Václav Jeřábek

O některých bodech geometrických. [II.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 20 (1891), No. 5, 237--251

O některých bodech geometrických.

Napsal

V. Jeřábek, professor v Brně.

(Dokončení.)

35. *Bod Steiner-ův* jest diametrálně protilehlým bodem kružnice trojúhelníku opsané vzhledem k bodu Tarry-ovu (v. t.).

$$\alpha : \beta : \gamma = \frac{1}{b^2 - c^2} : \frac{1}{c^2 - a^2} : \frac{1}{a^2 - b^2}$$

$$= \frac{1}{\sin A \sin (B - C)} : \frac{1}{\sin B \sin (C - A)} : \frac{1}{\sin C \sin (A - B)}$$

$$\delta_a = \frac{2P\,(a^4 - n^4 + 2b^2c^2)}{a\,(q^4 - n^4)},$$

podobně δ_b a δ_c.

Jiný význam má bod Steinerův v geometrii projektivné.

Šesti body kuželosečky jest určeno 60 jednoduchých, tak zvaných šestiúhelníků Pascalových, kťeré se dělí ve dvacet skupin, z nichž každá obsahuje určité tři šestiúhelníky, jejichž tři přímky Pascalovy protínají se v témž bodě, který bodem Steinerovým této skupiny se nazývá. Tak na př. ve skupině šestiúhelníků 123456, 143652, 163254, kdež jsou číslicemi označeny jejich vrcholy, protínají se Pascalovy přímky těchto šestiúheluíků v bodu Steinerově.

36. *Bod tangenciální.* Tečna křivky stupně třetího v určitém bodu má s křivkou ještě třetí bod společný, který bodem tangenciálním onoho bodu sluje. Bodu křivky n-tého stupně přináleží $(n-2)$ bodů tangenciálních.

37. *Bod Tarry-ův.* V bodu tomto, který leží v kružnici trojúhelníku ABC opsané, protínají se kolmice spuštěné s vrcholů A, B, C na příslušné strany B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1, prvního trojúhelníka Brocardova $A_1B_1C_1$. Vrcholy trojúhelníka A, B, C,

jsou průměty A_1, B_1, C_1 bodu Lemoine-ova v příslušných symmetrálách stran BC, CA, AB.

$$x:y:z = \frac{1}{\cos(A+\omega)}:\frac{1}{\cos(B+\omega)}:\frac{1}{\cos(C+\omega)}.$$

$$\delta_a = \frac{2P(q^4n^4 - q^4a^4 - 2b^2c^2n^4)}{a(q^4-n^4)(2n^4-q^4)}.$$

Podobně δ_b a δ_c. (Viz pozn. na konci čl.).

38. *Bod úběžný.* Nekonečně vzdálený bod křivky nebo přímky nazývá se bodem úběžným. (Viz bod nekonečně vzdálený.)

39. *Undalační bod křivky.* Má-li křivka s tečnou čtyři soumezné body společné, nazývá se bod dotyčný undulačním bodem křivky. Poloměr křivosti bodu undulačního jest nekonečně veliký a sousední části křivky bodu dotyčného leží na téže straně jeho tečny. Tečna v undulačním bodu vyššího řádu má s křivkou více než čtyři soumezné body společné.

40. *Uniplanární bod plochy* viz bod dvojný.

41. *Bod odvratový*, franc. point de rebroussement de première espèce, jest bod vratový, jehož sousední části křivky nalézají se na různých stranách jeho tečny.

42. *Bod vratový* (cuspidální) křivky, franc. point de rebroussement, jest ten, ve kterém se pohyblivý bod křivky na okamžik zastaví a směr pohybu náhle v protivný změní. V bodu vratovém jsou ukončeny dva oblouky křivky, které mají v něm společnou tečnu dvojnásobnou.

43. *Bod vrcholový čili vrchol*, franc. le sommet. *a*) Vrcholem křivky jest onen její bod, k jehož normále sousední části křivky jsou souměrně sdruženy. *b*) Vrcholem plochy sborcené nazývá se průsečík dvou soumezných přímek povrchových.

44. *Body algebraicky přidružené*, franc. points algébriquement associés. (M, M_a, M_b, M_c). Bod M, jehož souřadnice barycentrické α, β, γ vzhledem k trojúhelníku ABC vyhovují podmínce $\frac{\alpha}{A} = \frac{\beta}{B} = \frac{\gamma}{C}$, kdež A, B, C znamenají určité veličiny, lze sdružiti s body

$$M_a\left(\frac{\alpha}{-A} = \frac{\beta}{B} = \frac{\gamma}{C}\right),$$

$$M_b\left(\frac{\alpha}{A}=\frac{\beta}{-B}=\frac{\gamma}{C}\right),\ M_c\left(\frac{\alpha}{A}=\frac{\beta}{B}=\frac{\gamma}{-C}\right).$$

Tyto tři body, které vyznačují se analogickými vlastnostmi jako bod M, nazývají se body algebraicky přidružené. Středy S_a, S_b, S_c vnějších kruhů trojúhelníku vepsaných jsou algebraicky přidruženy ku středu S kruhu uvnitř trojúhelníku vepsaného.

$$S\left(\delta_a=\delta_b=\delta_c=r=\frac{2P}{a+b+c}=\frac{P}{s}\right),$$

$$S_a\left(-\delta_a=\delta_b=\delta_c=r_a=\frac{P}{s-a}\right),\ S_b\left(\delta_a=-\delta_b=\delta_c=r_b=\frac{P}{s-b}\right),$$

$$S_c\left(\delta_a=\delta_b=-\delta_c=r_c=\frac{P}{s-c}\right).$$

(Viz pozn. na konci čl.).

