Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Úlohy

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 19 (1890), No. 2, 96--103

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108825

Tak zvaného temně-červeného světla, jehož objevování se při počátku svícení považováno za nepochybné, autor při vší bedlivosti nepostřehl.

Rozklad šedého světla hranolem za příčinou slabosti jeho proveden nebyl. Spektroskopické prozkoumání jeho stalo se však použitím skleněné mřížky. Shledalo se, že první při rozžhavení tuhého tělesa objevující se světlo (a sice šedé) mělo střední délku vlny; při zvýšování intensity proudu začíná se spektrum znenáhla šířiti na obě strany, t. j. začíná se jeviti světlo s většími i menšími délkami vln, takže spektrum rozžhaveného tělesa roste při vzrůstání temperatury nikoliv v jednom směru — od červeného ku fialovému — nýbrž šíří se, vycházejíc z úzkého pásma, právě ze středu svého, rovnoměrně na obě strany.

Aby odstranil všechny pochybnosti v příčině zjevu toho, zahříval autor různé destičky (platinové, zlaté, železné a měděné) nikoliv proudem elektrickým, nýbrž zahřatým plynem, i dodělal se těchže výsledků, z čehož plyne, že pozorované zjevy jsou závislé jedině na temperatuře.

Měřením temperatury platinové destičky článkem thermickým ukázalo se, že počátek svícení leží při $t = 393^0$ (v jiných dvou případech při 391^0 a 396^0). Jelikož oko pozorovatele nalézalo se při pokusech těchto ve vzdálenosti 20 *cm* od svítícího tělesa, možno domnívati se, že počátek svícení leží ještě při nižší temperatuře.

Zkoumaje temperaturu, při které různá tělesa začínají svítiti, našel autor pro platinu 393^0, pro zlato 417^0 a pro železo 377^0.

Úlohy.

Řešení úlohy 1.

(Zaslal p. *Vincenc Vodička*, stud. VII. tř. české vyšší real. v Praze.)

Počínejme si tak, jako bychom postupným dělením hledali největší společnou míru čísel $a = 546 + x$, $b = 327 + x$. Dělíce a číslem b, obdržíme podíl 1 a zbytek 219, jehož dělitelem musí býti společná míra daná, aby úloha byla možna; zde jest v skutku $219 = 3.73$. Dělíce b číslem 219, najdeme zbytek $108 + x$;

i jest nyní stanoviti x tak, aby čísla 219, $108+x$ měla největší společnou míru 73. Bude tedy $108+x=73y$, při čemž však y nesmí býti násobkem čísla 3, nýbrž $y=3n\pm1$. Tím obdržíme

$$x=73\,(3n\pm1)-108$$

čili

$$x_1=219n-35\,,\quad x_2=219n-181\,,$$

kdež jest n libovolné kladné a celé číslo.

Při $n=1$, bude na př.

$$x_1=184,\ a=730,\ b=511;$$
$$x_2=38,\ a=584,\ b=365.$$

Řešení úlohy této podali pánové: *Arnošt Lilienfeld* a *E. Šámal* z VIII. tř. g. v Jičíně, *Václav Chmelař*, *Břetislav Tolman*, *Jan Štandera, Čeněk Hruška, Rudolf Stárek* ze VII. tř. r. a *Jan Černý* z VIII. tř. g. v Hradci Králové, *Ant. Mimra* a *Fr. Kosík* ze VII. tř. g. ve Vys. Mýtě, *Frant. Hradilík* a *Fr. Šoreys* z VIII. tř. a *Bohuslav Pavlousek* ze VII. tř. g. v Mladé Boleslavi, *Rudolf Beck*, *Jar. Friedrich* z VIII. g., *Jos. Kozelka*, *Václav Pokorný*, *Frant. Mandaus* ze VI. tř. a *Ivan Ristič* z V. tř. r., *Jan Pexider*, *Frant. Zeman*, *Emil Zikmund* a *Ed. Půlpan* z V. tř. g. vyššího r. g. na Malé Straně v Praze, *Jos. Bartoš* z VIII. tř. a *Ant. Kraus* ze VII. tř. g. v Č. Budějovicích, *Karel Rosa* ze VI. tř. g. v Novém Bydžově, *Albert Rohlík*, *Milolav Jičínský* a *Frant. Palata* z VIII. tř. gymn. v Chrudimi, *Václav Pavlík* z VIII. tř. g. v Písku, *Václav Felix* a *J. Chloupek* z VIII tř. g. v Žitné ulici v Praze a *Václav Grunt* z VIII. tř. g. v Příbrami.

