O kvaternionech.

Sepsal

Dr. F. J. Studnička.

(Pokračování.)

§. 2.

O sečítání a odčítání kvaternionů.

Abychom ustanovili součet dvou kvaternionů

$$\alpha = a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3 , \qquad (10)$$

$$\beta = b_0 + b_1 i_1 + b_2 i_2 + b_3 i_3 , \qquad (11)$$

uvažme, že tu platí vesměs zákon distributivní a že tudíž bude

$$\alpha + \beta = a_0 + b_0 + (a_1 + b_1) i_1 + (a_2 + b_2) i_2 + (a_3 + b_3) i_3,$$

z čehož pak jde dále

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha,$$

což znamená, že sečítání kvaternionů jest kommutativní. A značí-li všeobecně

$$\alpha_k = a_{0k} + a_{1k} i_1 + a_{2k} i_2 + a_{3k} i_3 ;$$
$$k = 1, 2, 3, \ldots n,$$

bude podlé téhož pravidla

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = \Sigma a_{0k} + i_1 \Sigma a_{1k} + i_2 \Sigma a_{2k} + i_3 \Sigma a_{3k} , \qquad (12)$$

z čehož patrno, *že součet kvaternionů jest opět kvaternionem.*

Podobně obdržíme odečítáním

$$\alpha - \beta = a_0 - b_0 + (a_1 - b_1) i_1 + (a_2 - b_2) i_2 + (a_3 - b_3) i_3 , \qquad (13)$$

z čehož poznáváme, že *rozdíl dvou kvaternionů jest opět kvaternionem,* a poněvadž i tu platí

$$\alpha - \beta = -(\beta - \alpha) ,$$

že odčítání kvaternionů jest úkon alternující.

Jestli pak ve vzorci (13)

$$\alpha = \beta\,, \tag{14}$$

povstane z něho

$$0 = (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)\,i_1 + (a_2 - b_2)\,i_2 + (a_3 - b_3)\,i_3\,,$$

kteréžto podmínce pro nestejnorodost výrazu na pravé straně stojícího se vyhoví jen tím, že

$$a_0 = b_0\,,\quad a_1 = b_1\,,\quad a_2 = b_2\,,\quad a_3 = b_3\,, \tag{15}$$

z čehož naopak soudíme, *že dva kvaterniony se sobě rovnají, rovnají-li se sobě jejich složky,* takže z rovnosti dvou kvaternionů (14) se obdrží čtyry rovnosti s členy reálnými (15).

Jestli β sdruženým determinantem, platí-li tedy místo vzorců (10) a (11)

$$\alpha = R\alpha + I\alpha\,, \tag{16}$$

$$K\alpha = R\alpha - I\alpha\,, \tag{17}$$

obdržíme sečtením a odečtením

$$\alpha + K\alpha = 2\,R\alpha\,, \tag{18}$$

$$\alpha - K\alpha = 2\,I\alpha\,, \tag{19}$$

což znamená, *že součet kvaternionů sdružených jest reálný, rozdíl pak ideálný.*

Znásobíme-li konečně poslední dva vzorce, obdržíme podle známého pravidla, připojíme-li exponent, jak se obyčejně děje, k symbolu funkcionálnímu K,

$$\alpha^2 - K^2\alpha = 4R\alpha\,.\,I\alpha\,, \tag{20}$$

při čemž arci jsme použili identičnosti

$$\alpha\,.\,K\alpha = K\alpha\,.\,\alpha\,,$$

kteráž ze vzorců (16) a (17) bezprostředně plyne; ze vzorce (20) poznáváme, *že rozdíl čtverců kvaternionů sdružených jest taktéž ideálný,* jako rozdíl prvních mocnin.

§. 3.

O násobení kvaternionů.

Chceme-li si zjednati součin kvaternionů (10) a (11), násobme podlé známých pravidel, majíce však pilně na zřeteli postavení jednotlivých činitelů, aby se v ustanoveném napřed pořádku kladl napřed člen prvního, pak druhého činitele, načež obdržíme

$$\begin{aligned}\alpha\beta = \; & a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) i_1 + (a_0 b_2 + a_2 b_0) i_2 + (a_0 b_3 + a_3 b_0) i_3 \\ & + a_1 b_1 i_1^2 + a_1 b_2 i_1 i_2 + a_1 b_3 i_1 i_3 + a_2 b_3 i_2 i_3 \\ & + a_2 b_2 i_2^2 + a_2 b_1 i_2 i_1 + a_3 b_1 i_3 i_1 + a_3 b_2 i_3 i_2 \\ & + a_3 b_3 i_3^2,\end{aligned}$$

z čehož plyne, použijeme-li vzorců soustavy (6) a položíme-li

$$\begin{aligned} c_0 &= a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3 \,, \\ c_1 &= a_0 b_1 + a_1 b_0 + a_2 b_3 - a_3 b_2 \,, \\ c_2 &= a_0 b_2 - a_1 b_3 + a_2 b_0 + a_3 b_1 \,, \\ c_3 &= a_0 b_3 + a_1 b_2 - a_2 b_1 + a_3 b_0 \,, \end{aligned} \tag{21}$$

kteréžto hodnoty jsou vesměs reálné, a mimo to

$$\gamma = c_0 + c_1 i_1 + c_2 i_2 + c_3 i_3 \,, \tag{22}$$

kdež tedy γ opět jest kvaternionem,

$$\alpha\beta = \gamma \,,$$

z čehož patrno, *že součin dvou kvaternionů jest opět kvaternionem,* z čehož pak dále plyne, že i součin n kvaternionů jest taktéž kvaternionem.