45. *Body anticomplementární* viz body complementární.

46. *Body antisuplementární* viz body suplementární.

47. *Body Brocardovy*, franc. points de Brocard. (Ω_1, Ω_2). Body tyto jsou vzhledem k trojúhelníku ABC isogonálně sdruženy s body brocardskými (v. t.) bodu Lemoine-ova (v. t.). Kružnice $A\Omega_1B$, $B\Omega_1C$, $C\Omega_1A$ dotýkají se resp. strany BC ve vrcholu B, strany CA ve vrcholu C a strany AB ve vrcholu A Podobně dotýká se kružnice $A\Omega_2B$ strany CA ve vrcholu A, atd. Mimo to jest

$$\measuredangle\ \Omega_1AB=\Omega_1BC=\Omega_1CA=\Omega_2AC=\Omega_2CB=\Omega_2BA=\omega.$$

Úhel ω sluje úhlem Brocardovým a jest určen rovnicí

$$\cot\omega=\cot A+\cot B+\cot C.$$

Vzdálenosti bodů Brocardových od stran jsou úměrny ku poměrům těchto stran.

$$\Omega_2\ldots x:y:z=\frac{b}{c}:\frac{c}{a}:\frac{a}{b}=ab^2:bc^2:ca^2,$$

$$\Omega_1\ldots x:y:z=\frac{c}{b}:\frac{a}{c}:\frac{b}{a}=c^2a:a^2b:b^2c,$$

$$\Omega_2 \ldots \delta_a = \frac{2Pabc}{n^4}\cdot\frac{b}{c},\ \delta_b = \frac{2Pabc}{n^4}\cdot\frac{c}{a},\ \delta_c = \frac{2Pabc}{n^4}\cdot\frac{a}{b},$$

$$\Omega_1 \ldots \delta_a = \frac{2Pabc}{n^4}\cdot\frac{c}{b},\ \delta_b = \frac{2Pabc}{n^4}\cdot\frac{a}{c},\ \delta_c = \frac{2Pabc}{n^4}\cdot\frac{b}{a}.$$

(Viz pozn. na konci čl.).

48. *Body brocardské*, franc. points brocardiens (M, M_δ, M_ϱ). Bod M, jehož souřadnice barycentrické vzhledem k trojúhelníku ABC vyhovují rovnicím

$$\frac{\alpha}{A} = \frac{\beta}{B} = \frac{\gamma}{C},$$

kdež A, B, C značí kvantity určité, lze sdružiti s body

$$M_\varrho\ (\alpha',\ \beta',\ \gamma'),\ M_\delta\ (\alpha'',\ \beta'',\ \gamma'')\ \text{tak, že}$$

$$M_\varrho \ldots B\alpha' = C\beta' = A\gamma',\ M_\delta \ldots C\alpha'' = A\beta'' = B\gamma''.$$

Body M_ϱ, M_δ nazývají se body brocardské vzhledem k bodu M. (Viz pozn. na konci čl.).

49. *Body collineárné*, franc. points collinéaires, v geometrii trojúhelníka nazývá J. Casey každé tři a i více bodů ležících v téže přímce.

V geometrii projektivné slují body homologické (v. t.) dvou útvarů projektivných (collinearných) též body collinearnými.

50. *Body complementární* (M, M_c) a anticomplementární (M, M_c), franc. points complémentaires et anticomplémentaires. V soustavě souřadnic barycentrických α, β, γ vzhledem k trojúhelníku ABC lze bod M (α, β, γ) sdružiti s bodem M_c ($\beta+\gamma$, $\gamma+\alpha$, $\alpha+\beta$), který se nazývá bodem complementárním (doplňkovým) bodu M. Obráceně jest M bodem anticomplementárním (protidoplňkovým) bodu M_c. Bod anticomplementární M_{-c} bodu M má souřadnice M_{-c} ($-\alpha+\beta+\gamma$, $\alpha-\beta+\gamma$, $\alpha+\beta-\gamma$). Pro $\alpha=\beta=\gamma$ splynou body M, M_c, M_{-c} s těžištěm T trojúhelníka ABC, a i každý bod přímky úběžné ($\alpha+\beta+\gamma=0$) splývá se svým bodem doplňkovým i protidoplňkovým. Body M, M_c, M_{-c} leží v přímce jdoucí těžištěm T tak, že $MT = 2TM_c$, $2MT = TM_{-c}$, odkudž plyne sestrojování bodů doplňkových i protidoplňkových.

