Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

J. Hoüel-a

Poznámky o vyučování trigonometrii

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 5 (1876), No. 3, 103--112

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108853

Poznámky o vyučování trigonometrii

od

J. Hoüel-a.*)

(Z franštiny převedl prof. *A. Koštěnec.*)

I.

Trigonometrii možno vyučovati dvojím spůsobem. Obyčejný spůsob, jak se toto odvětví geometrie vykládá, jest směsice obou method, z kteréž však nelze si učiniti jasného pojmu ni o jednoduchosti jedné, ni výhodnosti druhé.

Možnoť zajisté v duchu staré geometrie definovati sinus kosinus, tangentu atd., jakožto poměr dvou stran pravoúhelného trojúhelníka, čímž však se obmezuje platnost výměrů či definic těchto na úhly ostré. Dále lze ukázati, jak nutnost, aby se zvšeobecnily jisté vzorce trigonometrické, vedla k stanovení sinusů, kosinusu atd. úhlů tupých a konečně, jak úkoly obdobné s úkoly astronomie, vedly k novému zvšeobecnění vztahujícímu se k úhlům, tak že tyto pak brány v mezích dvou a čtyř kvadrantů, a konečně libovolně velké, positivné neb negativné.

Methoda tato jsouc podstatně synthetická má do sebe tu vadu, že nás nechává v nejistotě strany veličin negativných, kteréž se tu pokládají za pouhé symboly algebraické, ano ona nepřipravuje ducha našeho k všeobecnějšímu ponímání geometrie analytické, ačkoli jest geometrie pouze zvláštním případem jejím.

Máme za to, že by se dosáhlo značné výhody tím, kdybychom se postavili hned z předu na stanoviště methody kartesianské. Spůsobem takovým přijala by goniometrie tvar jednodušší a průhlednější a naskytla by se nám tu poprvé příležitost promluviti o souřadnicích bodu křivky nějaké. Methoda tato mohla by se přijmouti za východiště při výkladu pravé theorie veličin negativných, kterýžto výklad byl by zajisté mnohem jasnější nežli onen, s nímž se ve většině spisů o algebře jednajících setkáváme.

*) Viz Giornale di matematiche ad uso degli studenti delle università italiane pubblicato per cura del prof. *G. Battaglini.* Roč. XIII. str. 72.

Seznali bychom tak, že směr paprsku, okolo nějakého bodu pohyblivého, jest určen, známe-li bod, v němž paprslek tento protíná libovolnou kružnici, z pevného bodu co středu opsanou, jejíž poloměr k vůli jednoduchosti za jedničku délky položiti dlužno. Zároveň se směrem ustanoví se též úhel, jejž tento pohyblivý paprslek neb vlastně poloměr s pevným průměrem kruhu řečeného uzavírá. Průměr tento nazveme počátkem úhlů a průsečník jeho s kružnicí počátkem oblouků.

Dva úhly, lišící se od sebe celým počtem otočení, proběhnutých buď ve směru přímém neb zpátečním (rétrograde), jsou určeny týmž bodem kružnice. K určení všech možných směrů postačí tedy, víme-li, jak se ustanovují všecky úhly obsažené v mezích 0^0 a $4\ R$.

Známosti té nabudeme z průmětů příslušného bodu kružnice na průměr, od něhož počínáme úhly měřiti, čili na osu vodorovnou a na průměr čili osu svislou stojící na prvější kolmo. Abychom tyto dva průměty ustanovili, potřebujeme pouze jich polohu vzhledem k středobodu určiti.

Pomysleme si bod vyšlý ze středu a pohybující se na př. po ose vodorovné nejprvé k začátku oblouků. Dráhy proběhnuté posloupně ve smyslu tomto budou se sčítati (arithmeticky); jestliže však bod, proběhnuv jistou část poloměru kruhového, pohybuje se ve směru opačném, tu se jeho vzdálenost od středu zmenší (arithmeticky) a sice o délku, o kterou bod zpět ustoupil, pokud totiž bod nedošel opět k středobodu. Když bod dospěl do středobodu a přešel ho (na prodlouženém počátku úhlů), počne vzdálenost růsti, avšak ve smyslu opačném. Odtud pochodí složitost rozličných případů, které se mohou naskytnouti, když porovnáváme mezi sebou dvě polohy bodu, které neleží na samém směru počátku os. V případě takovém dlužno míti zřetel jak k velikosti vzdálenosti tak k směru jejímu.

