Čeněk Jarolímek

Několik příspěvků k analytické geometrii kuželoseček. [II.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 19 (1890), No. 2, 76--82

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108828

Několik příspěvků k analytické geometrii kuželoseček.

Žákům středních škol podává Č. Jarolímek, professor v Praze.

(Dokončení.)

V. O rovnoběžníku ellipse opsaném.

Úhlopříčny rovnoběžníka ellipse opsaného obsahují dva průměry spolu sdružené.

Důkaz. Jsou-li $T_1 \parallel T_2$ dvě tečny ellipsy

(1) $$E \equiv b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0,$$

$t_1(x_1, y_1)$, $t_2(x_2, y_2)$ příslušné body dotyčné, jest $x_2 = -x_1$, $y_2 = -y_1$, pročež

(2) $$T_1 \equiv b^2x_1x + a^2y_1y - a^2b^2 = 0,$$

(3) $$T_2 \equiv b^2x_1x + a^2y_1y + a^2b^2 = 0.$$

Jiným dvěma tečnám $U_1 \parallel U_2$ budou přináležeti obdobné rovnice

(4) $$U_1 \equiv b^2\xi_1x + a^2\eta_1y - a^2b^2 = 0,$$

(5) $$U_2 \equiv b^2\xi_1x + a^2\eta_1y + a^2b^2 = 0.$$

Jde nyní o rovnice úhlopříčen rovnoběžníka $(T_1U_1T_2U_2)$. Rozdíl rovnic (2) a (4) dá rovnici určitého paprsku svazku (T_1U_1):

(6) $$b^2(x_1 - \xi_1)x + a^2(y_1 - \eta_1)y = 0;$$

že však paprsek tento jde počátkem souřadnic, jest totožný s jednou úhlopříčnou rovnoběžníka, jejíž směrnice tedy

(7) $$A = -\frac{b^2(x_1 - \xi_1)}{a^2(y_1 - \eta_1)}.$$

Podobně dá součet rovnice (3) a (4) rovnici druhé úhlopříčny

(8) $$b^2(x_1 + \xi_1)x + a^2(y_1 + \eta_1)y = 0,$$

jejíž směrnice

(9) $$A' = -\frac{b^2(x_1 + \xi_1)}{a^2(y_1 + \eta_1)}.$$

Součin obou směrnic

$$AA' = \frac{b^4(x_1^2 - \xi_1^2)}{a^4(y_1^2 - \eta_1^2)};$$

dosadíme-li však z rovnice ellipsy, ježto body (x_1y_1), $(\xi_1\eta_1)$ jsou na křivce,

$$y_1^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x_1^2), \quad \eta_1^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - \xi_1^2),$$

vyjde po redukci

$$\text{(10)} \qquad AA' = -\frac{b^2}{a^2}.$$

Úhlopříčny rovnoběžníka vyhovují tudíž známé podmínce pro sdružené průměry ellipsy.

Obdobně lze dokázati, že úhlopříčny rovnoběžníka, omezeného dvěma dvojinami rovnoběžných tečen hyperboly, obsahují dva sdružené průměry.

VI. O geometrickém místě středu tetivy procházející pevným bodem.

Mimo ellipsu

$$\text{(1)} \qquad E \equiv b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$$

buď dán pevný bod s (ξ, η).

Otáčí-li se sečna procházející bodem s

$$\text{(2)} \qquad S \equiv (y - \eta) - A(x - \xi) = 0$$

okolo téhož bodu s, vytvořuje bod u, jenž rozpoluje tetivu ellipsy $\overline{m_1 m_2}$ v sečně S obsaženou, ellipsu F podobnou ellipse E a s ní stejně položenou, t. j. souhlasné osy křivek jsou spolu rovnoběžny. Ellipsa F sestrojena tu totiž z E homologickou transformací dle dvojpoměru $= -1$, pro střed s a osu homologie v nekonečnu.

Analytický důkaz této věty jest následující.