Řešení úlohy 2.

(Zaslal p. *Frant. Šoreys*, stud. VIII. tř. g. v Ml. Boleslavi.

Pišme rovnici danou v podobě

$$\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\cos 2x}=2$$

čili

$$\cos 2x\,(1-2\sin x)-\sin x=0.$$

Užitím vzorce

$$\cos 2x=1-2\sin^2 x,$$

upravíme ji na tvar

$$4 \sin^3 x - 2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1 = 0$$

čili

$$(\sin x - 1)(4 \sin^2 x + 2 \sin x - 1) = 0.$$

Odtud najdeme hodnoty

$$\sin x = 1, \ \frac{\sqrt{5}-1}{4}, \ -\frac{\sqrt{5}+1}{4},$$

k nimž přísluší úhly (360° nepřesahující)

$$x_1 = 90^0, \ x_2 = 18^0, \ x_3 = 162^0,$$

$$x_4 = 234^0, \ x_5 = 306^0.$$

Správné řešení úlohy této podali pp.: *Václav Pavlík* z VIII. tř. g. v Písku, *Albert Rohlík*, *Miloslav Jičínský* a *Frant. Palata* z VIII. tř. g. v Chrudimi, *Josef Novák*, posluchač univ. v Praze, *Jan Štandera*, *Břetislav Tolmann*, *Rudolf Stárek*, *Čeněk Hruška* a *Václav Chmelař* ze VII. tř. r., *Jan Černý* a *Arnošt Porteš* z VIII. tř. g. v Hradci Králové, *Václav Felix* a *J. Chloupek* z VIII. tř. g. v Žitné ulici v Praze, *Jan Kubíček* z VIII. tř. a *Boh. A. Pavlousek* ze VII. tř. g. v Mladé Boleslavi, *Frant. Kosík* z VIII. tř. g. ve Vys. Mýtě, *Arnošt Lilienfeld* a *E. Šámal* z VIII. tř. g. v Jičíně, *Jos. Bartoš* a *Ant. Kraus* z VIII. tř. g. v Č. Budějovicích.

Řešení úlohy 3.

(Zaslal p. *Jaroslav Friedrich*, stud. VIII. tř. g. vyš. r. g. na Malé Straně v Praze.)

Obvyklý rozbor vede ku známému sestrojení: Naneseme-li na libovolnou přímku $\overline{pq} = m$ a sestrojíme-li $\sphericalangle pqx = \frac{\alpha}{2}$, jehož rameno qx protneme z bodu p délkou $\overline{pr} = \overline{ps} = a$, $rt \parallel su$ tak, aby $\sphericalangle trq = \frac{\alpha}{2}$, jsou trojúhelníky žádané rpt a spu.

Důkaz, že jsou trojúhelníky ty spolu shodny.

V $\triangle spu$ patrně $\sphericalangle pus = \alpha$, ostatní dva buďtež β, γ. I jest pak

$$\sphericalangle psr = \sphericalangle prs,$$

tedy

$$\sphericalangle psq = \sphericalangle prx.$$

Poněvadž $\sphericalangle psq = \beta + \frac{\alpha}{2}, \quad \sphericalangle prx = \sphericalangle rpt + \frac{\alpha}{2},$

jest $\sphericalangle rpt = \beta.$

Ježto

$\overline{pr} = \overline{ps}, \quad \sphericalangle ptr = \sphericalangle pus = \alpha, \quad \sphericalangle rpt = \sphericalangle psu = \beta,$

