Matyáš Lerch

O transformaci řad v řady rychleji konvergentní se zvláštním zřetelem k zobecněné harmonické řadě $R(u, s) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(u+r)^s}$. [III.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 49 (1920), No. 4-5, 273–281

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108883`

Příloha k Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky.

O transformaci řad v řady rychleji konvergentní se zvláštním zřetelem k zobecněné harmonické řadě $R(u,s)=\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{(u+\nu)^s}$.

Píše **M. Lerch** v Brně.

(Dokončení.)

Hledejme součinitele a_ν v mnohočlenu

$$\Phi(x)=a_1\left[\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}\right]+a_2\left[\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)^2}\right]+\ldots$$
$$+a_p\left[\frac{1}{a^p}+\frac{1}{(x+1)^p}\right]$$

tak, aby rozvoj racionální funkce

$$D(x)=\frac{1}{x}-\Phi(x)$$

dle záporných mocnin x začínal členem $\frac{1}{x^{p+1}}$. Dosadíme binomickou řadu

$$\frac{1}{(x+1)^\nu}=\Sigma\binom{-\nu}{\beta}\frac{1}{x^{\nu+\beta}}=\frac{1}{x^\nu}+\sum_{\beta=1}^{\infty}(-1)^\beta\binom{\nu+\beta-1}{\beta}\frac{1}{x^{\nu+\beta}},$$

abychom obdrželi

$$\Phi(x)=\sum_{1}^{p}\frac{2a_\nu}{x^\nu}+\sum_{\beta,\nu}(-1)^\beta\binom{\nu+\beta-1}{\beta}\frac{a_\nu}{x^{\nu+\beta}}.$$

Součinitel při $\frac{1}{x^\mu}$ zní

$$2a_\mu+\sum_{\beta=1}^{\mu-1}(-1)^\beta\binom{\mu-1}{\beta}a_{\mu-\beta},$$

a tak máme rovnice $a_1=\frac{1}{2}$ a

$$2a_\mu+\sum_{\alpha=1}^{\mu-1}(-1)^\alpha\binom{\mu-1}{\alpha}a_{\mu-\alpha}=0\quad(\mu=2,3,\ldots). \tag{19}$$

Je patrno, že tato čísla a_μ nezávisí na čísle p, a dostáváme postupně

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_3 = a_5 = a_7 = \ldots = 0, \quad a_2 = \frac{1}{4}, \quad a_4 = -\frac{1}{8},$$

$$a_6 = \frac{1}{4}, \quad a_8 = -\frac{17}{16}, \ldots$$

Obecný zákon těchto čísel daných návratní rovnicí (19) objeví se v jiném tvaru, píšeme-li užívajíce symbolického značení $a_\nu = a^\nu$, takže (19) zní symbolicky takto:

$$a^\mu + a(a-1)^{\mu-1} = 0, \quad (\mu = 2, 3, 4 \ldots)$$

kdežto pro $\mu = 1$ levá strana je $= 1$. Násobme obě strany $\frac{x^{\mu-1}}{(\mu-1)!}$ a sečtěme; obdržíme symbolickou rovnici

$$ae^{ax} + ae^{ax-x} = 1, \qquad ae^{ax} = \frac{1}{1+e^{-x}}.$$

Tato ostatně jest jen zkráceně psaná identita

$$\sum_1^\infty \frac{a_\nu x^{\nu-1}}{(\nu-1)!} + \sum_{\mu,\nu} \frac{a_\nu x^{\nu-1}}{(\nu-1)!} \frac{(-x)^\mu}{\mu!} = 1, \quad (\mu, \nu - 1 = 0, 1, 2, \ldots),$$

jež reprodukuje vztah (19). Čísla a_ν jsou tedy určena rozvojem funkce

$$\frac{1}{1+e^{-x}} = \sum_1^\infty \frac{a_\nu}{(\nu-1)!} x^{\nu-1}, \tag{19'}$$

a vyjadřují se Bernoulliovymi čísly takto:

$$a_{2n+1} = 0, \quad a_{2n} = (-1)^{n-1}(2^{2n}-1)\frac{B_n}{2n}.$$

Naše hledané mnohočleny tedy jsou

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}\right),$$

$$\Phi_1(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}\right) + \frac{1}{4}\left[\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2}\right],$$

$$\Phi_2(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}\right) +$$

$$+ \frac{1}{4}\left[\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2}\right] - \frac{1}{8}\left[\frac{1}{x^4} + \frac{1}{(x+1)^4}\right],$$

$$\Phi_p(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}\right) + \sum_{\nu=1}^p a_{2\nu}\left[\frac{1}{x^{2\nu}} + \frac{1}{(x+1)^{2\nu}}\right].$$