Této složitosti se vyhneme, přestaneme-li odlučovati od sebe oba pojmy, totiž velikost a směr dráhy proběhnuté, sloučíce je v jediný tím, že zvšeobecníme výměry (definice) sčítání a odčítání.

Sčítáním vzdálenosti jakés budeme nazývati výkon záležející v pošinutí pohyblivého bodu ve směru přijatém, na př. v pravo; rovněž tak budeme zváti odčítáním vzdálenosti jakés výkon (obrácení předešlého) záležející v tom, že pošineme bod o vzdálenost tuto ve směru opačném, v našem případě tedy v levo. Dle toho bude tedy, ježto počátek má vzdálenost rovnou nulle, každá vzdálenost, vzatá v pravo od počátku, $0 + a$ neb krátce $+ a$ neb a; každá vzdálenost, vzatá v levo, bude $0 - a$, neb jednoduše $- a$.

Úvahou velmi jednoduchou lze odvoditi pravidla o sčítání a odčítání mnoho členů algebraických.

Rozumí se, že co se týká znamení, bude platiti totéž o ose svislé.

Dle toho, co uvedeno bylo, jest každý bod kruhu určen oběma vzdálenostmi průmětů jeho na osy od středu, jsou-li vzdálenosti tyto dány nejen co do velkosti, nýbrž i co do označení, neb jednoduše vzdáleností jednoho průmětu, jejíž velikost i označení je dáno, a označením druhé vzdálenosti, poněvadž velikosti obou vzdáleností musí vyhověti podmínce, že součet jich čtverců roveň jest jednotce.

Tyto dvě vzdálenosti jmenují se souřadnice bodu a rozeznávají se od sebe jakožto sinus a kosinus.

Poměr dvou souřadnic možno znázorniti pomocí jednoduché konstrukce bodem tečny, vedené na kruh v počátku oblouků. Bod tento nalezá se buď nad neb pod osou vodorovnou podle toho, jsou-li obě souřadnice stejně neb opačně označeny. Dáme-li určité znamení (plus neb minus) vzdálenosti bodu tohoto od počátku oblouků, jak jsme to činili při vzdálenostech vzatých na obou osách, a vezmeme-li zřetel k souvislosti, kteráž platí o poloze bodu a znameních souřadnic, obdržíme pravidlo, jaká znamení máme voliti při dělení a tudíž i při násobení. Rovněž tak má se věc při obráceném poměru (kotangentě) a při obrácených hodnotách sinusu a kosinusu.

Poněvadž průmět délky nějaké na libovolnou osu jest určen co do velikosti i směru součinem délky do kosinusu úhlu, jejž délka tato s positivnou částí osy tvoří, obdržíme bezprostředně vzorce pro sinus a kosinus součtu dvou úhlů, a tudíž i všecky ostatní vzorce goniometrické a jich upotřebení k měření trojúhelníků, aniž by bylo třeba nového věci uvažování.

II.

Vyučování trigonometrii znesnadňuje se nemilým spůsobem tím, že se hned z počátku užívá tabulek obsahujících logarithmy funkcí kruhových místo skutečných hodnot funkcí těchto. Bylo by zajisté mnohem výhodnější, kdyby se nejprvé vyložilo, jak by se měly zříditi tabulky skutečných hodnot funkcí, a to způsobem co možná jednoduchým a zakládajícím se výhradně na posloupném půlení úhlů. Bylo by to nepopíratelně výborným cvičením pro žáky, kdyby si dle návodu učitelova sestavili sami malé tabulky s dvěma neb třemi místy desetinnými a to v intervalech dosti blízkých, by tabulky tyto snadno interpolovati (proložiti) bylo. Jedině takovýchto tabulek, pečlivě opravených měli by žáci užívati; pomocí nich a počítadla (règle à calcul) budou žáci s to řešiti všecky otázky trigonometrické přibliženě sice, ale přec určitěji, nežli grafickou konstrukcí, a mnohem rychleji, nežli použitím logarithmů, zvláště, když se vzorce zavedením úhlů pomocných složitějšími učiní, aby se, jak se říká, uspůsobily k počítání logarithmickému.