Tak na př. středy stran trojúhelníka jsou body complementární protilehlých vrcholů. Střed kruhu trojúhelníku opsaného

$$(\alpha : \beta : \nu = \sin 2A : \sin 2B : \sin 2C,$$

$$x : y : z = \cos A : \cos B : \cos C,$$

$$\delta_a = \frac{a(m^2 - 2a^2)}{8P}, \text{ podobně } \delta_b \text{ a } \delta_c)$$

jest bodem complementárním průsečíku výšek

$$(\alpha : \beta : \gamma = \operatorname{tg} A : \operatorname{tg} B : \operatorname{tg} C,$$

$$x : y : z = \frac{1}{\cos A} : \frac{1}{\cos B} : \frac{1}{\cos C}, \quad \delta_a = \frac{(m^2 - 2b^2)(m^2 - 2c^2)}{8P},$$

podobně δ_b a δ_c). Přímky jdoucí vrcholy trojúhelníka ABC rovnoběžně se stranami jeho omezují trojúhelník A_{-1}, B_{-1}, C_{-1}, který jest protidoplňkovým trojúhelníka ABC. Bod complementární středu kruhu vepsaného jest těžíštěm T_1 obvodu trojúhelníka ABC.

$$T_1 \left(\delta_a = \frac{P(2s - a)}{2as}, \quad \delta_b = \frac{P(2s - b)}{2bs}, \quad \delta_c = \frac{P(2s - c)}{2sc}\right).$$

Bod anticomplementární reciprokého bodu (viz body reciproké) vzhledem ku středu kruhu vepsaného nazývá se středem stejných rovnoběžek (centre des parallèles égales), neboť vyznačuje se tou vlastností, že rovnoběžky jím vedené se stranami a omezené těmito stranami jsou si na vzájem rovny.

$$\delta_a = \frac{2P(t^2 - 2bc)}{at^2}, \quad \delta_b = \frac{2P(t^2 - 2ac)}{bt^2}, \quad \delta_c = \frac{2P(t^2 - 2ab)}{ct^2}.$$

(Viz pozn. na konci čl.).

51. *Body cosinusové stupně n-tého*, franc. points cosinusiens d'ordre n. (M, M_n). Bod M_n, jehož barycentrické souřadnice jsou $\alpha \cos^n A$, $\beta \cos^n B$, $\gamma \cos^n C$, pojmenoval Poulain cosinusovým bodem stupně n-tého bodu M. Obráceně jest M proticosinusovým bodem čili cosinusovým bodem stupně $(-n)$ bodu M_n. Je-li ve zvláštním případě $\alpha = \beta = \gamma$, obdržíme cosinusový bod J_n ($\cos^n A$, $\cos^n B$, $\cos^n C$). První bod cosinusový J_1 ($\cos A$, $\cos B$, $\cos C$), jest sinusovým bodem (v. t.) reciprokého

bodu (v. t.) průsečíku výšek, nebo bodem protisinusovým středu kruhu trojúhelníku opsaného. Jeho sestrojení jest toto: Budiž H průsečíkem výšek, příčky půlící úhly BHC, CHA, AHB protínají resp. strany BC, CA, AB v určitých bodech, a přímky spojující jejich souměrně sdružené body dle středů těchto stran s protilehlými vrcholy A, B, C protínají se v bodu J_1. Další body cosinusové lze sestrojiti dle návodu, podaného při bodech sinusových.

52. *Body cyklické,* franc. points cycliques, nazývají se též imaginární body kruhové v nekonečnu.

53. *Body diagonální*, franc. points diagonaux. V úplném čtyřúhelníku *abcd* protínají se: strany *ab*, *cd* v bodu *e*, strany *bc*, *ad* v bodu *f* a strany *ac*, *bd* v bodu *g*. Body tyto jmenují se diagonální body čtyřúhelníka.

54. *Body distanční* v perspektivě nazývají se body, jejichž vzdálenosti od bodu hlavního v přímce obzorné jsou rovny distanci čili vzdálenosti optického středu oka pozorovatele (středu promítání) od průmětny.

55. *Body doplňkové* viz body complementární.

56. *Body harmonicky sdružené.* Dělicím poměrem $\frac{AC}{BC} = \gamma$ jest poloha bodu C v přímce AB vzhledem k pevným bodům A, B určena. Dva body C, D, jejichž dělicí poměry $\frac{AC}{BC} = \gamma$ $\frac{AD}{BD} = -\gamma$ jsou stejny, avšak znaménka protivného, nazývají se harmonicky sdružené body. Dvojpoměr $\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = -1$ jmenuje se harmonickým.