Rozdíly naše $D_p(x)$, t. j.

$$D_p(x) = \frac{1}{x} - \Phi_p(x).$$

mají postupně vyjádření

$$D_0(x) = \frac{1}{2x(x+1)}, \quad D_1(x) = \frac{-1}{4x^2(x+1)^2},$$

$$D_2(x) = \frac{4x^2+4x+1}{8x^4(x+1)^4},$$

$$D_3(x) = -\frac{17x^4+34x^3+29x^2+12x+2}{8x^6(x+1)^6}, \ldots .$$

Klade-li se obecně

$$D_p(x) = \frac{Z_p(x)}{x^{2p}(x+1)^{2p}} = \frac{2a_{2p+2}}{x^{2p+2}} + \ldots \tag{20}$$

máme ($p = 1, 2, 3, \ldots$)

$$Z_p(x) = 2a_{2p+2}x^{2p-2} + b_1^p x^{2p-3} + b_2^p x^{2p-4} + \ldots$$

$$Z_{p+1} = x^2(x+1)^2 Z_p - a_{2p+2}\left[x^{2p+2} + (x+1)^{2p+2}\right]. \tag{21}$$

Dle toho vypočteme

$$16Z_4 = 248x^6 + 744x^5 + 1080x^4 + 920x^3 + 472x^2 + 136x + 17.$$

Řady

$$T_p = \sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu} D_p(x+\nu) \tag{22}$$

konvergují absolutně a značně rychleji než řada

$$S = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu}}{x+\nu}:$$

$$T_0 = \frac{1}{2}\sum_{0}^{\infty}\frac{1}{(x+\nu)(x+\nu+1)},$$

$$T_1 = -\frac{1}{4}\sum_{0}^{\infty}\frac{1}{(x+\nu)^2(x+\nu+1)^2},$$

$$T_2 = \frac{1}{8}\sum_{0}^{\infty}\frac{4(x+\nu+\frac{1}{2})^2}{(x+\nu)^4(x+\nu+1)^4}, \ldots$$

Jejich souvislost s ní vychází z identit

$$T_p = \sum_0^\infty (-1)^\nu \left[\frac{1}{x+\nu} - \Phi_p(x+\nu)\right]$$

$$= S - \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \Phi_p(x+\nu),$$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \Phi_p(x+\nu) = \frac{1}{2} \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \left[\frac{1}{x+\nu} - \frac{1}{x+\nu+1}\right] +$$

$$+ \sum_{\varkappa=1}^{p} a_{2\varkappa} \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \left[\frac{1}{(x+\nu)^{2\varkappa}} + \frac{1}{(x+\nu+1)^{2\varkappa}}\right] =$$

$$= \frac{1}{2x} + \sum_{\varkappa=1}^{p} \frac{a_{2\varkappa}}{x^{2\varkappa}},$$

takže máme pro řadu S

$$\sum_0^\infty \frac{(-1)^\nu}{x+\nu} = \frac{1}{2x} + \frac{a_2}{x^2} + \frac{a_4}{x^4} + \frac{a_6}{x^6} + \ldots + \frac{a_{2p}}{x^{2p}} + T_p. \quad (22^*)$$

Je jasno, že veličiny $|D_p(x+\nu)|$ s rostoucím ν, od jistého místa počínaje, klesají; v našich příkladech $p \leqq 4$ sestává polynom $(-1)^p Z_p$ ze samých kladných členů a z toho lze souditi rozkladem

$$(-1)^p D_p = \frac{1}{(x+1)^p}\left[\frac{b'_0}{x^2} + \frac{b'_1}{x^3} + \frac{b'_2}{x^4} + \ldots\right], \quad b'_\mu > 0,$$

