního elipsoidu.

A) Od paraboly (obr. 1.a) o vrcholu *B* a ose *BD* jest uťata úseč tetivou *AC* kolmou k ose *BD*. Bodem *A* a libovolným bodem této tetivy *X* jsou vedeny rovnoběžky s osou, které protínají spojnici *BC* v bodech *K* a *N* a tečnu vedenou k parabole bodem *C*, v bodech *F* a *M*. Tuto tečnu protíná osa v bodě *E*.



Obr. 1.

Rovnoběžka *XM* protíná parabolu v *O*. Bodem *O* vedena jest rovnoběžka s tetivou *AC*, protínající spojnici *BC* v *I* a osu *BD* v *L*. I platí známé vztahy:

$$EB = BD \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1)$$

$$BD : BL = \overline{DA}^2 : \overline{LO}^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2)$$

Poněvadž $DA : LO = DC : XD = BC : NB$

a $DB : LB = BC : BI$,

platí podle položky 2), že

$$BC : BI = \overline{BC}^2 : \overline{BN}^2$$

t. j. $BI \, . \, BC = \overline{NB}^2$

čili $BC : NB = NB : BI.$

Vytvoříme-li součtovou úměru, obdržíme

$$BC : NB = NC : NI$$

neboli $DC : XD = NX : NO \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 3)$

Z položky 1) pyne, že

$$XN = NM \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 4)$$

Srovnáme-li rozdíl a součet členů téhož poměru v položce 3) a dosadíme-li vhodně z rovnic 1) a 4), dostaneme úměru

$$AX : XC = XO : OM.$$

Úměra součtová pak zní

$$XM : XO = AC : AX \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 5)$$

Spojnici CK prodloužíme a naneseme na ni

$$KH = CK.$$

Pak jest podle položky 5)

$$XM : XO = KC : KN = HK : KN \quad \ldots\ldots \quad 6)$$

Jádro Archimedova způsobu záleží v tom, že považuje úsečku CH za dvouramennou páku, podepřenou v K, takže jsou podle úměry 6) úsečky XM a $GT = XO$ v rovnováze. Trojúhelník ACF s parabolickou úsečí rozdělí Archimedes nekonečným množstvím řezů rovnoběžných s AF na nekonečně úzké proužky, jejichž plochu lze znázorniti úsečkami XM a XO. Ve spise „O kvadratuře paraboly,“ kde prvý ze dvou důkazů plochy parabolické úseče jest založen na podobné mechanické úvaze, rozdělil skutečně úseč i trojúhelník na plošky, omezené dvěma rovnoběžkami, osou a parabolickým obloukem, po případě čtvrtou úsečkou. Zde však přímo praví, že se uvažované plochy „skládají z úseček.“ Nepřesnosti tohoto rčení je si Archimedes plně vědom, neboť nepovažuje svůj mechanický postup za důkaz, nýbrž jen za objevnou cestu, která má usnadniti vypracování přesného geometrického důkazu.

I usuzuje Archimedes takto dále: Zavěsíme všechny elementy parabolické úseče v H, kdežto elementy trojúhelníka ACF ponecháme na jejich místě. Tímto způsobem přenese se celá úseč do H, kdež vyvažuje trojúhelník ACF, který zůstal na svém místě. Je-li V těžiště trojúhelníka ACF, jest poměr plochy parabolické úseče k ploše trojúhelníka ACF dán poměrem $VK : KH$, který jest $1 : 3$. Jednoduchou úvahou lze vyvoditi z tohoto poměru poučku, že plocha parabolické úseče ABC se rovná $4/3$ trojúhelníka ABC.

B) Jest dán rotační elipsoid, jehož osou rotace jest AC, meridianem elipsa $ABCD$. (Obr. 1b.) Střed elipsoidu leží v bodě K. Největší rotační kružnice jest opsána nad průměrem BD. Plocha kuželová, jejíž vrchol jest v A a která jest určena kružnicí BD, protíná rovinu, dotýkající se elipsoidu v C, v kružnici nad průměrem EF. Na tuto kružnici jakožto na základnu jest postaven válec o výšce AC. Všechna tři tato tělesa jsou proťata rovinou, vedenou libovolným bodem osy S kolmo k ose. Tato rovina řezu protíná kužel AEF v kružnici nad průměrem PR, elipsoid v kružnici nad průměrem XO a válec $EFGL$ v kružnici nad průměrem MN. Poněvadž jest

$$SM = CE,$$

lze psáti úměru

$$AC : AS = SM : SP = \overline{SM}^2 : SM \, . \, SP \quad \ldots \quad 7)$$

Při dalším postupu opíral se Archimedes o známý tehdy vztah

$$AS \, . \, SC : \overline{SX}^2 = AK \, . \, KC : \overline{KB}^2 = \overline{AK}^2 : \overline{KB}^2 \quad . \; . \quad 8)$$

Tento vztah lze snadno odvoditi z dnes nám mnohem běžnější vrcholové rovnice, vyjádřené po Archimedovsku takto:

$$\overline{SX}^2 = \frac{AC \, . \, \overline{KB}^2}{\overline{AK}^2} AS - \frac{\overline{KB}^2}{\overline{AK}^2} \, . \, \overline{AS}^2.$$

Dosadíme-li do toho výrazu za AC součet $AS + SC$, obdržíme rovnici

$$\overline{SX}^2 = \frac{SC \, . \, KB^2}{\overline{AK}^2} \, . \, AS,$$

která jest ekvivalentní s úměrou 8). Dosadíme-li

$$AK : KB = AS : SP$$

do úměry 8), obdržíme

$$AS \, . \, SC : \overline{SX}^2 = \overline{AS}^2 : \overline{SP}^2 \quad \ldots \ldots \quad 9)$$