pročež $\triangle rpt \cong \triangle spu.$ *c. b. d.*

Správné řešení úlohy této zaslali pánové: *Frant. Šoreys*, *Frant. Hradilík* z VIII. tř. a *Bohuslav Pavlousek* ze VII. tř. g. v Mladé Boleslavi, *Jan Černý* z VIII. tř. g., *Břetislav Tolman, Václav Chmelař, Čeněk Hruška, Rudolf Stárek* a *Jan Štandera* ze VII. tř. a *Jan Frynta* ze VI. tř. r. v Hradci Králové, *Karel Rosa* ze VI. tř. g. v Novém Bydžově, *Rudolf Beck* z VIII. tř. g., *Josef Kozelka*, *Frant. Mandaus*, *Frant. Novotný*, *Václav Pokorný* ze VI. tř. r., *Emerich* hrabě *Thun* z V. tř. g. a *Vratislav Velc* z V. tř. r. vyšš. r. g. na Malé Straně v Praze, *E. Šámal* z VIII. tř. g. v Jičíně, *Václav Grunt* z VIII. tř. g. v Příbrami, *Václav Pavlík* z VIII. tř. g. v Písku, *Vincenc Vodička* ze VII. tř. české vyšší r. v Praze, *Václav Felix, J. Chloupek* a *Jaroslav Chládek* z VIII. tř. g. v Žitné ul. v Praze, *Ant. Mimra* ze VII. tř. g. ve Vys. Mýtě, *Albert Rohlík* z VIII. tř. g. v Chrudimi, *Jos. Bartoš* a *Ant. Kraus* ze VII. tř. g. v Č. Budějovicích, *Josef Hula*, *Adolf Vincík* a *Karel Schneider* z V. tř. r. v Rakovníku.

Řešení úlohy 4.

(Zaslal p. *Václav Felix,* stud. VIII. tř. g. v Žitné ulici v Praze.)

Předpokládejme lichoběžník rovnoramenný *abcd*, jehož úhlopříčny *ac*, *bd* na sobě kolmo stojí. Jich průsečíkem *o* veďme příčku $mn \perp ad$, kteráž seče rameno *ad* v bodě *m*, druhé pak rameno *bc* v bodě *n*. Tvrdíme, že $bn = nc$.

Otočme trojúhelník *obc* o pravý úhel kolem bodu *o* tak, aby bod *c* sjednotil se s *d*; trojúhelník nabude polohy *ob'd* a příčka *on* přijde do *on'*. Jelikož jest nyní $on' \perp om$, tedy $on' \parallel ad$ a ježto $ao = ob'$, jest též $b'n' = n'd$, pročež také $bn = nc$, jak bylo dokázati.

Obrazec potřebný k sledování důkazu laskavý čtenář sám si nakreslí.

Správné řešení úlohy této podali pp.: *J. Chloupek* a *Jaroslav Chládek* z VIII. tř. g. v Žitné ul. v Praze, *Albert Rohlík* a *Frant. Palata* z VIII. tř. g. v Chrudimi, *Karel Rosa* ze VI. tř. g. v Novém Bydžově, *Jan Černý* z VIII. tř. g., *Břetislav Tolman*, *Jan Štandera*, *Václav Chmelař*, *Čeněk Hruška*, *Rudolf Stárek* ze VII. tř. a *Jan Frynta* ze VI. tř. r. v Hradci Králové, *Frant. Šoreys*, *Frant. Hradilík* z VIII. tř. a *Boh. Pavlousek* ze VII. tř. g. v Mladé Boleslavi, *E. Šámal* z VIII. tř. g. v Jičíně, *Ant. Mimra* a *Fr. Kosík* ze VII. tř. g. ve Vys. Mýtě, *Václav Grunt* z VIII. tř. g. v Příbrami *Josef Bartoš* z VIII. tř. g. v Č. Budějovicích, *Jar. Friedrich* z VIII. tř. g., *Václav Pokorný*, *Josef Kozelka*, *Frant. Mandaus* ze VI. tř. r. vyššího r. g. na Malé Straně v Praze.

Řešení úlohy 5.