57. *Body homologické*, *stejnolehlé*, franc. points homologues, dvou útvarů nazývají se ty, které jsou spolu sdruženy tak, že každému bodu a jím procházející přímce útvaru jednoho přísluší toliko jediný určitý bod a jím procházející jediná určitá přímka útvaru druhého a naopak. Na př. vrcholy dvou podobných trojúhelníků, které leží naproti rovným úhlům, průsečíky jejich výšek atd., jsou body homologickými těchto trojúhelníků.

58. *Body imaginárně sdružené.* (M, N). Souhlasné souřadnice těchto bodů v pravoúhlé soustavě souřadnic ($X \perp Y$) lze vyjádřiti soujemnými čísly sdruženými

$$M(x_1 + i\xi_1,\ y_1 + i\eta_1),\quad N(x_1 - i\xi_1,\ y_1 - i\eta_1),$$

kdež $i = \sqrt{-1}$.

59. *Imaginární body kruhové v nekonečnu*, franc. points cycliques, points circulaires à l'infini nebo ombilics. Veškeré kružnice téže roviny mají v přímce úběžné (nekonečně vzdálené) dva imaginární body společné, které se nazývají imaginární úběžné body kruhové.

60. *Body inversní*, franc. points inverses. (M, M_1). Body reciproké (v. t.) stupně druhého vzhledem k trojúhelníku ABC slují body inversními. Normální souřadnice bodů M (x, y, z), M_1 (x_1, y_1, z_1) vyhovují rovnicím $xx_1 = yy_1 = zz_1$. Přímky, které tyto body s vrcholy trojúhelníka spojují, jsou souměrně položeny vzhledem k symmetrálám úhlů příslušných a jmenují se isogonálně (stejnoúhle) sdružené přímky. Za příčinou zde uvedenou nazývají se body zmíněné isogonálně sdružené body. Střed kruhu trojúhelníka opsaného jest bodem inversním průsečíku výšek. Normální souřadnice středu jsou:

$$x : y : z = \cos A : \cos B : \cos C,$$

$$\delta_a = \frac{a(m^2 - 2a^2)}{8P},\quad \delta_b = \frac{b(m^2 - 2b^2)}{8P},\quad \delta_c = \frac{c(m^2 - 2c^2)}{8P}.$$

(Viz pozn. na konci čl.).

61. *Body isobarické*, franc. points isobariques (M, M_i' M_i''). Body M_i' (β. γ, α), M_i'' (γ, α, β) nazývají se body isobarické bodu M (α, β, γ). Body M_j' (α, γ, β), M_j'' (γ, β, α), M_j''' (β, α, γ) jmenují se semirecipročně přidruženými bodu M (α, β, γ). (Viz pozn. na konci čl.)

62. *Body isogonálně sdružené* viz body inversní.

63. *Body isotomické*, franc. points isotomiques M', M'' jsou dle de Longchamps-a v téže straně trojúhelníka souměrně sdruženy vzhledem ku středu jejímu. Přímky spojující dva body isotomické s protějším vrcholem trojúhelníka nazývají se isotomickými. J. Casey nazývá dva body X, Y isotomické vzhledem

k trojúhelníku ABC, jsou-li dvojiny přímek AX, AY; BX, BY; CX, CY isotomickými vzhledem k trojúhelníku ABC.

64. *Body Jeřábkovy* *), franc. points de Jérabek (J_δ J_ϱ) vzhledem k trojúhelníku ABC jsou body brocardské středu kruhu vepsaného. Buďtež přímky AB′, BC′, CA′ resp. rovnoběžny so stranami BC, CA, AB a rovny stranám CA, AB, BC. Přímky AA′, BB′, CC′ protínají se v bodu J_δ. Podobně jest i určen bod J_ϱ.

$$J_\delta \ldots \quad x : y : z = b : c : a$$

$$J_\varrho \ldots \quad x : y : z = c : a : b$$

$$J_\delta \ldots \delta_a = \frac{2\,Pb}{t^2}, \quad \delta_b = \frac{2\,Pc}{t^2}, \quad \delta_c = \frac{2\,Pa}{t^2},$$

$$J_\varrho \ldots \delta_a = \frac{2\,Pc}{t^2}, \quad \delta_b = \frac{2\,Pa}{t^2}, \quad \delta_c = \frac{2\,Pb}{t^2}.$$

(Viz pozn. na konci čl.).