Pro souřadnice průsečíků m_1, m_2 platí rovnice (1) a (2) zároveň. Vyloučíme-li z nich y, obdržíme, rovnici spořádajíce a člen prostý písmenem C označíce,

$$\text{(3)} \qquad x^2 - \frac{2a^2A(A\xi - \eta)}{b^2 + a^2A^2}x + C = 0.$$

Kořeny této rovnice x_1, x_2 jsou úsečky bodů m_1, m_2; jest pak

$$x_1 + x_2 = \frac{2a^2A(A\xi - \eta)}{b^2 + a^2A^2},$$

tudíž úsečka bodu u, jenž tetivu $\overline{m_1 m_2}$ rozpoluje,

$$\text{(4)} \qquad x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{a^2A(A\xi - \eta)}{b^2 + a^2A^2}.$$

Vyloučením proměnné A z rovnic (2) a (4) vyjde po redukci rovnice geom. místa bodu u

(5) $$F \equiv b^2x^2 + a^2y^2 - b^2\xi x - a^2\eta y = 0.$$

Přeložíme-li počátek souřadnic do bodu o', jenž spojnici $\overline{os}$ rozpoluje, jehož původní souřadnice jsou tedy $\frac{\xi}{2}$, $\frac{\eta}{2}$, podržíce směry os X, Y, přetvoříme rovnici (5) do nové soustavy, kladouce $\left(x + \frac{\xi}{2}\right)$ za x, $\left(y + \frac{\eta}{2}\right)$ za y. Výsledek jest

(6) $$F \equiv b^2x^2 + a^2y^2 - \tfrac{1}{4}(b^2\xi^2 + a^2\eta^2) = 0,$$

kdež ξ, η jsou původní souřadnice bodu s, t. j. vzdálenosti jeho od os dané ellipsy E. Jest tedy žádané místo ellipsa, jejíž střed o' půlí spojnici $\overline{os}$, osy jsou rovnoběžny s osami ellipsy E, a délky poloos z rov. (6)

(7) $$a' = \frac{1}{2b}\sqrt{b^2\xi^2 + a^2\eta^2}, \quad b' = \frac{1}{2a}\sqrt{b^2\xi^2 + a^2\eta^2}.$$

Ježto $a' : b' = a : b$, jest F $\sim$ E.

Ellipsa F dle rovnice (5) jde středem o ellipsy E, bodem s, jakož i dotyčnými body t_1, t_2 tečen, sestrojených z bodu s k ellipse E; tetiva $\overline{t_1t_2}$ jest rovnoběžna s tečnami ellipsy F, sestrojenými v bodech o, s, jsouc sdružena s průměrem $\overline{os}$. Dán-li bod s na ellipse E, obě ellipsy v něm se dotýkají, a poloosy ellipsy F $a' = \frac{a}{2}$, $b' = \frac{b}{2}$.

Pro parabolu

(8) $$P \equiv y^2 - 2px = 0$$

obdržíme obdobně geom. místo středu tetivy, procházející bodem $s(\xi, \eta)$, toto:

(9) $$R \equiv y^2 - \eta y - p(x - \xi) = 0.$$

Jest to parabola, jejíž osa jest rovnoběžna s osou X paraboly P, mající pořadnici

(10) $$y' = \frac{\eta}{2};$$

úsečka vrcholu jest

(11) $$x' = \xi - \frac{\eta^2}{4p},$$

a parametr paraboly R rovná se polovině parametru paraboly

P. Neboť položíme-li počátek souřadnic do vrcholu paraboly R, neměníce směry os, promění se rovnice (9) substitucemi

$$x + x' = x + \xi - \frac{\eta^2}{4p} \quad \text{za } x,$$

$$y + y' = y + \frac{\eta}{2} \quad \text{za } y$$

v rovnici

$$y^2 = px.$$

VII. O kružnici křivosti.

Kružnice a kuželosečka mají čtyři body společné. Kružnice křivosti L majíc s kuželosečkou v dotyčném bodě *m* tři splývající body společné seče ji nezbytně v dalším bodě čtvrtém *n*, vždy *realném*, ježto dvě křivky druhého řádu mohou míti jen *sudý* počet průsečíků imaginarných.

Společná tetiva křivek, č. chordála *mn* a společná tečna T jsou od každé osy kuželosečky odchýleny o úhly *supplementarní*: béřeme-li osu tu za osu úseček, můžeme říci, že chordála *mn* a tečna T jsou pravoúhelně symmetrické k pořadnici bodu dotyčného *m*.