Předčasné užívání logarithmů trigonometrických při vyučování mládeže, v praktickém počítání ještě málo sběhlé, nemůže jinak než zdržovati pokrok v umění tomto a učiniti je méně přístupným. Zlo toto stane se zvláště tehdy povážlivým, dáme-li do rukou nováčků *velké* tabulky, které se hodí jedině pro zkušené praktiky, a to tím povážlivějším, že užívajíce jich nenaučí se žáci vzhledem k theorii ničemu více nežli z tabulek o třech neb čtyrech místech desetinných. Představy žáků o určitosti výsledků matou se, připustíme-li, aby měli za to, že přiblíživše se na desetimiliontinu hodnoty výsledku prakticky počítají. Proto jsou také chovanci, kteří se tomu pranic nediví, žádá-li se od nich, aby vypočítali poloměr země až na centimetr. Myslí snad ti, kdož žákům pouze otázky tak fantastické k řešení předkládají, že je připraví k řešení úloh praktických?

Tato hlavní vada methody vztahuje se ke všemu, co se týká vyučování počtům numerickým. Zdaž by nebylo lépe, kdyby učitelé na místo, aby zaměstnávali ubohé žáky po tolik smrtelných hodin opisováním čísel o sedmi desetinných místech (číslo sedm jest, jak se zdá, posvátné též v mathematice jako i jinde) a topili myšlénky jejich v proudech cifer, častěji dovolávali se jich rozumu a úsudku a ukázali jim, že umění početní není nijak pouhou, slepou a otupující cvičností (routinou), nýbrž že naopak podává počtáři neustále příležitost, by cvičil svou vynalezavost, tím že nabude mnohých, právě tak rozmanitých jako zajímavých zkušeností a naučí se užívati spůsobů početních více méně přesných a více méně jasných. Avšak i v knihách co nejvíce vychválených neupozorňuje se začátečník ni slovem, že jest to holé zabíjení času, beře-li se logarithmus čísla, známého pouze s dvěma neb třemi ciframi určitě, se sedmi místy desetinnými, a že jest to nesmyslné, podržeti při sčítání více míst desetinných, nežli jich má číslo nejméně přiblížené. A přec není k tomu dlouhého přemýšlení potřebí, bychom se přesvědili o nesmyslnosti takového počítání!

Tam, kde sobě chyb tak hrubých nebylo povšimnuto, nelze ovšem diviti se, že není nijak naznačeno, jak by se měla z rozdílů tabulkových vypočítati hořejší mez chyby učiněné, třeba by známost meze této byla sebe prospěšnější jak pro posouzení přesnosti výsledku tak pro porovnání výhod, jaké mohou po případě poskytnousti rozličné spůsoby výpočtu.

Nyní bude na místě, bychom promluvili několik slov o užívání úhlů pomocných, které má za účel přetvořiti (transformovati) stůj co stůj konečný vzorec ve výraz jednočlenný, nehledě ku práci na přetvoření toto vynaložené. Snadno nám bude ukázati, že dle vzorců takto obdržených nepočítá se vůbec logarithmicky nejsnadněji, a že zdánlivá jednoduchost hodnot, jež jsme obdrželi, jest ve skutečnosti nejčastěji pouhý mam a klam.

Nikdo zajisté nebude upírati, že vyhledání logarithmu v tabulkách trigonometrických, byť i sebe více zdokonalených, vyžaduje mnohem více času a pozornosti, nežli podobné vyhledávání v tabulkách obsahujících logarithmy čísel. I sebe menší zkušenost v počítání takovém postačí k poznání pravdy této. Nahražení tabulek obsahujících logarithmy čísel tabulkami trigonometrickými bylo by výhodným jen tehdy, kdyby se tím zmenšil počet logarithmů, jež jest nám vyhledati z tabulek (počet „čtení“), čemuž však není tak, neboť věc se má nejčastěji právě naopak.