(Zaslal p. *Václav Pavlík*, stud. VIII. tř. g. v Písku.)

Z bodu a na dané kružnici vychází delší rovnoběžka ab, různoběžka $ad = c$ a úhlopříčna $ac = d$ lichoběžníka $abcd$. Spustíme-li $ce \perp ab$, bude $ce = v$ výškou a $ae = s$ střednou lichoběžníku a plocha jeho

$$p = sv.$$

Vedeme-li průměr $cf = D$ a spojíme-li a a b s bodem f, obdržíme $\triangle aec \sim \triangle fbc$ a $\triangle ebc \sim \triangle afc$, tedy

$$s : d = \sqrt{D^2 - c^2} : D \quad \text{a} \quad v : c = d : D,$$

tak že hledaný plošký obsah

$$p = \left(\frac{d}{D}\right)^2 c\sqrt{D^2 - c^2}\,.$$

Správné řešení úlohy této podali pp.: *Jan Štandera*, *Václav Chmelař*, *Břetislav Tolman*, *Rudolf Stárek*, *Čeněk Hruška* ze VII. tř. a *Jan Černý* z VIII. tř. g. v Hradci Králové, *Albert Rohlík* a *Frant. Palata* z VIII. tř. g. v Chrudimi, *Karel Rosa* ze VI. tř. g. v Novém Bydžově, *Frant. Šoreys*, *Frant. Hradilík* z VIII. tř. a *Bohuslav A. Pavlousek* ze VII. tř. g. v Mladé Boleslavi, *Ant. Mimra* a *Frant. Kosík* z VII. tř. g. ve Vys. Mýtě, *Jaroslav Friedrich* z VIII. tř. g. vyššího r. g. na Malé Straně v Praze a *Josef Bartoš* z VIII. tř. g. v Č. Budějovicích.

Řešení úlohy 6.

(Zaslal p. *Břetislav Tolman,* stud. VII. tř. r. v Hradci Králové.)

Poloměr koule buď r; výška válce jest pak $2r$ a stranu jeho označme s. Základna válce jest ellipsa, jejíž osy jsou s, $2r$, obsah ploský tedy $\frac{\pi}{2} rs$. Povrch válce rovná se dvojnásobnému povrchu koule:

$$\pi rs + 2\pi rs = 8\pi r^2,$$

z čehož plyne

$$s = \frac{8}{3} r.$$

Je-li α úhel strany se základnou, jest

$$\sin \alpha = \frac{2r}{s} = \frac{3}{4}$$

a proto

$$\alpha = 48^0\, 35'\, 25''.$$

Hledíme-li ku obsahům těchto těles, jest obsah koule K a obsah válce V vyjádřen vzorci

$$K = \frac{4}{3} \pi r^3, \quad V = \frac{\pi}{2} . r . \frac{8}{3} r . 2r = \frac{8}{3} \pi r^3,$$

pročež poměr obsahů týž jako povrchů

$$K : V = 1 : 2.$$

Správné řešení úlohy této podali pp.: *Václav Pavlík* z VIII. tř. g. v Písku, *Frant. Hradilík* z VIII. tř. g. v Mladé Boleslavi, *Václav Felix*, *J. Chloupek* z VIII. tř. g. v Žitné ulici v Praze, *Ant. Mirma* ze VII. tř. g. ve Vys. Mýtě, *Jan Štandera*, *Čeněk Hruška*, *Rudolf Stárek* a *Václav Chmelař* ze VII. tř. r. v Hradci Králové, *Vincenc Vodička* ze VII. tř. české vyšší r. v Praze, *Albert Rohlík* z VIII. tř. g. v Chrudimi, *Jos. Bartoš* z VIII. tř. g. v Č. Budějovicích a *Karel Rosa* ze VI. tř. g. v Novém Bydžově.

Řešení úlohy 7.

(Zaslal p. *Albert Rohlík,* stud. VIII. tř. g. v Chrudimi.)