Souřadnice středu křivosti na př. pro bod $m(x_1, y_1)$ na parabole

(1) $$y^2 = 2px$$

jsou.

(2) $$\xi = p + 3x_1,$$

(3) $$\eta = -\frac{y_1^3}{p^2},$$

poloměr křivosti

(4) $$r = \frac{1}{p^2}\sqrt{(p^2 + y_1^2)^3},$$

a rovnice kružnice křivosti

(5) $$\mathrm{L} \equiv p^4(x - p - 3x_1)^2 + (p^2 y + y_1^3)^2 - (p^2 + y_1^2)^3 = 0,$$

nebo také

(6) $$\mathrm{L} \equiv x^2 + y^2 - 2(p + 3x_1)x + \frac{2y_1^3}{p^2} \cdot y - 3x_1^2 = 0.$$

Abychom vyhledali body parabole a kružnici společné, vylučme z rovnic (1) a (5) nebo (6) x. Kladouce při tom

$$x_1 = \frac{y_1^2}{2p},$$

ježto bod m je na parabole, obdržíme po redukci rovnici

(7) $$y^4 - 6y_1^2 y^2 + 8y_1^3 y - 3y_1^4 = 0.$$

Jelikož tři body společné stotožňují se s bodem dotyčným m, jsou tři kořeny rovnice (7)

(8) $$y = y_1 = y_2 = y_3;$$

bude tedy polynom rovnice (7) dělitelen činitelem $(y - y_1)^3$. Podíl

$$y + 3y_1 = 0$$

dá čtvrtý kořen

(9) $$y_4 = -3y_1,$$

jakožto pořadnici čtvrtého bodu n, v němž kružnice parabolu seče. Táž hodnota plyne také přímo z rovnice (7), která člen ky^3 neobsahuje, t. j. koefficient $k = 0$; avšak

$$k = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 0,$$

tudíž dle rovnice (8) $y_4 = -3y_1$.

Z rovnice $y_4^2 = 2px_4$ a rov. (9) jde úsečka bodu n

(10) $$x_4 = 9x_1.$$

Směrnice chordály $\overline{mn}$ jest

(11) $$A = \frac{y_1 - y_4}{x_1 - x_4} = \frac{4y_1}{-8x_1} = -\frac{p}{y_1},$$

směrnice pak tečny T v bodě m sestrojené

(12) $$A' = \frac{p}{y_1},$$

tedy $A' = -A$, t. j. tečna T a chordála mn jsou odchýleny od osy paraboly $\equiv$ X o úhly supplementární. Z toho jde také jednoduchá konstrukce středu křivosti.

Táž vlastnosť přináleží ellipse i hyperbole. Pro ellipsu

(13) $$E \equiv b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$$

a kružnici křivosti v bodě $m(x_1, y_1)$ nalezneme souřadnice čtvrtého bodu společného n tyto:

(14) $$x_4 = \frac{x_1}{a^2}(4x_1^2 - 3a^2) = x_1 - \frac{4x_1y_1^2}{b^2},$$

(15) $$y_4 = \frac{y_1}{b^2}(4y_1^2 - 3b^2) = y_1 - \frac{4x_1^2y_1}{a^2}.$$

Směrnice tetivy $\overline{mn}$ jest

$$(16) \qquad A = \frac{y_1 - y_4}{x_1 - x_4} = \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}$$

a směrnice tečny T v bodě m sestrojené

$$(17) \qquad A' = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1},$$

tudíž zase $A' = -A$.