Pozorujme na př. vzorce k řešení trojúhelníka sferického pro ten případ, že jsou dány dvě strany a, b a jimi uzavřený úhel C. Vzorce tyto jsou:

$$\left.\begin{aligned} \cot a \sin b - \cot A \sin C &= \cos b \cos C, \\ \cot b \sin a - \cot B \sin C &= \cos a \cos C, \\ \cos c &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Vzorce z těchto vyvozené a pro počítání logarithmické upravené jsou:

$$\left.\begin{array}{l} tang\,\varphi = tang\,a\,cos\,C,\quad tang\,A = \dfrac{sin\,\varphi\,tang\,C}{sin\,(b-\varphi)}, \\ tang\,\psi = tang\,b\,cos\,C,\quad tang\,B = \dfrac{sin\,\psi\,tang\,C}{sin\,(a-\psi)}, \\ cos\,c = \dfrac{cos\,a\,cos\,(b-\varphi)}{cos\,\varphi} = \dfrac{cos\,b\,cos\,(a-\psi)}{cos\,\psi}. \end{array}\right\} \quad (2)$$

Upotřebíme-li vzorců (2), musíme vyhledati 16 logarithmů, abychom určili

log $tang\,a$, log $cos\,C$, φ, log $tang\,b$, ψ, log $sin\,\varphi$, log $tang\,C$, log $sin\,(b-\varphi)$, A, log $sin\,\psi$, log $sin\,(a-\psi)$, B, log $cos\,a$ [neb log $cos\,b$], log $cos\,(b-\varphi)$ [neb log $cos\,(a-\psi)$], log $cos\,\varphi$ [neb log $cos\,\psi$], c,

dále jest nám provésti dvě odčítání, bychom si zjednali $b-\varphi$, $a-\psi$. Pokud však potrvá šedesátinné rozdělení kruhu, dlužno považovati každý výkon o úhlech za práci takovou jako vyhledání jednoho logarithmu z tabulek.

Uvedeme-li vzorce (1) na tvar

$$cos\,c = cos\,a\,cos\,b\,(1 + tang\,a\,tang\,b\,cos\,C),$$

$$cot\,A = \frac{tang\,b}{tang\,a}\cdot\frac{cos\,b}{sin\,C}\left(1 - \frac{tang\,a\,cos\,C}{tang\,b}\right),$$

$$cot\,B = \frac{tang\,a}{tang\,b}\cdot\frac{cos\,a}{sin\,C}\left(1 - \frac{tang\,b\,cos\,C}{tang\,a}\right),$$

potřebí vyhledati z tabulek pouze 15 logarithmů, z nichž šest v tabulkách čísel, bychom nalezli veličiny log $cos\,a$, log $cos\,b$, log $tang\,a$, log $tang\,b$, log $cos\,C$, log $sin\,C$,

$$N = \frac{tang\,a\,cos\,C}{tang\,b},\quad N' = \frac{tang\,b\,cos\,C}{tang\,a},$$

$N'' = tang\,a\,tang\,b\,cos\,C$, log $(1-N)$, log $(1-N')$, log $(1+N'')$, A, B, c,

aniž by bylo třeba úhly odčítati.

Stůjž zde úplně provedený numerický příklad, při němž zavedeny úhly pomocné, jak jej nacházíme v Serretově „Pojednání o trigonometrii“. (Traité de Trigonometrie p. 180):

$a = 113^{0}\ 2'\ 56{\cdot}64''$		$\cos C =$	$-\bar{1}{\cdot}8767036$	$\dfrac{\tan b}{\tan a} =$	$-0{\cdot}5188004$
$b = 82^{0}\ 39'\ 28{\cdot}40''$		$\tan a =$	$-0{\cdot}3711149$	$\dfrac{\cos b}{\sin C} =$	$-\bar{1}{\cdot}2881502$
$C = 138^{0}\ 50'\ 13{\cdot}69''$		$\tan b =$	$0{\cdot}8899153$	$1 - N$	$\bar{1}{\cdot}8876267$
$\sin C$	$\bar{1}{\cdot}8183589$	N''	$1{\cdot}1377338$	$\cot A$	$-\bar{1}{\cdot}6945773$
$\cos a$	$-\bar{1}{\cdot}5927532$	N	$\bar{1}{\cdot}3579032$	$A = 116^{0}\ 20'\ 2{\cdot}21''$	
$\cos b$	$1{\cdot}1065091$	N'	$0{\cdot}3955040$	$\dfrac{\tan a}{\tan b}$	$-\bar{1}{\cdot}4811996$
$1 + N''$	$1{\cdot}1682617$	$N'' = 13{\cdot}73200$		$\dfrac{\cos a}{\sin C}$	$-\bar{1}{\cdot}7743943$
$\cos c$	$\bar{1}{\cdot}8675240$	$N = 0{\cdot}2279834$		$1 - N'$	$-0{\cdot}1720236$
$c = 137^{0}\ 29'\ 4{\cdot}63''$		$N' = 2{\cdot}4860165$		$\cot B$	$-\bar{1}{\cdot}4276175$
				$B = 104^{0}\ 59'\ 8{\cdot}38''$	