že funkce $(-1)^p D_p$ klesá s rostoucím $x > 0$; pak bude řada (22) rovnati se části prvního člena

$$T_p = \vartheta D_p(x), \quad x > 0, \quad (0 < \vartheta < 1). \quad (22^0)$$

Ostatně plyne z (22*)

$$T_p = \frac{a_{2p+2}}{x^{2p+2}} + T_{p+1},$$

a jakmile T_p a T_{p+1} mají opačná znamení, musí

$$T_p = \frac{\Theta a_{2p+2}}{x^{2p+2}}, \quad (0 < \Theta < 1), \quad (22^1)$$

a tak máme rozvoj (zakončený) (22*), v němž zbytek T_p je částkou prvního vynechaného členu. Tento vzorec je pohodlnější než přímé počítání členů T_p. Pro $x = 1$ máme pro

$$S = \log 2 = \sum_0^3 \frac{(-1)^\nu}{\nu+1} + \sum_0^\infty \frac{(-1)^\nu}{5+\nu} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + S(5)$$

a dle (22*)

$$S(5) = \frac{1}{10} + \frac{1}{4.25} - \frac{1}{8.25^2} + \frac{1}{4.25^3} - \frac{\vartheta.17}{16.25^4};$$

poslední člen $< 0{\cdot}0^5 256$; kdybychom šli o krok dále, končíce členy

$$-\frac{17}{16.25^4} + \frac{\vartheta.a_{10}}{25^5}, \quad a_{10} = \frac{31}{4},$$

byl by poslední člen $< 0{\cdot}0^6 7936$.

Kdybychom vzali

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{7} - S(8),$$

$$S(8) = \frac{1}{16} + \frac{1}{4.8^2} - \frac{1}{8.8^4} + \frac{1}{4.8^6} - \frac{\vartheta.17}{16.8^8},$$

měli bychom správných sedm míst; další člen by zajistil osm míst.

Podobným způsobem stanovme polynomy U podmínkou

$$\frac{1}{x} - \sum_{\varkappa=1}^{p} b_\varkappa \left[\frac{1}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^\varkappa} + \frac{1}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^\varkappa}\right] = \left(\frac{1}{x^{p+1}}\right),$$

při čemž pravá strana značí řadu záporných mocnin začínající členem o $\frac{1}{x^{p+1}}$. Poněvadž

$$\frac{1}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^\varkappa} + \frac{1}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^\varkappa} = \frac{2}{x^\varkappa} + \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{\binom{\varkappa + 2\alpha - 1}{2\alpha}}{2^{2\alpha-1} x^{\varkappa+2\alpha}},$$

obdržíme $b_1 = \frac{1}{2}$ a pro $\nu > 1$

$$2b_\nu + \sum_{\alpha=1,2,3\ldots} \binom{\nu - 1}{2\alpha} \frac{b_{\nu-2\alpha}}{2^{2\alpha-1}} = 0; \tag{23}$$

$$b_2 = b_4 = b_6 = \ldots = 0; \quad b_3 = -\frac{1}{8}, \quad b_5 = \frac{5}{32}, \quad b_7 = -\frac{61}{128}.$$

Obecný zákon plyne symbolicky z (23) takto:

$$b\left(b + \frac{1}{2}\right)^{\nu-1} + b\left(b - \frac{1}{2}\right)^{\nu-1} = 0 \text{ pro } \nu > 1, \text{ ale } = 1 \text{ pro } \nu = 1;$$

násobme $\frac{x^{\nu-1}}{(\nu-1)!}$ a sečtěme:

$$be^{bx+\frac{1}{2}x}+be^{bx-\frac{1}{2}x}=1$$

čili

$$be^{bx}=\frac{1}{2\operatorname{Cos}\frac{x}{2}}=\sum_{0}^{\infty}(-1)^{\nu}\frac{E_{\nu}x^{2\nu}}{2^{2\nu+1}.(2\nu)!},$$

kde $E_0=1=E_1$, $E_2=5$, $E_3=61$, $E_4=1385$, $E_5=50521,..$ značí čísla Eulerova daná řadou

$$\frac{1}{\cos x}=\sum_{0}^{\infty}E_{\nu}\frac{x^{2\nu}}{(2\nu)!},$$

takže plyne

$$b_{2\nu}=0,\quad b_{2\nu+1}=(-1)^{\nu}\frac{E_{\nu}}{2^{2\nu+1}},\tag{23¹}$$

a náš polynom jest

$$U_p(x)=\sum_{\varrho=0}^{p-1}(-1)^{\varrho}E_{\varrho}\left[\frac{1}{(2x-1)^{2\varrho+1}}+\frac{1}{(2x+1)^{2\varrho+1}}\right];\tag{23²}$$