65. *Body neproměnlivé*, franc. points invariables. Jsou-li tři soumístné soustavy projektivné určeny kuželosečkou projektivnosti K a základním trojúhelníkem $a'a''a'''$, jehož strany $a''a'''$, $a'''a'$, $a'a''$ jsou sdruženými přímkami A_1, A_2, A_3 těchto soustav tak, že v kuželosečce K zvolíme jeden různý s_{12} a dva společné body samodružné p, q (reálné nebo imaginárné), protne přímka $s_{12}a'''$ kuželosečku K v bodu k, a přímky ka'', ka' určují v K ostatní dva různé body samodružné s_{31}, s_{23}. Spojnice bodů b_1, b_2, b_3, v nichž protínají strany $a''a'''$, $a'''a'$, $a'a''$ přímku pq, s bodem k, jsou přímkami sdruženými soustav projektivných a procházejí určitými body p_1, p_2, p_3 kružnice K. Trojúhelníků základních ($a'a''a'''$) ve třech soustavách projektivných jest nekonečně mnoho, a též jest nekonečně mnoho svazků $k(b_1 b_2 b_3)$, z nichž každý obsahuje tři přímky sdružené kb_1, kb_2, kb_3, které procházejí v každém tomto svazku skrze body p_1, p_2, p_3 a proto body tyto neproměnlivými (pevnými) soumístných soustav projektivných se nazývají. Ve třech soumístných soustavách podobných jsou imaginární body kruhové v přímce úběžné společnými body samodružnými, a paprsky kb_1, kb_2, kb_3 jsou se stranami $a''a'''$, $a'''a'$, $a'a''$ rovnoběžny. Průsečíky paprsků těchto s kruž-

*) Nazvané tak dle auktora tohoto článku. *Redakce.*

nicí podobnosti $(s_{12}s_{23}s_{31})$ jsou neproměnlivými body soustav podobných. Trojúhleník nepromĕnlivými body určený sluje trojúhelník nepromĕnlivý.

66. *Body podobně položené*, franc. points homologues de deux systèmes homothétiques. Každé dva body dvou útvarů ležící v témž paprsku určitého svazku tak, že vzdálenosti jejich od středu tohoto svazku jsou ve stálém poměru, jmenují se body podobně položené.

67. *Body potencialní* p-tého stupně přidružené k danému bodu, franc. points potentiels d'ordre p, associés à un point donné. (M, M^p). Bod $M^p(\alpha_p, \beta_p \gamma_p)$ jest potentialním stupně p-tého, přidružený k bodu $M(\alpha, \beta, \gamma)$, platí-li rovnice

$$\frac{\alpha_p}{\alpha^p} = \frac{\beta_p}{\beta^p} = \frac{\gamma_p}{\gamma^p}.$$

(Viz pozn. na konci čl.).

68. *Body protější.* Ve dvou přímých řadách projektivných přísluší úběžnému bodu přímky jedné určitý bod v přímce druhé a naopak. Každý z těchto bodů nazývá se úběžníkem (point de fuite nebo point limite) oné přímky, ve které se nenalézá. Úběžníky tyto, přihlíží-li se k jejich vzájemné poloze, jmenují se body protějšími. Takovými body protějšími při promítání středovém jest úběžník přímky dané a její stopa v rovině středové.

69. *Protibody.* Jsou-li I, J imaginární úběžné body kruhové a F, F_1 dvě realná ohniska křivky, protínají se FI, FJ; F_1I, F_1J ve dvou jiných pomyslných ohniskách F', F_1' křivky. Přímky FF_1, $F'F'_1$ půlí se pravoúhelně v bodu O tak, že

$$OF = OF_1 = i\,OF' = i\,OF'_1.$$

Body F, F_1' nazývají se protibody.

70. *Body příbuzné* (affinitní) jsou body homologické dvou útvarů příbuzných (affinitních).

71. *Body reciproké stupně p-tého*, franc. points réciproques d'ordre p. (M, M_p). Dva body $M(\alpha, \beta, \gamma)$ a $M_p(\alpha_p, \beta_p, \gamma_p)$ vzhledem k trojúhelníku ABC jsou body reciprokými stupně p-tého, vyhovují-li barycentrické souřadnice rovnicím:

$$\frac{\alpha\alpha_p}{a^p} = \frac{\beta\beta_p}{b^p} = \frac{\gamma\gamma_p}{c^p}.$$

Body reciproké stupně nultého slují zkrátka body reciprokými. Přímky spojující vrcholy trojúhelníka s body reciprokými protínají protilehlé strany jeho v bodech isotomických. Body reciproké stupně druhého nazývají se body inversní. Bod reciproký průsečíku výšek jest též bodem anticomplementárním bodu Lemoine-ova.

Body reciproké vzhledem k čáře stupně druhého viz *sdružené body*.

72. *Body rovnosouřadné*, franc. points équicoordonnés. Jsou-li normální souřadnice jednoho bodu úměrny se souřadnicemi barycentrickými bodu druhého, nazývají se body takové rovnosouřadné.

73. *Body sdružené*, franc. points conjugués.

a) Dva body jsou vzhledem k čáře (ploše) stupně druhého sdruženy, leží-li každý z nich v poláře (rovině polárné) druhého. Body tyto slují též body reciproké (points réciproques).

b) Dva body křivky mající společný bod tangenciální slují body sdružené.

74. *Body semirecipročně přidružené* viz body isobarické.

75. *Body sinusové stupně n-tého*, franc. points sinusiens d'ordre n. (M, M_n).