Napsali jsme tu všecky výpočty, kteréž počtář poněkud vycvičený nemá provésti z hlavy neb počítadlem. Kdybychom užili tabulek logarithmů součtových a rozdílových, bylo by potřebí vyhledati ještě o 3 logarithmy méně.

Nyní můžeme posouditi, oč jsou výkony shora uvedené kratší nežli výkony provedené na základě method umělých, při nichž užíváno úhlů pomocných, neb i než ony výkony, které podobně jako analogie Neperovy neb vzorce Delambre'ovy a Gaussovy vyžadují mnohonásobného sčítání a odčítání úhlů. Z toho soudíme, že jest to nejvýhodnější, užívá-li se přímo základních vzorců trigonometrie sferické, a že je to pouhý přelud, domnívá-li se kdo, že se tím něčeho získá, přetvoří-li se vzorce tyto ve výrazy jednočlenné buď prostředkem úhlů pomocných, buď pomocí vzorců, kteréž se k přetvoření tomuto samy naskytují. Protož by se měla z učebných kněh vyškrtnouti průpověď, právě tak špatně volená, jako methoda podlé ní pojmenovaná, totiž: „učiniti vzorec spůsobilým k počítání logarithmickému.“

Připouštíme sice, že mohou nastati případy, při nichž úhlů pomocných výhodně užíti lze, avšak případy tyto nevyskytují se nikde v theorii, na které spočívají základové trigonometrie. Nanejvýše mohlo by se vypracovati několik příkladů o přetvoření tomto, a to jen k vůli pouhému se cvičení, a poukázati při té příležitosti nikoli na výhody, nýbrž na vady jeho.

III.

Výsledky počtu trigonometrického mohou býti podrobeny dvěma příčinám chyb, od sebe se naprosto lišícím, z nichž jedna závisí na nevyhnutelné nedokonalosti tabulek logarithmických, druhá na chybách, jimž jsou podrobena dáta otázky. Druhá příčina má vůbec větší účinek na výsledek nežli první, když se totiž užívá tabulek dosti velkých.

Dejme tomu, že část x trojúhelníka jest určena funkcemi trigonometrickými p, q .... částí známých ze vzorce

$$f(x) = \varphi(p, q, \ldots).$$

Logarithmy bezprostředně z tabulek vzaté jsou podrobeny jisté maximalné chybě $d\omega$, kteráž může se zdvojnásobiti při logarithmech prokladem vypočítaných a státi se rovnou jedničce posledního místa desetinného.

Přijmeme-li, že jsou částky, na nichž je p, q, ... závislé, určitě známé a že je funkce $\varphi(p, q, \ldots)$ vypočtena logarithmy, tož se chyba tabulek $\pm d\omega$, k logarithmu funkce p se vztahující, vyrovná chybě $dp = \pm \frac{p\,d\omega}{M}$, jíž funkce p sama podrobena (při čemž M znamená modul logarithmů decimálných), a tudíž spůsobí v $\varphi(p, q, \ldots)$ chybu rovnou $\pm \frac{d\omega}{M} \cdot p\,\frac{d\varphi}{dp}$.