Vytvoříme-li z úměry 7) úměru rozdílovou, dostaneme

$$SC : PM = AS : SP.$$

Znásobíme-li předy AS a sledy SP, zní tato úměra

$$AS \, . \, SC : SP \, . \, PM = \overline{AS}^2 : \overline{SP}^2.$$

Srovnáme-li tuto úměru s úměrou 9) vidíme, že

$$SP \, . \, PM = \overline{SX}^2.$$

Po přičtení výrazu $\overline{SP}^2$ k oběma stranám rovnice, změní se tato na

$$SM \,.\, SP = SP^2 + SX^2 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 10)$$

Osu AC prodloužíme za A a naneseme na ni délku $AH = CA$. Po dosazení HA za AC a výrazu z rovnice 10) do úměry 7), zní tato

$$HA : AS = \overline{SM}^2 : (\overline{SP}^2 + \overline{SX}^2) \; . \; . \; . \; . \; . \; 11)$$

Plochy kruhů jsou však úměrny se čtverci svých poloměrů, pročež považujeme-li zase AHC za dvojramennou páku s osou A, jsou ramena HA a AS úměrna s kruhem ve válci $EFGL$ a součtem kruhů v kuželi AEF a v elipsoidu, které leží v téže rovině kolmé na ose. Přeneseme-li tudíž kruhy nad průměry XO a PR do H, budou vyváženy kruhem nad průměrem MN, který zůstává na svém místě. Soustavou nekonečného množství řezů, kolmých k AC a nekonečně blízkých, rozpadnou se všechna tři tělesa na nekonečně úzké vrstvy, kterýchžto elementů obsahy lze representovati plochami oněch kruhů. Proto jest válec $EFGL$ v dané poloze v rovnováze s kuželem AEF a elipsoidem $ABCD$, zavěšenými v H. Těžiště válce jest však v bodě K, takže obsah válce má se k součtu obsahů druhých dvou těles jako $HA : AK$ čili jako 2 : 1. Ze známého obsahu válce a kužele lze jednoduchou úvahou na základě právě vyjádřené úměry vypočísti obsah elipsoidu, který Archimedes vyjadřuje jako 2/3 válce jemu opsaného, totiž válce $UVZY$.

Hledá-li Archimedes polohu těžiště tělesa, jehož obsah zná, tu ponechává toto těleso na jeho místě a přenáší známá tělesa do bodu H. Úměrou, kterou takto dostane při vhodně volených pomocných tělesech, stanoví ze známých obsahů poměr neznámé vzdálenosti těžiště od bodu A k délce HA.

Tímto způsobem stanoví v „Metodě“ obsah koule, rotačního elipsoidu, úseče rotačního paraboloidu, polohu jejího těžiště, těžiště polokoule, obsah úseče kulové a polohu jejího těžiště, podává pak pouhé znění pouček o obsahu úseče rotačního elipsoidu, o poloze jejího těžiště, o obsahu úseče rotačního dvojplochého hyperboloidu a o poloze jejího těžiště. Úseče jsou vesměs uťaty rovinami kolmými k ose rotace.

II.

Archimedes uvádí na počátku „Metody“ deset pomocných vět, z nichž poslední praví, že těžiště rotačního kužele leží na ose ve $^3/_4$ osy od vrcholu kužele. Ukážeme na této větě, jak by se dala Archimedovským způsobem objeviti, aniž bychom se zde zabývali otázkou, zda ji Archimedes vůbec objevil a zda jest pravděpodobné, že to učinil tímto způsobem.

Budiž dán kužel AEF, jehož těžiště jest hledati. (Obr. 1.b) Půlícím bodem K jeho osy proložena jest k této kolmá rovina, která kužel protíná v kružnici nad průměrem BD. Nad úsečkami AC a BD jakožto osami jest opsána elipsa, jejíž rotací kol AC vznikne elipsoid. Rovina, vedená libovolným bodem osy S kolmo k této, protíná kužel v kružnici o průměru PR a elipsoid v kružnici o průměru XO.

Úměra 9) z kap. I. zní

$$AS \,.\, SC : \overline{SX}^2 = \overline{AS}^2 : \overline{SP}^2 \qquad 1)$$

Vytvoříme-li úměru součtovou, dostaneme

$$(\overline{SP}^2 + \overline{SX}^2) : \overline{SP}^2 = AS \,.\, (AS + SC) : \overline{AS}^2 = AS \,.\, AC : \overline{AS}^2 \qquad 2)$$

Osu AC prodloužíme zase za vrchol A o její délku do H. Zkrátíme-li poslední poměr úměry činitelem AS a dosadíme-li HA za AC, můžeme psáti

$$HA : AS = (\overline{SP}^2 + \overline{SX}^2) : \overline{SP}^2. \qquad 3)$$

Poněvadž pak plochy kruhů jsou úměrny se čtverci svých poloměrů, jest poměr součtu kruhů PR a SX ke kruhu PR roven poměru $HA : AS$. Považujeme-li jako v kapitole předešlé HC za dvouramennou páku v ose A, lze elipsoid a kužel, jež nemění své polohy, vyvážiti břemenem, zavěšeným v H, jehož obsah se rovná obsahu kužele daného. Podobné úvahy provádí Archimedes tak, že si myslí toto břemeno složeno ze dvou částí M a N, z nichž prvé M, jest v rovnováze s kuželem, jehož obsah vyjádříme značkou K, a druhé N jest v rovnováze s elipsoidem, jehož obsah nechť jest E. I platí úměra

$$E : N = HA : AK = 2 : 1 \qquad 4)$$

V „Methodě“ ukázal Archimedes, že

$$E : V = 2 : 3,$$

kde V jest válec rotační $UVZY$, jehož osa jest také AC. Souosý válec $LEFG$ označíme V^*. I jest

$$V : V^* = 1 : 4$$
$$V^* : K = 3 : 1.$$

Znásobíme-li poslední tři úměry, obdržíme po patřičném zkrácení

$$E : K = 1 : 2 \qquad 5)$$

Ze spojení úměry 4) a 5) plyne, že

$$N = \tfrac{1}{4} K.$$

Poněvadž pak

$$M + N = K,$$

musí býti

$$M = \tfrac{3}{4} K.$$

Je-li T těžiště kužele, platí na základě rovnováhy úměra

$$HA : AT = K : M = 1 : \tfrac{3}{4},$$

čímž stanovena poloha těžiště kužele.