Bod M_n, jehož barycentrické souřadnice jsou αa^n, βb^n, γc^n čili $\alpha \sin^n A$, $\beta \sin^n B$, $\gamma \sin^n C$, nazval Poulain sinusovým bodem stupně n-tého bodu M(α, β, γ), značí-li α, β, γ barycentrické souřadnice tohoto bodu. Naopak jest M bodem protisinusovým nebo sinusovým bodem stupně ($-n$) bodu M.

Bod sinusový k danému bodu M (α, β, γ) lze sestrojiti takto:

Zvolme střed S_1 kruhu trojúhelníku vepsaného, jehož barycentrické souřadnice jsou a, b, c, a sestrojme bod M_1 tak, aby jeho barycentrické souřadnice byly rovny součinům αa, βb, γc. Za tím účelem sestrojme rovnoběžník, který má AS_1 za úhlopříčnu, a jehož strany AB′ a AC′ jsou obsaženy ve stranách AB a AC. Přímka jdoucí vrcholem B′ rovnoběžně se stranou BC seče spojnici AM v bodu E a bodem tímto vedená rovnoběžka se stranou AC protíná úhlopříčnu B′C′ v bodu F. Přímka AF prochází bodem M_1 $(\alpha a, \beta b, \gamma c)$. Podobně lze sestrojiti ještě druhou přímku procházející na př. vrcholem B, která protne přímku AF v bodu sinusovém stupně prvního bodu M. Považuje-li se nyní M_1 za bod daný, lze tuto konstrukci opakovati, čímž se obdrží sinusový bod stupně druhého M_2 $(\alpha a^2, \beta b^2, \gamma c^2)$ atd.

Je-li ve zvláštním případě $\alpha = \beta = \gamma$, obdržíme sinusový bod S_n (a^n, b^n, c^n) čili S_n $(\sin^n A, \sin^n B, \sin^n C)$, který jest též bodem potenciálním n-tého stupně těžiště trojúhelníka (v. t.).

Střed S_1 (a, b, c) kruhu vepsaného jest prvním bodem sinusovým. Druhý bod sinusový S_2 (a^2, b^2, c^2) lze sestrojiti dle návodu svrchu podaného, když se M sjednotí se středem S_1. Považujeme-li S_2 za bod daný, můžeme sestrojiti S_3 (a^3, b^3, c^3) a t. d.

76. *Skupina bodů Gergonne-ových*, franc. groupe de Gergonne (G, G'_a, G'_b, G'_c). Barycentrické souřadnice skupiny této jsou úměrny ku:

$$G \ldots \frac{1}{s-a}, \frac{1}{s-b}, \frac{1}{s-c}, \text{ čili } \operatorname{tg}\frac{A}{2}, \operatorname{tg}\frac{B}{2}, \operatorname{tg}\frac{C}{2},$$

$$G'_a \ldots \frac{1}{s}, \frac{1}{c-s}, \frac{1}{b-s}, \text{ „ } -\operatorname{tg}\frac{A}{2}, \operatorname{cotg}\frac{B}{2}, \operatorname{cotg}\frac{C}{2},$$

$$G'_b \ldots \frac{1}{c-s}, \frac{1}{s}, \frac{1}{a-s}, \text{ „ } \operatorname{cotg}\frac{A}{2}, -\operatorname{tg}\frac{B}{2}, \operatorname{cotg}\frac{C}{2},$$

$$G'_c \ldots \frac{1}{b-s}, \frac{1}{a-s}, \frac{1}{s}, \text{ „ } \operatorname{cotg}\frac{A}{2}, \operatorname{cotg}\frac{B}{2}, -\operatorname{tg}\frac{C}{2}.$$

Body G'_a, G'_b, G'_c jsou algebraicky přidruženy bodu G vzhledem k trojúhelníku, který jest protidoplňkovým trojúhelníka ABC, a body reciprokými skupiny bodů Nagel-ových. (Viz body complementární a reciproké). Ve vzorcích hořejších jest $a + b + c = 2s$.

77. *Skupina bodů Nagel-ových*, franc. groupe de Nagel. (N, N'_a, N'_b, N'_c).

Barycentrické souřadnice této skupiny jsou úměrny ku:

$$N \ldots s-a, s-b, s-c, \text{ čili } \operatorname{cotg}\frac{A}{2}, \operatorname{cotg}\frac{B}{2}, \operatorname{cotg}\frac{C}{2},$$

$$N'_a \ldots -s, s-c, s-b, \text{ „ } -\operatorname{cotg}\frac{A}{2}, \operatorname{tg}\frac{B}{2}, \operatorname{cotg}\frac{C}{2},$$

$N'_b \ldots s-c, \; -s, \; s-a,$ „ $\operatorname{tg}\frac{A}{2}, \; -\operatorname{cotg}\frac{B}{2}, \; \operatorname{tg}\frac{C}{2},$

$N'_c \ldots s-b, s-a, \; -s,$ „ $\operatorname{tg}\frac{A}{2}, \; \operatorname{tg}\frac{B}{2}, -\operatorname{cotg}\frac{C}{2}.$

Body N'_a, N'_b, N'_c jsou algebraicky přidruženy bodu N vzhledem k trojúhelníku, který jest anticomplementárním trojúhelníka ABC. (Viz body complementární.)