znamenejme

$$\Delta_p(x)=\frac{1}{x}-U_p(x);\tag{23³}$$

$$\Delta_1(x)=-\frac{1}{x(4x^2-1)},\quad \Delta_2=\frac{20x^2-1}{x(4x^2-1)^3},$$

$$\Delta_3=-\frac{976x^4+72x^2+1}{x(4x^2-1)^5}\dots$$

$$R_p(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}\Delta_p(x+\nu).\tag{23⁴}$$

Je pak

$$R_p=\sum\frac{(-1)^{\nu}}{x+\nu}-\sum_{\varrho=0}^{p-1}(-1)^{\varrho}\frac{E_{\varrho}}{(2x-1)^{2\varrho+1}},$$

t. j.

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu}}{x+\nu}=\sum_{\varrho=0}^{p-1}(-1)^{\varrho}\frac{E_{\varrho}}{(2x-1)^{2\varrho+1}}+R_p,\tag{23*}$$

kde pro dosti veliká x (pravděpodobně pro všecka kladná)

$$R_p=\vartheta\Delta_p(x),\quad R_p=(-1)^p\frac{\Theta E_p}{(2x-1)^{2p+1}}.$$

Ku porovnání s hořejším číslem $S(5)$ uvádíme:

$$S(5)=\frac{1}{9}-\frac{1}{9^3}+\frac{5}{9^5}-\frac{61}{9^7}+\frac{\vartheta\, 1385}{9^9};$$

chyba $\vartheta\, 0{\cdot}0^5 35$.

Dále obdržíme

$$S(8)=\frac{1}{15}-\frac{1}{15^3}+\frac{1}{15^5}-\frac{61}{15^7}+\frac{\vartheta\, 1385}{15^9},$$

poslední člen (chyba) $< 0{\cdot}0^7 36$.

Při počítání čísla $\frac{\pi}{4}$

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\ldots-\frac{1}{15}+\frac{1}{2}S\left(\frac{17}{2}\right)$$

docílíme asi stejné přesnosti se čtyřmi členy jako výše bylo naznačeno.

Konečně ustanovme konstanty c_ν tak, aby rozvoj dle záporných mocnin u funkce

$$\frac{1}{x}-\log\frac{x+1}{x}-\sum_1^p c_\nu\left[\frac{1}{x^\nu}-\frac{1}{(x+1)^\nu}\right]=\left(\frac{1}{x^{p+1}}\right) \qquad (24)$$

začínal členem $\frac{1}{x^{p+1}}$; tu máme (až na mocnosti $\frac{1}{x}$ vyšší než p-tá) tedy

$$\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{4x^4}-\ldots=\sum_{\alpha,\nu}(-1)^\alpha\binom{\nu+\alpha-1}{\alpha}\frac{c_\nu}{x^{\nu+\alpha}},$$

$$(\alpha, \nu=1,2,3,\ldots)$$

a odtud návratní vztah pro $\varkappa=2,3,4,\ldots$

$$\sum_{\alpha=1}^{\varkappa-1}(-1)^{\alpha-1}\binom{\varkappa-1}{\alpha}c_{\varkappa-\alpha}=\frac{(-1)^\varkappa}{\varkappa}, \qquad (24')$$

čili symbolicky

$$c^\varkappa-c\,(c-1)^{\varkappa-1}=\frac{(-1)^\varkappa}{\varkappa};$$

násobme $\frac{x^{\varkappa-1}}{(\varkappa-1)!}$ a sečtěme pro $\varkappa=2,3,\ldots$; vyjde

$$ce^{cx}-ce^{cx-x}=\frac{e^{-x}-1+x}{x},$$

tedy

$$ce^{cx} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{1-e^{-x}} = \frac{1}{2} + \sum_{1}^{\infty}(-1)^{\nu-1}\frac{B_\nu}{(2\nu)!}x^{2\nu-1},$$

takže

$$c_1 = \frac{1}{2}, \quad c_2 = \frac{B_1}{2} = \frac{1}{12}, \quad c_4 = -\frac{B_2}{4} = -\frac{1}{120},$$