III.

V „Metodě“ uvádí Archimedes také znění dvou vět o rotačním dvojplochém hyperboloidu, který nazývá tupoúhlým konoidem, aniž by nám ukázal, jak je objevil. Praví tam doslovně:

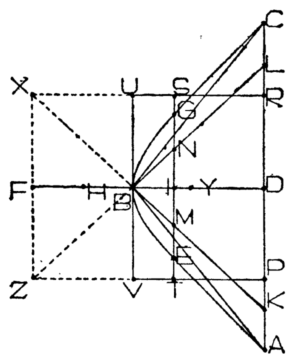
„Tímto způsobem se však také nahlédne, že každá úseč tupoúhlého konoidu má ke kuželi o téže základně jako úseč týž poměr, jaký má součet osy úseče a trojnásobku úsečky k ose přilehlé k součtu osy úseče konoidu a dvojnásobku úsečky k ose přilehlé. Těžiště pak úseče tupoúhlého konoidu leží na ose tak, že část při vrcholu úseče má ke zbytku týž poměr, jaký má součet trojnásobku osy a osminásobku úsečky k ose přilehlé k součtu osy konoidu a čtyřnásobku úsečky k ose přilehlé“. Úsečkou k ose přilehlé nazývá Archimedes naši hlavní poloosu hyperboly rotačního meridianu.

Přeložíme tyto věty do moderní mluvy matematické a pokusíme se ukázati, jak je asi mohl Archimedes svým způsobem mechanickým objeviti. Jest dán dvojplochý rotační hyperboloid, jehož osa jest BD. (Obr. 2.). Meridian hyperboloidu jest hyperbola ABC. Úseč utíná rovina bodem D kolmo k ose vedená. H jest střed hyperboloidu. Na kruhové základně úseče AC postaven jest s hyperboloidem souosý rotační kužel o vrcholu v B. Označíme-li těžiště úseče písmenou Y, praví nám Archimedovy poučky, že

$$\text{Úseč } ABC : \text{Kuž. } BAC = (BD + 3\,BH) : (BD + 2\,HB)$$
$$BY : YD = (3\,BD + 8\,HB) : BD + 4\,HB).$$

Libovolným bodem I osy BD jest k ní vedena kolmá rovina, která protíná hyperboloid v kružnici opsané nad průměrem EG. Archimedes, jak z jiných jeho spisů víme, znal vztah

$$\overline{IE}^2 : \overline{DA}^2 = BI \,.\, FI : BD \,.\, FD, \qquad 1)$$



Obr. 2.

je-li $FH = HB$. Vztah ten lze obdobnou úvahou, jak jsme provedli v kapitole I. při rovnici 8), převésti na vrcholovou rovnici hyperboly. Abychom v této úměře dostali poměr čtverců, jak jej potřebujeme, naneseme na AC od D délky $KD = DL$, vyhovující úměře

$$\overline{AD}^2 : \overline{KD}^2 = BD \,.\, FD : \overline{BD}^2 = FD : BD \qquad 2)$$

Nad průměrem KL opíšeme kružnici, kterou považujeme za základnu rotačního kužele o vrcholu v B. Kužel ten protat jest rovinou řezu vedenou bodem I v kružnici nad průměrem MN. I platí úměra

$$\overline{KD}^2 : \overline{MI}^2 = \overline{BD}^2 : \overline{BI}^2 \qquad 3)$$

Znásobíme-li úměry 1), 2) a 3) a zkrátíme-li, dostaneme vztah

$$\overline{EI}^2 : \overline{MI}^2 = FI : BI, \qquad 4)$$

Bodem F vedeme rovnoběžku s AC, která protíná spojnice EK a BL v bodech X a Z. Rovnoběžky s osou hyperboloidu vedené těmito body protínají AC a rovnoběžku s touto přímkou bodem B, v bodech P a R, U a V. Nad průměry PR a UV opíšeme kružnice, jež pokládáme za základny rotačního válce. Rovina řezu protíná válec v kružnici nad průměrem TS.

Dosadíme-li do úměry 4) za FI délku XS a přihlédneme-li k podobnosti trojúhelníků SMX a IMB, můžeme psáti vztah

$$\overline{EI}^2 : \overline{MI}^2 = MS : MI = MS \,.\, MI : \overline{MI}^2,$$

z čehož plyne rovnice

$$\overline{EI}^2 = MS \,.\, MI,$$

Odečteme-li od obou stran této rovnice $\overline{MI}^2$, dostaneme po vhodné úpravě

$$\overline{EI}^2 - \overline{MI}^2 = IS \,.\, MI \qquad 5)$$

Z podobnosti trojúhelníků FXB a IMB a z rovnosti délek FX a IS plyne

$$FB : BI = IS : MI = \overline{IS}^2 : MI \,.\, IS \qquad 6)$$

Dosadíme-li za poslední člen tohoto vztahu rozdíl z rovnice 5), dostaneme úměru pro rovnováhu řezů

$$FB : BI = \overline{IS}^2 : (\overline{EI}^2 - \overline{MI}^2),$$

t. j. kružnice nad průměrem SI a rozdíl kružnic nad průměry EG a MN jsou úměrny s délkami FB a BI.