Úplná chyba, které dopustíme se při log $\varphi(p, q, \ldots)$, bude tedy

$$\frac{d\omega}{\varphi(p,q,\ldots)}\left(\pm p\frac{d\varphi}{dp}\pm q\frac{d\varphi}{dq}+\ldots\right).$$

Označíme-li výraz v závorce obsažený písmenem K, bude maximum chyby této

$$\frac{K\,d\,\omega}{\varphi(p,q,\ldots)}.$$

Poněvadž chyba tato rovná se chybě při log $f(x)$ učiněné, totiž $\frac{Mf'(x)\,dx}{f(x)}$, a ježto krom toho $f(x)=\varphi(p,q,\ldots)$, bude

$$dx=\frac{K\,d\omega}{Mf'(x)}.$$

Změníme-li tvar relace mezi x, p, q, ..., změní se též výrazy pro K a $f'(x)$, a podobně i hodnota dx může vzíti změnu. V takovém případě jest nám tedy skoumati, jakého tvaru musí býti relace tato, aby pro danou rozsáhlost tabulek hodnota dx byla minimum.

Pozorujme na př. následující dva rovnomocné vzorce

$$\cos c=\frac{\cos a}{\cos b},\quad \operatorname{tang}\frac{1}{2}c=\sqrt{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(a+b)\operatorname{tang}\frac{1}{2}(a-b)}$$

Uvedše první na tvar

$$\log\cos c=\log\cos a-\log\cos b,$$

obdržíme maximum chyby, kterou jsme při c učinili

$$dc=\frac{2}{M}\cot c\,.\,d\omega\,.$$

Druhý vzorec dá podobně

$$dc=\frac{1}{M}\sin c\,d\omega\,,$$

z čehož viděti, že jest výhodnější než první, má-li c malý úhel býti, neboť poměr obou chyb jest pak $\frac{2\cos c}{\sin^2 c}$ neb téměř $\frac{2}{c^2}$. Je-li tedy $a=50^0$, $b=49^0$, tož bude chyba jedné jednotky v sedmé decimalce při log $\cos c$ učiněná souhlasiti s chybou $\frac{10''}{43}$ neb téměř $0{\cdot}25''$ při úhlu c, poněvadž rozdíl tabulkový jest 43 pro 10″, kdežto vezmeme-li druhý vzorec, dá chyba $\frac{1}{2}$-jednotky při log $tang\,\frac{1}{2}c$ při úhlu pouze chybu

$$=2.\frac{\frac{1}{2}.\,10''}{2111}<0{\cdot}01''.$$

Zcela jinak se to má, když chyby mají původ svůj v dátech. Poněvadž v případě tom neznámá x jest vázána s danými veličinami a, b, ... relací

$$f(x)=F(a, b, \ldots),$$

nemění se hodnota chyby, vzaté bez ohledu na neúplnost tabulek, totiž

$$dx=\frac{1}{f'(x)}\left(\frac{\partial F}{\partial a}da+\frac{\partial F}{\partial b}db+\ldots\right),$$

když relací tuto spůsobem nějakým přetvoříme.

V případě tomto nezískáme ničeho, dáme-li jednomu vzorci přednost před druhým, a z té příčiny volmež vždy nejjednodušší z nich.

Za příklad vezměmež předešlý výpočet, a dejme tomu, že každý z obou úhlů podroben jest chybě 1″.

1. vzorec.		Možná chyba.	2. vzorec.		Možná chyba.
$cos\,a$ ...	$\bar{1}{\cdot}8080675$ ...	25	$tang\,\frac{1}{2}(a+b)$	$0{\cdot}0685011$	43
$cos\,b$ ...	$\bar{1}{\cdot}8169429$ ...	24	$tang\,\frac{1}{2}(a-b)$	$\bar{3}{\cdot}9408584$	2406
$cos\,c$ ...	$\bar{1}{\cdot}9911426$ ...	49	součet.....	$\bar{2}{\cdot}0093595$	2449
$c=11^0\,32'\,38{\cdot}75''$	...	11.4″	$tang\,\frac{1}{2}c$ ...	$\bar{1}{\cdot}0046798$	1225
			$\frac{1}{2}c=$	$5^0\,46'\,19{\cdot}365''$	5·1″
			$c=$	$11^0\,32'\,38{\cdot}73''$	10·2″

Z toho viděti, že oba vzorce dají téměř tytéž přibližné hodnoty a že první předčí druhý jednoduchostí svou.