Nežli však přejdeme k dalším vývodům, nutno vyšetřiti, zda-li násobení kvaternionů jest úkonem kommutativním čili nic, abychom se podlé toho pak řídili.

K tomu cíli dejme kvaternionům (10) a (11) kratší tvar

$$\alpha = R\alpha + I\alpha \,,$$

$$\beta = R\beta + I\beta$$

a zjednejme si, kladouce napřed členy svrchního činitele,

$$\alpha\beta = R\alpha \,.\, R\beta + R\alpha \,.\, I\beta + I\alpha \,.\, R\beta + I\alpha \,.\, I\beta$$

a naopak, kladouce napřed členy spodního činitele,

$$\beta\alpha = R\beta \,.\, R\alpha + R\beta \,.\, I\alpha + I\beta \,.\, R\alpha + I\beta \,.\, I\alpha \,.$$

Poněvadž reální činitel nemá vlivu na záměnnost a tudíž platí

$$R\alpha \,.\, I\beta = I\beta \,.\, R\alpha$$

$$I\alpha \,.\, R\beta = R\beta \,.\, I\alpha \,,$$

nutno jen vyšetřiti, zda-li poslední členové obou součinů se sobě rovnají; k tomu cíli zjednejme si ze vzorců

$$I\alpha = a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3 \,,$$

$$I\beta = b_1 i_1 + b_2 i_2 + b_3 i_3 \,,$$

za pomocí vzorců (6) pravidelným násobením

$$I\alpha \,.\, I\beta = -(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \\ + (a_2b_3 - a_3b_2)\, i_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)\, i_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\, i_3,$$

aneb použijeme-li tvaru determinantního,

$$I\alpha \,.\, I\beta = -(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) + \begin{vmatrix} i_1 & a_1 & b_1 \\ i_2 & a_2 & b_2 \\ i_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}, \qquad (23)$$

načež poznáme ihned, vyměníme-li α za β a tudíž a za b, že

$$I\beta \,.\, I\alpha = -(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) - \begin{vmatrix} i_1 & a_1 & b_1 \\ i_2 & a_2 & b_2 \\ i_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix},$$

z čehož patrno, že součin těchto ideálných veličin není záměnný, nýbrž že výměnou činitelů mění se označení části ideálné.

Použijeme-li označení vzorce (8), jest totiž

$$I\alpha \,.\, I\beta = R\,(I\alpha\, I\beta) + I\,(I\alpha\, I\beta) \qquad (24)$$

$$I\beta \,.\, I\alpha = R\,(I\alpha\, I\beta) - I\,(I\alpha\, I\beta) = K\,(I\alpha\, I\beta)\,, \qquad (25)$$

z čehož dále poznáváme, že výměnou dvou činitelů se součin stane sdruženým aneb že součin dvou ideálných částí rovná se sdruženému kvaternionu obráceného součinu těchto částí.

Ze vzorce (23) plyne pak pro

$$\alpha = \beta\,;\; a = b\,,$$

kdež jsou oba kvaterniony stejné,

$$I^2\alpha = -(a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2)\,, \qquad (26)$$

z čehož patrno, že čtverec ideálné části kvaternionu jest reálný; ze vzorce (24) a (25) obdrží se pak, násobíme-li

$$I\alpha \,.\, I^2\beta \,.\, I\alpha = R^2\,(I\alpha\, I\beta) - I^2\,(I\alpha\, I\beta)$$

aneb máme-li zřetel ke vzorci (26), reálnost jevícímu,

$$I^2\alpha\, I^2\beta = R^2\,(I\alpha\, I\beta) - I^2\,(I\alpha\, I\beta), \qquad (27)$$

což znamená, zavedeme-li původní hodnoty za tyto symboly

$$(a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2)\,(b_1{}^2 + b_2{}^2 + b_3{}^2) = (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \\ + (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2, \qquad (28)$$

známá to identita, jíž se s velikým prospěchem užívá v rozmanitých případech, zejména v analytické geometrii v prostoru.[1])

[1]) Viz *Studnička* „Úvod do analytické geometrie v prostoru" pag. 20., 25., 41., 49. atd. Důkaz všeobecnějšího pravidla pomocí součinu dvou