Je-li FD dvojramenná páka o ose v B, jest válec $PRUV$, ponechaný na svém místě v rovnováze s dutým tělesem, vzniklým z úseče hyperboloidu ABC, zmenšené o kužel EKL, zavěšeným v F. Těžiště válce jest v polovině délky BD, pročež platí úměra

$$FB : \frac{BD}{2} = \text{Vál. } PRUV : (\text{Ús. } ABC - \text{Kuž. } BKL) \qquad 7)$$

Nad základnou válce $PRUV$ sestrojíme rotační kužel BPR o téže výšce, i jest

$$\text{Kuž. } BKL : \text{Kuž. } BPR = \overline{KD}^2 : \overline{PD}^2 = \overline{BD}^2 : \overline{FB}^2$$

$$\text{Kuž. } BPR : \text{Vál. } PRUV = 1 : 3$$

Znásobíme-li úměru 7) těmito dvěma úměrami, obdržíme

$$\text{Kuž. } BKL : (\text{Ús. } ABC - \text{Kuž. } BKL) = BD : 3 \,.\, HB$$

Součtová úměra zní

$$\text{Kuž. } BKL : \text{Ús. } ABC = BD : (BD + 3 \,.\, HB) \qquad 8)$$

Přihlédneme-li konečně ke kuželi, jehož základna jest kružnice nad průměrem AC a vrchol v B, můžeme psáti s ohledem na 2)

$$\text{Kuž. } BAC : \text{Kuž. } BKL = FD : BD.$$

Znásobíme-li tuto úměru položkou 8) a dosadíme-li za FD výraz $BD + 2 \,.\, HB$ obdržíme žádanou úměru

$$\text{Ús. } ABC : \text{Kuž. } BAC = (BD + 3 \,.\, HB) : (ED + 2 \,.\, HB) \qquad 9)$$

Při určení těžiště Y mohl Archimedes vyjíti z úměry 6), jejíž druhý poměr však místo délkou IS nutno znásobiti délkou MI. Pak jest

$$FB : BI = IS \,.\, MI : \overline{MI}^2 \qquad 10)$$

Dosadíme-li za třetí člen této úměry rozdíl z rovnice 5), obdržíme

$$FL : BI = (\overline{EI}^2 - \overline{MI}^2) : \overline{MI}^2 \qquad 11)$$

Nahradíme li čtverce poloměrů úměrnými kruhy a provedeme-li obdobnou úvahu jako dříve, vidíme, že duté těleso, vzniklé z úseče hyperboloidu ABC, zmenšené o kužel BKL, jest na svém místě vyváženo tělesem rovným kuželi BKL, zavěšeným v F, při čemž osa páky jest opět v B. Toto těleso vyjádříme rozdílem dvou těles $M - N$ tak volenými, aby M vyvážilo úseč hyperboloidu a N kužel. I platí tyto vztahy:

$$M - N = \text{Kuž. } BKL \qquad 12)$$

$$\text{Kuž. } BKL : N = FB : \tfrac{3}{4}\, BD = 4 \,.\, FB : 3 \,.\, BD \qquad 13)$$

$$\text{Ús. } ABC : M = FB : BY.$$

Poslední vztah, znásobený úměrou 8) zní:

$$\text{Kuž. } BKL : M = FB \,.\, BD : BY \,.\, (BD + 3 \,.\, HB) \qquad 14)$$

Dosadíme-li za kužel BKL rozdíl z rovnice 12) a vytvoříme-li úměru součtovou, můžeme psáti úměru 13)

$$M : N = (4 \,.\, FB + 3 \,.\, BD) : 3 \,.\, BD.$$

Obrátíme-li v této úměře poměry a znásobíme-li ji úměrou 13), jest

$$\text{Kuž. } BKL : M = 4FB : (4 \,.\, FB + 3 \,.\, BD).$$

Srovnáme-li druhý poměr této úměry s druhým poměrem úměry 14), při čemž dosadíme $2 \cdot HB$ za FB, dostaneme úměru

$$8 \cdot HB : (8 \cdot HB + 3 \cdot BD) = 2 \cdot HB \cdot BD : (BD + 3 \cdot HB) \cdot BY$$

Po vhodné úpravě zní tato úměra:

$$4 \cdot (BD + 3 \cdot HB) : (8 \cdot HB + 3 \cdot BD) = BD : BY.$$

Utvoříme-li ještě rozdílovou úměru a vyjádříme-li rozdíl $BD - BY$ úsečkou YD, zní výsledná úměra

$$BY : YD = (3 \cdot BD + 8 \cdot HB) : (BD + 4 \cdot HB) \qquad 15)$$

Při této úvaze mohla by se zdáti volba kužele BKL na základě úměry 2) umělou. U Archimeda se však vyskytuje často určení pomocných útvarů podobnou úměrou. Kužel BKL jest pak obdobou kužele AEF při rotačním elipsoidu kterého, jak jsme v kap. I. ukázali, Archimedes použil. Pomocný kužel BKL, jak se lze výpočtem snadno přesvědčiti, jest rovnoběžný s kuželem asymptotickým. Jest ovšem více než pochybno, že by byl Archimedes tuto vlastnost znal.

IV.

Když Archimedes vylíčil v „Metodě“, jak objevil vzorec pro obsah koule, praví:

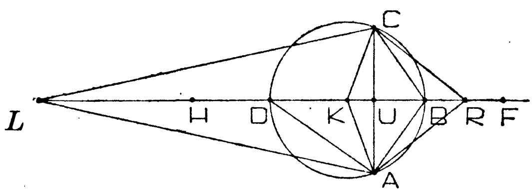
„Když bylo vyzkoumáno, že každá koule je čtyřnásobek kužele, majícího za základnu největší kruh koule a za výšku poloměr koule, vznikla myšlenka, že povrch každé koule jest čtyřnásobek největšího kruhu v kouli. Byl tu totiž předpoklad, že jako každý kruh se rovná trojúhelníku, majícímu za základnu obvod kruhu, výšku pak rovnou poloměru kruhu, že tak i každá koule se rovná kuželi, majícímu za základnu povrch koule, výšku pak rovnou poloměru koule.“

Toto doznání o postupu Archimedových objevů jest jistě velmi zajímavé. Ve spisu „O kouli a válci“, kde přesně geometricky dokazuje vzorce pro obsah a povrch koule, postupoval přísně metodicky od plochy, tedy povrchu, k obsahu, kdežto objev se bral cestou právě opačnou. Lze zajisté předpokládati, že stejně se tak dělo u vzorce pro úseč a vrchlík koule. V „Metodě“ jest zachován objev výrazu pro obsah kulové úseče.