Ve vzorcích hořejších jest $a + b + c = 2s$.

78. *Body souměrně sdružené* dle osy a středu.

a) Stojí-li úsečka, která dva body spojuje na přímce kolmo a je-li touto přímkou rozpůlena, nazývají se ony body souměrně sdruženými vzhledem ku přímce, jakožto ose.

b) Prochází-li úsečka dva body spojující bodem třetím, a je-li tímto bodem rozpůlena, jsou body tyto vzhledem k bodu třetímu, jakožto středu souměrně sdruženy.

79. *Soumezné body plochy nebo křivky.* Dva nekonečně blízké čili bezprostředně po sobě následující body plochy nebo křivky nazývají se body soumezné.

80. *Body supplementární* (M, M_σ) a *antisupplementární* (M, $M_{-\sigma}$), franc. points supplémentaires et antisupplémentaires. V soustavě souřadnic normálních vzhledem k trojúhelníku ABC lze bod $M(x, y, z)$ sdružiti s bodem $M_\sigma(y+z, z+x, x+y)$, který nazývá se dle Neuberga bodem supplementárním (výplňkovým) bodu M. Obráceně jest bod M antisupplementárním (protivýplňkovým) bodu M_σ. Bod antisupplementární $M_{-\sigma}$ bodu M má souřadnice $M_{-\sigma}(-x+y+z, x-y+z, x+y-z)$. Hain nazval body tyto complementárními. Je-li $x = y = z$, splyne bod M se svým supplementárním bodem M_σ a antisupplementárním bodem $M_{-\sigma}$ v bod jediný, který jest středem S kružnice trojúhelníku vepsané. Přímky půlící vnější úhly trojúhelníka ABC protínají protilehlé strany jeho ve třech bodech téže přímky s, jejíž rovnicí jest $x + y + z = 0$, a každý bod této přímky splývá se svým bodem výplňkovým i protivýplňkovým. Bod S jest středem a přímka s osou homologie dvou soustav homologických, v nichž M_a, M_σ jsou body homologickými. Trojúhelník $A_1B_1C_1$, mající své vrcholy v průsečících přímek AS, BS, CS se stranami BC, CA, AB jest supplemenárním trojúhelníkem

vzhledem k trojúhelníku ABC. K danému bodu M lze sestrojiti bod výplňkový takto: Přímka AM seče osu homologie s v bodu x, spojíme-li x s A_1, jest průsečík M_σ přímek A_1x a SM bodem výplňkovým M_σ.

81. *Body tangentové stupně n-tého*, franc. points tangentiens d'ordre n. (M, M_n).

Bod M_n, jehož barycentrické souřadnice jsou $\alpha \operatorname{tg}^n A$, $\beta \operatorname{tg}^n B$, $\gamma \operatorname{tg}^n C$, jmenuje se bodem tangentovým n-tého stupně bodu $M(\alpha, \beta, \gamma)$, značí-li α, β, γ barycentrické souřadnice bodu tohoto.

Je-li ve zvláštním případě $\alpha = \beta = \gamma$, obdržíme tangentový bod $T_n(\operatorname{tg}^n A, \operatorname{tg}^n B, \operatorname{tg}^n C)$.

První bod tangentový $T_1(\operatorname{tg} A, \operatorname{tg} B, \operatorname{tg} C)$ jest průsečík výšek trojúhelníka.

Další body tangentové lze sestrojovati jako body sinusové, nahradí-li se střed kruhu trojúhelníku opsaného průsečíkem výšek.

82. *Body tripolárně přidružené*, franc. points tripolairement associés. Souřadnice tripolární (λ, μ, ν) bodu M vzhledem k trojúhelníku ABC jsou $\overline{MA}^2 = \lambda$, $\overline{BM}^2 = \mu$, $\overline{CM}^2 = \nu$. Dva body M a M′, jejichž tripolární souřadnice jsou úměrny k veličinám daným, nazývají se body tripolárně přidružené. Body M, M′ a střed kružnice opsané nalézají se v téže přímce a jsou harmonicky sdruženy vzhledem k této kružnici.