Použijeme-li tedy vzorce (24) a (25), můžeme součinu dvou kvaternionů (10) a (11) dáti tvar

$$\alpha\beta = R\alpha\, R\beta + R\alpha\, I\beta + R\beta\, I\alpha + R\,(I\alpha\, I\beta) + I\,(I\alpha\, I\beta), \qquad (29)$$

$$\beta\alpha = R\alpha\, R\beta + R\alpha\, I\beta + R\beta\, I\alpha + R\,(I\alpha\, I\beta) - I\,(I\alpha\, I\beta). \qquad (30)$$

Přejdeme-li pak ku kvaternionům sdruženým, vzorci (16) a (17) vytknutým, obdržíme znásobením

$$\alpha\,.\,K\alpha = R^2\alpha - I^2\alpha\,,$$

a tudíž podlé vzorce (8) a (26)

$$\alpha\,.\,K\alpha = a_0{}^2 + a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2,$$

z čehož patrno, že součin kvaternionů sdružených jest reálným; součet těchto čtverců sluje *norma*, odmocnina pak *modul* kvaternionu a značí se symbolem N a M, takže

$$\alpha\,.\,K\alpha = a_0{}^2 + a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2 = N\alpha = M^2\alpha, \qquad (31)$$

což znamená, *že součin kvaternionu s kvaternionem sdruženým činí normu téhož kvaternionu neb čtverec jeho modulu.*

Dále obdržíme ze vzorce (29) podlé vzorce (9)

$$K(\alpha\beta) = R\alpha\, R\beta - R\alpha\, I\beta - R\beta\, I\alpha + [R\,(I\alpha\, I\beta) - I\,(I\alpha\, I\beta)]\,,$$

kdež poslední člen v hranatých závorkách obsažený dá podlé vzorce (25) $I\beta\,.\,I\alpha$, takže jest tedy

$$K(\alpha\beta) = R\alpha\, R\beta - R\alpha\, I\beta - R\beta\, I\alpha + I\beta\, I\alpha\,;$$

podobně obdržíme pouhým násobením, majíce zřetel ku kommutativnosti tam, kde platí,

$$K\beta\,.\,K\alpha = (R\beta - I\beta)\,(R\alpha - I\alpha)\,. = R\alpha\, R\beta - R\alpha\, I\beta - R\beta\, I\alpha + I\beta\, I\alpha\,,$$

z čehož jde tedy, porovnáme-li tyto výsledky,

$$K(\alpha\beta) = K\beta\,.\,K\alpha\,, \qquad (32)$$

což znamená, *že sdružený kvaternion součinu rovná se součinu sdružených kvaternionů v opačném pořádku postavených.*

Ze vzorce (32) obdržíme pak pro

$$\alpha = \beta, \quad a = b\,,$$

determinantů vedený podán v Časop. pro pěstování mathematiky a fysiky. Ročník II. pag. 77.

máme-li zřetel k obyčejné symbolice,

$$K\alpha^2 = K^2\alpha\,, \qquad (33)$$

což i přímo dokázati možná; *sdružený čtverec kvaternionu jest tedy čtvercem sdruženého kvaternionu.*

Znásobíme-li konečně známý vzorec

$$\alpha\beta = \gamma$$

a z něho plynoucí

$$K(\alpha\beta) = K\gamma\,,$$

obdržíme především

$$\alpha\beta\,.\,K(\alpha\beta) = \gamma K\gamma$$

aneb pomocí vzorce (32)

$$\alpha\beta K\beta K\alpha = \gamma K\gamma$$

a tudíž se zřetelem k reálnosti součinu $\beta K\beta$

$$\alpha K\alpha\,.\,\beta K\beta = \gamma K\gamma\,,$$

z čehož plyne, použijeme-li vzorce (31),

$$N\alpha\,.\,N\beta = N\gamma\,, \qquad (34)$$

což znamená, *že součin norem dvou kvaternionů jest normou součinu obou kvaternionů.*

Zavedeme-li do posledního vzorce pravé hodnoty podlé vzorce (22) a (31) určené, obdržíme vzorec

$$(a_0{}^2+a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2)\,(b_0{}^2+b_1{}^2+b_2{}^2+b_3{}^2) = (c_0{}^2+c_1{}^2+c_2{}^2+c_3{}^2),$$

z něhož patrno, jak součet čtyr čtverců dá se rozložiti v součin dvou činitelů, z nichž každý jest taktéž součtem čtyr čtverců a naopak, pravidlo to, jež Euler ponejprv odůvodnil a jež v posledních dobách značně bylo rozšířeno.*)

Položíme-li ve vzorci (34)

$$\alpha = \beta, \text{ tedy } \gamma = \alpha^2,$$

obdržíme z něho, což i přímo lze odůvodniti,

$$N^2\alpha = N\alpha^2, \qquad (35)$$

z čehož jde, *že čtverec normy kvaternionu rovná se normě čtverce téhož kvaternionu.*

(Pokračování).

---

[1]) Viz *Studnička* „Základové nauky o číslech“ pag. 22.