K vrchlíku mohl dojíti obdobně jako u celé koule, když si byl úseč proměnil na rotační kužel o stejné základně jako má tato. V podobných transformacích byl Archimedes, jako Řekové vůbec, mistrem. K tomuto kuželi mohl pak přičísti kužel, postavený na základně úseče, jehož vrchol jest ve středu koule a součet tento proměniti v rotační kužel, jehož výška se rovná poloměru dané koule.

Leč postup objevu mohl býti i poněkud jiný. Ve druhé knize uvedeného již spisu „O kouli a válci“ odvozuje Archimedes obsah kulové úseče, vycházeje od vrchlíku a kulové výseče. Považujeme-li toto místo za pokyn, pak by byl mohl Archimedův objev postupovati asi touto cestou:

Od koule o středu K jest uťata úseč ABC rovinou, kolmou k průměru DB. (Obr. 3.) Průměr ten protíná rovinu AC



Obr. 3.

ve středu základny úseče U a plochu kulovou v jejím vrcholu B. Do úseče jest dále vepsán kužel o téže základně a vrcholu v B. V „Metodě“ byla o obsahu kulové úseče dokázána poučka:

$$\text{Ús. } ABC : \text{Kuž. } BAC = (BK + UD) : UD \qquad 1)$$

Poloměr jest nanesen do úseček HD a BF.

Na základnu úseče jest postaven kužel, jehož vrchol leží na prodlouženém průměru DB v bodě R daném úměrou:

$$RU : BU = UH : UD \qquad 2)$$

Tu jest kužel RAC roven úseči ABC. Kulová výseč rovná se součtu kužele RAC a kužele o téže základně a vrcholu ve středu koule K. Tento součet lze vyjádřiti jako kužel o stejné základně a výšce rovné délce KR, který proměníme v jiný kužel o výšce, rovné poloměru koule KB, a poloměru m. I platí podle věty, Archimedem uvedené,

$$RK : BK = m^2 : \overline{UC}^2 \qquad 3)$$

Podle známé vlastnosti kružnice jest

$$\overline{UC}^2 = BU \,.\, UD.$$

Dosadíme-li tento výraz do úměry 3) a proměníme-li také m^2 v obdélník, jehož jedna strana jest UB, kdežto za druhou dostaneme novou délku n, pak zní tento vztah

$$RK : BK = n : UD.$$

Vytvoříme-li úměru rozdílovou, obdržíme

$$RB : BK = (n - UD) : UD.$$

Rozdílová úměra, vytvořená z položky 2), zní po úpravě

$$RB : BK = BU : UD.$$

Srovnáme-li obě poslední úměry, vidíme, že

$$n - UD = BU$$

neboli že $\qquad n = BD.$

Jest tedy $\qquad m^2 = BD \,.\, BU,$

t. j. $\qquad m = BC. \qquad\qquad 4)$

Kulová výseč $KABC$ jest takto převedena na kužel rotační o výšce rovné poloměru koule a základně, jejíž poloměr jest dán tětivou BC. Vrchlík pak jest roven této základně. Výsledek ten skutečně také Archimedes dokázal přesně geometricky v uvedeném spise „O kouli a válci“.

Pro první objev by se snad mohlo zdáti, že tato cesta jest příliš umělou a že Archimedes mohl výsledek vytušiti jiným způsobem. Moderní badatel, jemuž jsou různá zevšeobecnění zcela běžná, mohl by ovšem uvažovati takto:

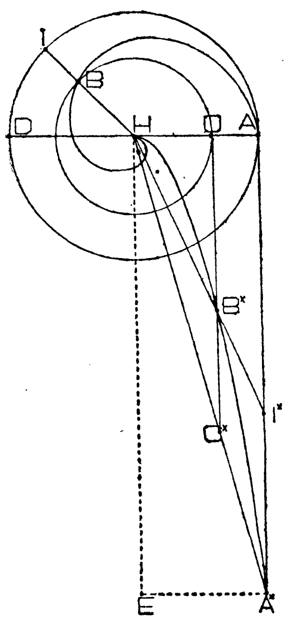
Povrch celé koule jest vlastně maximální tvar vrchlíku, jehož základna jest redukována na bod. Poněvadž povrch koule jest roven čtyrnásobku hlavního kruhu koule, čili jest roven kruhu, jehož poloměr jest průměrem koule, redukuje se otázka po ploše vrchlíku na otázku, která úsečka má za mezný tvar onu délku $2r$. Jest na snadě myšlenka, že to jest asi buď mez výšky vrchlíku BU nebo tetivy BC. V tom by mohl moderní badatel nalézti pokyn pro objev vzorce pro plochu vrchlíku. Leč můžeme Archimedovi přisouditi schopnost povznésti se na tak zevšeobecňující stanovisko? Řekům, jak známo, nebylo tak snadno shrnouti řadu jedinečných typů pod jediné hledisko a i Archimedes činí rozdíl mezi vrchlíkem větším a menším než polokoule a rozdělil proto poučku o ploše vrchlíku do dvou vět.

V.

Se jménem Archimedovým jest spojena t. zv. „Archimedova spirála". Jest to spirála, vytvořená bodem, který se pohybuje stejnoměrnou rychlostí po polopaprsku otáčejícím se stejnoměrně kol počátku. Počátek ten nazýváme pólem. Rovnice Archimedovy spirály jest v polárních souřadnicích, jak známo,