Buďtež vrcholy velké osy ellipsy v_1, v_2 (na $-X$), vrcholy malé osy u_1, u_2 (na $-Y$). Kružnice křivosti ve vrcholu v_1 má 4 splývající body s ellipsou společné, dotknutí stupně třetího; body $m \equiv n \equiv v_1$ a chordála $\overline{mn} = 0$. Vytvořuje-li bod ellipsy m čtvrť $\frown{v_1 u_1}$, vytvořuje příslušný průsečík n kružnice křivosti ostatní tři čtvrti ellipsy $v_1 u_2 v_2 u_1$ ve směru opačném. Přijde-li bod m do polohy g, jejíž pořadnice $y_1 = \frac{b}{2}$, budou souřadnice bodu n dle rovnic (14) a (15)

$$x_4 = 0, \quad y_4 = -b,$$

sjednotí se tudíž bod n s vrcholem u_2: vytvoří-li dotyčný bod m oblouk $\frown{v_1 g}$, vytvoří průsečík n čtvrť ellipsy $\frown{v_1 u_2}$. Postoupí-li bod m dále do polohy h, jejíž úsečka $x_1 = \frac{a}{2}$, budou souřadnice bodu n dle (14) a (15)

$$x_4 = -a, \quad y_4 = 0;$$

tedy $n \equiv v_2$, t. j. vytvoří-li bod m oblouk $\frown{gh}$, vytvoří bod n čtvrť ellipsy $\frown{u_2 v_2}$. Posléze vytvoří bod m oblouk $\frown{h u_1}$, bod n pak čtvrť ellipsy $\frown{v_2 u_1}$, ježto ve vrcholu u_1 oba body m, n současně se sjednotí; kružnice křivosti má tu zase s ellipsou dotknutí stupně třetího.

Neméně zajímavy jsou *a*) obalová křivka L chordály kuželosečky a její kružnice křivosti; *b*) geometrické místo M bodu, jenž chordálu tu půlí.

Pro parabolu na př.

$$P \equiv y^2 - 2px = 0$$

jest obalová křivka

$$L \equiv y^2 + 6px = 0,$$

a geom. místo

$$M \equiv y^2 - \tfrac{2}{5}px = 0;$$

obě tyto křivky jsou tedy paraboly, jež mají s P společný vrchol a osy v společné přímce, avšak směry os křivek P a L jsou protivné. Parabola L má parametr třikrát větší, M pětkrát menší, než parabola P.

Pro ellipsu a hyperbolu jest L křivka řádu šestého, M pak křivka třídy čtvrté. Obě zejména v ellipse jsou pozoruhodny pro zvláštní tvar svůj. Geom. místo

$$M \equiv (b^2x^2 + a^2y^2)^3 - a^2b^2(b^2x^2 - a^2y^2)^2 = 0$$

má tvar čtyrlístku do ellipsy vepsaného, jejž také affinní transformací odvoditi lze ze známého čtyrlístku v kruhu

$$(x^2 + y^2)^3 = a^2(x^2 - y^2)^2,$$

čili v polárné soustavě

$$\varrho = a \,.\cos 2\varphi.$$

Několik analytických studií o plochách mimosměrek (zborcených).*)

Podává

Vilém Jung,

s. professor při státní průmyslové škole v Brně.

12. *Hyperbolický paraboloid má za řídící plochu kuželovou dvě řídící roviny. Přímky jedné soustavy jsou rovnoběžné s jednou a přímky druhé soustavy s druhou řídící rovinou. Asymptotická rovina, stanovená určitou povrchovou přímkou, jest rovnoběžná s onou řídící rovinou, ku které jest zmíněná přímka rovnoběžná.*

Měj̈ž $\varDelta$ týž význam jako v odstavci 11.

Řídící plocha kuželová má rovnici:

$$\begin{vmatrix} A_1x + A_2y + A_3z, & B_1x + B_2y + B_3z \\ a_1x + a_2y + a_3z, & b_1x + b_2y + b_3z \end{vmatrix} = \varrho_{11}x^2 + \varrho_{22}y^2 + \varrho_{33}z^2$$
$$+ (\varrho_{12} + \varrho_{21})xy + (\varrho_{23} + \varrho_{32})yz + (\varrho_{31} + \varrho_{13})zx = 0. \quad \text{(I)}$$

V případě $\varDelta = 0$, t. j. pro hyperbolický paraboloid, znamená rovnice (I) dvě roviny.**)

---

*) Dodatek ku článku p. Junga v ročníku XVIII.

**) Známo z theorie ploch 2-ho stupně; v tomto případě totiž všechny čtyři determinanty soustavy rovnic, určujících střed plochy, rovnají se nulle, tak že má plocha nesčíslné množství středů, které jsou na přímce.