83. *Body základní*, franc. points fondamentaux. V transformaci Cremonově přísluší veškerým přímkám roviny jedné síť křivek n-tého stupně, kteréž mají x_1 bodů jednoduchých, x_2 bodů dvojných, ..., x_r bodů r-násobných, x_{n-1} bodů $(n-1)$ násobných společných. Body tyto, jichž počet jest

$$\Sigma x_r = x_1 + x_2 + \ldots x_r + \ldots + x_{n-1},$$

nazývají se body základní této sítě. Pobobně přísluší veškerým přímkám roviny druhé síť křivek n-tého stupně v rovině prvé mající y_1 bodů jednoduchých, $y_2$bodů dvojných, ..., y_r bodů r-násobných, ..., y_{n-1} bodů $(n-1)$ násobných společných. Body tyto, jichž počet jest

$$\Sigma y_r = y_1 + y_2 + \ldots + y_r + \cdots + y_{n-1}$$

jsou body základními sítě v rovině prvé. Celistvé číselné hodnoty

$$x_1, x_2 \ldots x_r \ldots x_{n-1} \text{ a } y_1, y_2 \ldots y_r \ldots y_{n-1}$$

určující v obou rovinách počet bodů základních ($\Sigma x_r = \Sigma y_r$), vyhovují rovnicím:

$$1. \quad \sum_{r=1}^{n-1} \frac{r(r+1)}{2} x_r = \Sigma \frac{r(r+1)}{2} y_r = \frac{n(n+3)}{2} - 2.$$

$$2. \quad \sum_{r=1}^{n-1} r^2 x_r = \Sigma r^2 y_r = n^2 - 1.$$

$$3. \quad \Sigma x_r = \Sigma y_r.$$

Pro $n = 2$ obdržíme transformaci kvadratickou, a protože z rovnic (1) a (2) plyne jediné řešení $x_1 = y_1 = 3$, má každá rovina tři body základní, což s rovnicí (3) úplně souhlasí.

84. Body *zvláštní* čili *singulární* (franc. points singulier) jsou ty, které od ostatních obyčejných bodů (v. t.) křivky zvláštními vlastnostmi se vyznačují a tím nemálo k určení tvaru křivky přispívají.

Poznámka. V jednotlivých odstavcích vztahujících se ku geometrii trojúhelníka ABC jest užito písmen x, y, z k označení souřadnic normálních (trimetrických), které jsou úměrny ku vzdálenostem δ_a δ_b δ_c bodu daného od stran BC $= a$, CA $= b$, AB $= c$. Souřadnice barycentrické (plošné) určitého bodu M, jež jsou úměrny ku ploským obsahům trojúhelníku MBC, MCA, MAB, jsou označeny α, β, γ. Transformačními formulemi

$$\frac{ax}{\alpha} = \frac{by}{\beta} = \frac{cz}{\gamma}$$

lze přejíti od souřadnic normálních k barycentrickým a naopak. Dále značí: A, B, C úhly, r, r_a, r_b, r_c poloměry kruhů vepsaných, $a + b + c = 2s$ obvod a P ploský obsah trojúhelníka ABC. Definice úhlu Brocardového ω jest podána při odstavci body Brocardovy. Konečně užito zkrácenin:

$$a^2 + b^2 + c^2 = m^2, \; ab + bc + ca = t^2, \; a^4 + b^4 + c^4 = q^4,$$
$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = n^4, \text{ odkudž plyne } q^4 + 2n^4 = m^4.$$

K této práci čerpal jsem látku ve příčině geometrie trojúhelníka z pojednání „Premier inventaire de la géométrie du triangle“ od Em. Vigarié, z časopisu Mathesis a j., ve příčině bodů ostatních z jiných mnohých děl odborných.

Thompsonovo odvození vzorců z geometrické optiky.

Podává

Dr. Jos. A. Theurer v Praze.

Ve 29. svazku sborníku „Philosophical Magazin“ odvozuje či vlastně formuluje Silv. Thompson vzorce pro lom a odraz světelných vln způsobem novým, elementarným, opírajícím se pouze o undulační theorii světla. Jest to výsledek pilné, pětileté práce, a proto výsledek jednoduchý a přehledný, jakož vůbec celý způsob odvození jest velmi instruktivní. Proto snad nebude od místa, o uvedené práci obšírněji se zmíniti.

V t. zv. geometrické optice užívá se obyčejně — a to zejména při výkladu elementarním — názvosloví i postupu theorie emissní, neboť hlavním pojmem základním jest *paprsek*, jenž se odráží, lomí atd. Se stanoviska theorie undulační jest hlavním základním pojmem, s nímž při šíření světla se stýkáme, pojem *vlnoplochy*, jejíž normalou (pro ústředí stejnorodá) jest paprsek. Šíří-li se světlo od bodu svítícího stejnorodým prostředím, jsou vlnoplochami jeho soustředné koule, jichž zakřivení ovšem s velikostí poloměru ubývá; pro nekonečně vzdálený zdroj světla promění se vlnoplochy v roviny k sobě rovnoběžné, čímž vzniká *vlna rovinná* oproti *vlně sferické* v prvním, obecném případě.

Dopadá-li sferická vlna na čočku neb na zrcadlo, jeví se (všeobecně, omezíme-li se na paprsky *optické ose* velmi blízké) působení přístrojů těchto tím, že se zakřivení dopadající vlny změní. Vlna, původně od svítícího bodu divergující, počne buď konvergovati k jistému bodu, jenž pak jest *realním obrazem* svítícího bodu, aneb zůstane sice divergujícím, avšak diverguje od jiného bodu — *od obrazu virtualního*. Podobně může se díti vlně