$$\varrho = a\,\varphi.$$

Archimedes věnoval spirále této celý spis, nadepsaný „O spirálách". Hlavním cílem jeho jest vyšetřiti plochu jednotlivých závitů. Objev těchto vět vznikl v době, kdy Archimedes usilovně pracoval na objevu vět o ploše paraboly a obsahu těles, kdy se tedy zabýval horlivě svou mechanickou objevnou cestou vylíčenou v „Methodě". Není zde místa, abych uváděl důvody tohoto tvrzení, jež snad uveřejním jindy. Důkaz vzorců o ploše spirály v uvedeném Archimedově spise jest dosti umělý a zdá se nasvědčovati tomu, že Archimedes, když tento důkaz sestavoval, již znal výsledný vzorec, k němuž chtěl dospěti. Na otázku, jak Archimedes tyto vzorce objevil, nenalézáme v „Metodě" odpovědi, ba ani narážky, z níž bychom mohli s dostatečnou pravděpodobností si tuto odpověď skonstruovati. Jsme tudíž odkázáni na pouhé hypothésy. Kdyby byl Archimedes použil svého mechanického postupu, byl by musil plochu spirály vyjádřiti rovnoběžnými přímkovými elementy. Při přesném důkazu vět sem příslušných užívá Archimedes malých segmentů mezikruží, jichž součet lze učiniti menší než jest libovolná plocha. Při ploše paraboly jsou tyto malé plošné elementy — lichoběžníčky — v geometrickém důkaze ekvivalentní s úsečkovými elementy v „Metodě". Bylo by tudíž pravděpodobno, že tyto segmenty mezikruží z geometrického důkazu vzorce pro plochu spirály byly při objevu rovněž zastoupeny pouhými elementy obloukovými, jež byly částí kruhů, majících společný střed v pólu spirály. Soustřednost těchto oblouků, z nichž si lze představiti po Archimedovsku uvažované plochy složeny, zastupuje zmíněnou rovnoběžnost v „Metodě“. Nebylo by příliš odvážno, vysloviti hypothésu, že Archimedes transformoval tyto kruhové elementy v úsečky? Doklad, že transformace taková by byla možna u Archimeda viděl bych v transformaci plochy kruhu v trojúhelník, o níž se zmiňuje Archimedes ve větě uvedené na počátku kap. IV. Tuto transformaci uvádí Archimedes také ve svém spise „Měření kruhu“.



Obr. 4.

Připustíme li tuto hypotésu pak lze podati pravděpodobný asi postup Archimedovu objevu. Jest dána spirála ABH, jejíž pól jest H a počáteční polopaprsek HA. (Obr. 4.) Jest vyšetřiti plochu omezenou spirálou ABH a úsečkou HA. Libovolným bodem spirály B a koncovým bodem prvého závitu A jsou vedeny kružnice o středu v H, totiž OBO a AIA, kdež v O protíná první kružnice počáteční polopaprsek a v I druhá kružnice průvodič bodu B, Kruh AIA transformujeme v pravoúhlý trojúhelník, jehož vrchol odpovídající pólu jest H, kružnice AIA se rozvine v odvěsnu AI^*A^*. Počáteční polopaprsek jest odvěsna HA i přepona HA^* kružnice OBO transformuje se v příčku OBC^*, spirála v křivku HB^*A^* a hledaná plocha v část plochy trojúhelníka $A^*B^*HC^*$. Průvodič HBI transformuje se do příčky trojúhelníka HB^*I^*. I jest v trojúhelníku

$$B^*O : C^*O = I^*A : A^*A = HB^* : HI^* = HO : HA, \qquad 1)$$

jak plyne z definice spirály. Odvěsnu HA prodloužíme za H a naneseme na ni HD rovno délce HA. I lze zase pokládati DA za dvouramennou páku s osou v H. Dosadíme-li DH za HA, zní úměra 1)

$$DH : HO = C^*O : B^*O.$$

Proto jest úsečka C^*O ponechaná na svém místě vyvážena úsečkou B^*O, přenesenou do D. Ve shodě s Archimedovým postupem lze tedy vyvážiti celý trojúhelník HAA^* ponechaný na jeho místě plochou HB^*A^*AO, zavěšenou v D. Poněvadž těžiště trojúhelníka jest ve dvou třetinách od vrcholu, platí úměra

$$HB^*A^*AO : \triangle HA^*A = 2 : 3,$$

z čehož lze vytvořiti rozdílovou úměru

$$HB^*AC^* : \triangle HA^*A = 1 : 3 \qquad 3)$$

Přeneseme-li tento výsledek na spirálu, jest patrno, že plocha spirály $HBAOA$ jest jedna třetina plochy kruhu AIA, jak Archimedes dokazuje.

Snad nebylo ani třeba prováděti celou mechanickou úvahu. Bylo by dostačilo také vyšetřiti, jaká křivka jest čára A^*B^*H. Definici této křivky lze vyjádřiti úměrami:

$$B^*C : I^*A = HO : HA$$
$$I^*A : A^*A = HO : HA.$$

Znásobíme-li obě úměry, dostaneme vztah

$$B^*O : A^*A = \overline{HO}^2 : \overline{HA}^2,$$

o němž však Archimedes věděl, že charakterisuje parabolu, procházející bodem H rovnoběžně s A^*A. Doplníme-li trojúhelník na obdélník HAA^*E, jest

$$A^*B^*HE = \tfrac{4}{3} \triangle HA^*E.$$

Odečteme-li na obou stranách trojúhelník HA^*E a dosadíme-li do rozdílu za tento trojúhelník jemu rovný trojúhelník HAA^*, dostaneme rovnici ekvivalentní s úměrou 3).

Archimedovy poučky o plochách dalších závitů spirály by se mohly objeviti podobnými úvahami, v nichž by se ovšem mezikruží, jimiž spirála probíhá, transformovala v lichoběžníky.

VI.

Druhá kniha Archimedova spisu „O rovnováze rovin“ obsahuje 10 pouček, z nichž poslední tři znějí:

8.) Těžiště parabolické úseče leží na průměru paraboly ve třech pětinách od vrcholu.