$$c_6 = \frac{B_3}{6} = \frac{1}{252}, \quad c_8 = -\frac{B_4}{8} = -\frac{1}{240}, \quad c_{10} = \frac{B_5}{10} = \frac{1}{132}, \ldots$$

$$c_{2\nu} = (-1)^{\nu-1}\frac{B_\nu}{2\nu}, \quad c_{2\nu+1} = 0. \tag{24²}$$

Pomocí tohoto výrazu obdržíme při značení

$$\vartheta_p(x) = \frac{1}{x} - \log\frac{x+1}{x} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) -$$

$$-\sum_{1}^{p}(-1)^{\varrho-1}\frac{B_\varrho}{2\varrho}\left[\frac{1}{x^{2\varrho}} - \frac{1}{(x+1)^{2\varrho}}\right], \tag{24³}$$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\vartheta_p(x+\nu) = K_p(x) \tag{24⁴}$$

identitu

$$\lim_{n=\infty}\left[\sum_{0}^{n-1}\frac{1}{x+\nu} - \log(x+n)\right] = -\log x + \frac{1}{2x} +$$

$$+\sum_{1}^{p}(-1)^{\varrho-1}\frac{B_\varrho}{2\varrho\, x^{2\varrho}} + K_p(x), \tag{24⁵}$$

kde pro dosti velká x

$$\vartheta_p(x) = \frac{g}{x^{2p+2}} + \frac{g'}{x^{2p+3}} + \ldots,$$

a tedy též $K_p(x)$ je malé; bližší šetření by se provedlo uvažováním derivace, která obsahuje pouze funkce racionální.

Hodnoty funkcí $-\vartheta_p'(x)$ jsou skutečně

$$\frac{1}{x^2(x+1)}, \quad \frac{1}{2x^2(x+1)^2}, \quad \frac{-1}{6x^3(x+1)^3}, \quad \frac{5x^2+5x+1}{30x^5(x+1)^5}, \ldots$$

Rozvoj ($p = 2$)

$$\sum_{0}^{\infty}\frac{1}{(x+\nu)^2} = \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{6x^3} - \frac{1}{30x^5} + \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{5(x+\nu)(x+\nu+1)+1}{30(x+\nu)^5(x+\nu+1)^5} \tag{24⁶}$$

dává ostatně výsledky uspokojivé; na př. pro $x = 1$

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{30} + \frac{11}{30.2^5} + \frac{31}{30.6^5} + \frac{61}{30.12^5} + \\ + \frac{101}{30.20^5} + \dots$$

Také rovnice (24^5) pro $p = 2$

$$\lim_{n=\infty} \left[\sum_0^{n-1} \frac{1}{x+\nu} - \log (x+n) \right] =$$

$$= - \log x + \frac{1}{2x} + \frac{1}{12x^2} - \frac{1}{120x^4} + \sum_{\nu=0}^{\infty} \vartheta_2 (x+\nu),$$

$$\vartheta_2 (u) = \log \frac{u}{u+1} +$$

$$+ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{u+1} \right) \cdot \frac{1}{120} \left[\frac{1}{u^2} - \frac{1}{(u+1)^2} \right] \left[10 - \frac{1}{u^2} - \frac{1}{(u+1)^2} \right]$$

dává dobré výsledky; tak pro $x = 1$ již čtvrtý člen má hodnotu

$$0 < \vartheta_2 (4) < \frac{1}{10^6}.$$

O některých křivkách odvozených z kuželoseček.

Dr. Josef Zahradníček.

(Dokončení.)

Jest určiti geom. místo průsečíků výšek v trojúhelníků $F_1 F_2 M$, kde F_1, F_2 jsou ohniska a M bod ellipsy.

Bod ellipsy má souřadnice

$$M\,(a \cos \varphi, \quad b \sin \varphi);$$

rovnice dvou výšek trojúhelníka $F_1 F_2 M$ jsou

$$x = a \cos \varphi, \quad y = - \frac{a \cos \varphi + e}{b \sin \varphi} (x - e).$$

Souřadnice jejich průsečíku jsou:

$$x = a \cos \varphi, \quad y = \frac{a^2 \cos^2 \varphi - e^2}{b \sin \varphi}.$$

Rovnice tyto při proměnlivém φ jsou zároveň rovnicemi hledaného geom. místa ve tvaru parametrickém. Rovnici geom.