9.) Je-li dáno:

$$BA : BC = BC : BD = BD : BE,$$

$$BE : EA = FH : \tfrac{3}{5} DA,$$

$$(2\,BA + 4\,BC + 6\,BD + 3\,BE) : (5\,BA + 10\,BC + 10\,BD + + 5\,BE) = GH : DA,$$

platí, že

$$FG + GH = \tfrac{2}{3}\,BA.$$

10.) Vedeme-li v parabole (obr. 1.) dvě rovnoběžné tětivy AC a OP — $AC > OP$ — a je-li prostřední pětina úseku DL na průměru parabolické úseče $ADCPLO$ mezi tětivami omezena body Q a S — Q blíže L —, tu vyhovuje těžiště Y obrazce $ACPO$ úměře:

$$QY : YS = \overline{AD}^2 . (2\,OL + AD) : \overline{OL}^2\,(2\,AD + OL).$$

Věta 9.) jest jenom větou pomocnou, potřebnou pro důkaz věty 10.). Věta ta jest velmi umělá i jest přirozeno se tázati, proč Archimedes ji právě vyvolil, aby na jejím základě hledal formulaci vzorce pro polohu těžiště vyšetřovaného obrazce.

Při důkaze věty 10.) považuje Archimedes vyšetřovanou plochu za rozdíl dvou parabolických úsečí, ABC a OBP. Polohu jejich těžišť, R ve větší a U v menší úseči, dovedl určiti podle věty 8. V prvé knize uvažovaného spisu dokázána jest poučka:

Je-li R těžiště nějakého útvaru a U těžiště jeho části, leží těžiště Y zbytku na prodloužené spojnici RU tak, že váha obou částí jest nepřímo úměrna se vzdálenostmi jejich těžišť od těžiště celku.

Váhy obrazců zde se vyskytujících jsou úměrny s jejich obsahem. Pro lepší přehled nanesl si Archimedes, jak to také v důkaze projednávané věty činí, osu větší parabolické úseče BD do úsečky $M'N'$ a osu menší úseče do jejího prodloužení $N'O'$. I podařilo se mu ukázati způsobem v důkaze provedeným, že obsahy těchto úsečí jsou přímo úměrny s úsečkami $M'T'$ a $T'N'$, je-li

$$M'N' : N'X' = N'X' : N'O' = N'O' : T'O'.$$

Proto platí, je-li R, U a Y těžiště obou úsečí a zbytku, že

$$M'T' : T'N' = UR : RY.$$

Avšak U leží mimo vyšetřovaný obrazec $ACOP$, Archimedes pak vždy, jak můžeme v jeho spisech viděti, snažil se vyjádřiti hledané veličiny prvky, jež lze přímo na daném útvaru zjistiti a změřiti. Proto při objevu nanesl asi délku UR od bodu D směrem k bodu L do úsečky DQ a ukázal asi tak, jak se to děje v jeho důkaze, že DQ jest rovno třem pětinám délky DL. Poněvadž ani U ani R nelze prostým odměřením na daném obrazci $ACOP$ ihned určiti, snažil se vyjádřiti polohu bodu Y dělícím poměrem ku dvěma bodům daného obrazce samotného. Snad ho k této snaze vedl i pokus, provedený zavěšováním destičky tvaru $ACPO$. Poměr $LY : YD$ byl by však dopadl příliš složitý, totiž

$$(3\,\overline{AD}^3 + 6\,\overline{AD}^2 . OL + 4\,AD . \overline{OL}^2 + 2\,\overline{OL}^3) : (3\,\overline{OL}^3 + \\ + 6\,\overline{OL}^2 . AD + 4\,OL . \overline{AD}^2 + 2\,\overline{AD}^3)$$

jak se lze výpočtem přesvědčiti. Proto sáhl raději k bodům Q a S, k rozdělení, jež bylo předešlými vývody dáno. Při výpočtu tohoto poměru narazil na úměru z věty 9. i musil ji dříve dokázati.

VII.

Poučky, jimiž Archimedes obohatil geometrii, byly objeveny, jak se zdá, mnohem dříve, než došlo k vydání jeho spisů, obsahujících přesné geometrické důkazy těchto vět. Bylť v době těchto objevů právě příliš zaměstnán činností tvůrčí, než aby se byl mohl věnovati pečlivému vypilování svých pojednání. Avšak řadu svých nových objevů poslal bez důkazů a bez řešení matematikovi Kononovi jako výzvu k současným matematikům, aby na předložených úlohách ukázali své umění. Mezi těmito poučkami byly dvě nesprávné, o nichž Archimedes praví v předmluvě ke „Spirálám“; „... mezi nimi (t. j. problémy Kononovi zaslanými) byly položeny dva, které jsem ještě nedovedl ke správnému konci, aby byli ti, kteří se holedbají, že všechno naleznou, nepodavše toho nijakého důkazu, usvědčeni, že jednou slíbili dokázati nemožné.“ Škoda jen, že právě v tomto místě jsou zachované staré rukopisy hojně porušeny, takže v různých vydáních není toto místo stejné i jsou oprávněny pochybnosti, zda skutečně takto znělo. Nesprávné znění, uvedených vět bylo:

1.) „Je-li koule rozdělena rovinou na dvě nestejné části, má větší úseč k menší dvojnásobný poměr (t. j. poměr rovný čtverci poměru) jako větší povrch (t. j. vrchlík) k menšímu."

2.) „Je-li průměr nějaké koule tak rozdělen, že čtverec nad větším dílem jest trojnásobek čtverce nad menším dílem, a protíná-li kouli rovina vedená dělícím bodem kolmo k tomuto průměru, tu jest útvar toho druhu, jakého jest větší kulová úseč, největší ze všech úsečí o stejném povrchu (vrchlíku)."

Správné znění těchto pouček nalézáme ve spise „O kouli s válci". Zní:

1.) „Je-li koule proťata rovinou neprocházející středem, má větší úseč k menší poměr menší, než jest dvojnásobný poměr (t. j. čtverec poměru), který má povrch větší úseče (t. j. vrchlík) k povrchu menší, avšak poměr větší, než jest jedna a polovina poměru toho (t j. poměr obou vrchlíků povýšený na $^3/_2$)."

2.) „Ze všech kulových úsečí, jež jsou omezeny stejným vrchlíky jest polokoule největší".

Dnes nelze rozhodnouti, zda Archimedes úmyslně zaslal Kononovi věty nesprávné, či zda ve svých úvahách nejdříve sám pochybil.

Podnět k nesprávné formulaci prvé poučky snad bychom mohli vytušiti, pokusíme-li se Archimedovským způsobem vyšetřiti závislost mezi poměrem úsečí a vrchlíků. Jest dána koule o středu K a poloměru KB. (Obr. 3.) Podle poučky, kterou Archimedes dokázal ve spise „O kouli a válci" a která jest vyslovena v rovnici 4) v kap. IV., platí:

$$\text{Vrchl.}\, ABC : \text{Vrchl.}\, ADC = \overline{AB}^2 : \overline{AD}^2 = BU \,.\, BD : UD \,.\, BD = \\ = BU : UD. \qquad 1)$$

Poloměr koule naneseme na prodloužený průměr BD do úseček BF a DH.

Sestrojíme dále body R a L, vyhovující úměrám

$$\left. \begin{array}{l} RU : BU = UH : UD \\ UL : UD = FU : BU \end{array} \right\} \qquad 2)$$

Podle 1) položky kap. IV. jsou úseče ABC a ADC rovny rotačním kuželům o výškách UR a UL, majících za společnou základnu kruhový řez AC. Jest tedy poměr úsečí dán poměrem $RU : UL$. Znásobíme-li úměry 2), napřed je vhodně uspořádavše, obdržíme $RU . FU : UH . UL = \overline{BU}^2 : \overline{UD}^2$

a po úpravě $RU : UL = \overline{BU}^2 . UH : \overline{UD}^2 . FU$

Po dosazení poměrů úsečí a vrchlíků do poslední úměry, jest tato:

Ús. ABC : Ús. ADC = (Vrchl. $ABC)^2 . UH$: (Vrchl. $ADB)^2 . FU$.

Nesprávnost věty Kononovi zaslané záleží v tom, že z úměry vypadly činitelé UH a FU.

Ke správnému znění snad došel Archimedes tím, že srovnával poměr $RU : UL$ s mocninami poměru $AB : AD$, t. j. že vytvořil řadu nerovností:

$$RU : UL > AB : AD = \sqrt{\text{Vrchl. } ABC} : \sqrt{\text{Vrchl. } ADC}$$
$$RU : UL > \overline{AB}^2 : \overline{AD}^2 = \text{Vrchl. } ABC : \text{Vrchl. } ADC$$
$$RU : UL > \overline{AB}^3 : \overline{AD}^3 = (\text{Vrchl. } ABC)^{\frac{3}{2}} : (\text{Vrchl. } ABC)^{\frac{3}{2}}$$
$$RU : UL < \overline{AB}^4 : \overline{AD}^4 = (\text{Vrchl. } ABC)^2 : (\text{Vrchl. } ADC)^2$$

I jest jasno, že poměr úsečí leží mezi třetím a čtvrtým členem této řady.

Správné znění této poučky jest zajímavo i tím, že Archimedes tu in nuce vyslovil jakýsi náběh k myšlence lomených mocnitelů, která byla provedena až v XVII. stol. Wallisem.

Kde byl podnět druhé nesprávné poučky, nepodařilo se mi ze spisů Archimedových vyčísti.

Quelques gloses en marge des oeuvres d'Archimède principalement de la „Méthode".

Par prof. Vetter.

1°. Méthode suivi par Archimède dans Περὶ τῶν μηχανικῶν θεωρημάτων πρὸς Ἐρατοσθένην ἔφοδος pour arriver à la découverte de ses théoremes géométriques. Démontré sur le segment d'une parabole et d'un ellipsoïde de rèvolution.

2°. Comment Archimède aurait ou trouver, à l'aide de sa méthode, le centre de gravité d'un cône.

3°. Reconstruction du procédé qu' Archimède suivit vraisemblablement en découvrant la formule du volume et de la position du centre de gravité d'un segment d'hyperboloïde de révolution.

4°. Recherches sur la voie qui conduisit Archimède à la découverte de la formule de la surface d'une calotte sphérique.

5°. Hypothèse sur le procédé par lequel Archimède aurait pu arriver à la découverte des formules de l'aire d'une spirale.

6°. Pourquoi Archimède se servit dans le II. livre de ses Ἐπιπέδων ἰσορροπίαι d'un théorème aussi compliqué que l'est le neuvième.

7°. Pourquoi Archimède envoya à Conon parmi ses théorèmes deux qui n'étaient pas corrects et motifs probables de son énociation du premier de ces théorèmes incorrects.

Theorie dopružování.

Napsal dr. **Frant. Nachtikal** v Brně.

(Dokončení.)

15. *Vliv dopružování na šíření se vln. Vlny podélné.* Poměrně nejjednodušší případy, jež lze řešiti, jsou ty, v nichž povrchové podmínky vůbec odpadají, když totiž jde o těleso rozprostírající se do nekonečna. Problémy toho druhu jsou šíření se vln; omezíme se při tom na vlny rovinné. Objemové síly buďtež rovny nulle.

Při vlnách longitudinálních volme osu X ve směru šíření se vln a tedy i ve směru výchylek. Pak jest trvale $v = 0$, $w = 0$ a výchylka u závisí pouze od x a t. Za této volby jest druhá a třetí rovnice soustavy (14) identicky splněna. Prvá rovnice dává

$$\varrho\left(n + \frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{E}{2(1+\mu)}\left[n + (1+k)\frac{\partial}{\partial t}\right]\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{1-2\mu}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right].$$

Zavedeme-li zkrácené označení

$$a^2 = \frac{E(1-\mu)}{\varrho(1+\mu)(1-2\mu)},$$

dostáváme

$$\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + n\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left[(1+k)\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} + n\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]. \qquad (17)$$

Rovnici této vyhovuje částečný integrál

$$u = e^{\alpha x + \beta t},$$

při čemž pro veličiny α a β platí vztah

$$\beta^3 + n\beta^2 = a^2\alpha^2[(1+k)\beta + n],$$