K žádanému sestrojení povede nás přímo úvaha následující: Dána-li parabola

$$(1) \qquad y^2 = 2px,$$

má normála její N v bodě $m(x, y)$ rovnici

$$\eta - y = -\frac{y}{p}(\xi - x);$$

úseky normály této na osách souřadných jsou

$$a = x + p, \quad b = \frac{ay}{p}. \tag{2}$$

Vyloučíme-li p z rovnice prvé a poslední, bude

$$\frac{y}{x} = \frac{2a}{b}$$

rovnicí přímky $\overline{om}$; přímku tu snadně sestrojíme, uváživše, že kolmice počátkem o ku normále vedená tvoří s osou X úhel, jehož tangenta jest $\frac{a}{b}$. Bude tedy sestrojení bodu m toto: Veďme počátkem přímku $\overline{oa} \perp$ N, spusťme $ab \perp$ X a učiňme $ba = ac$; spojnice oc stanoví v N bod žádaný m. Protíná-li normála osu X v bodě p a sestrojíme-li ještě $mn \perp$ X, stanoví délka $\overline{np}$ parametr žádané paraboly.

Řešení úlohy této podali pp.: *Frant. Hradilík* a *Frant. Šoreys* z VIII. tř. g. v Mladé Boleslavi, *Václav Felix* a *J. Chloupek* z VIII. tř. g. v Žitné ul. v Praze, *Josef Bartoš* z VIII. tř. g. v Č. Budějovicích a *Jan Pexider* z V. tř. g. vyššího r. g. na Malé Straně v Praze.

Úloha 8.

Které jsou hodnoty kladných součinitelů a, b v rovnici

$$ax + by = 620,$$

má-li tato 10 kladných celistvých řešení, ve kterých součet všech 10ti x rovná se 455 a součet příslušných y jest 335.

Prof. A. Strnad.

Úloha 9.

Jest možným trojúhelník, jehož strany i úhly jsou v arithmetické posloupnosti?

Týž.

Úloha 10.

Bodem na rameni úhlu $\alpha = 4^0$, jehož vzdálenosť od vrcholu $a = 8\ cm$, vedena budiž příčka omezující s oběmu rameny trojúhelník rovnoramenný; koncem této vedena buď jiná příčka k ramenu prvému atd., aby povstaly rovnoramenné trojúhelníky, z nichž každé dva za sebou následující mají společné rameno. Kolik jest jich možných? Jak velká jest plocha posledního a plocha všech?

Prof. Vavřinec Jelínek.

Úloha 11.

Dán jest kolmý kruhový kužel poloměru r a výšky v. V základně jeho dána tětiva, k níž přísluší středový úhel 2α, a tětivou tou položena rovina protínající oblinu kuželovou v parabole. Jest stanoviti: *a*) obsah tohoto parabolického řezu, *b*) obsah obou částí, ve které kužel daný řezem tím se rozděluje. Kterých výsledků nabudeme při $\alpha = 60^0$?

Prof. *A. Strnad.*

Úloha 12.

Vyšetřiti geometrické místo středů všech rovnoběžníků vepsaných do čtyrúhelníka daného a majících strany rovnoběžné s úhlopříčnami jeho.

Týž.

Úloha 13.

Každá normála ellipsy protíná osy její ve dvou bodech. Které jest geom. místo průsečíků kolmic v bodech těchto ku osám?

Prof. A. Suchárda.

Úloha 14.

V realném průsečíku křivek daných rovnicemi

$$y^2 = 2px, \quad xy = q^2$$

sestrojeny tečny. Dokázati, že ploský obsah trojúhelníka omezeného těmito tečnami a osou X jest nezávislý na hodnotě parametru p.

Prof. A. Strnad.

Úloha 15.

(Z deskriptivní geometrie.)

Buďtež dány body a (— 3, 5, 0), b (— 1, 2, 0), c (3, 6, 0), e (6, 3, 0), f (— 5, 9, 5). Sestrojiti jest plochu kulovou, která dotýká se přímek $A \equiv \overline{bc}$, $B \equiv \overline{ac}$, $C \equiv \overline{ab}$, $D \equiv \overline{ef}$. Kolik jest tečných ploch kulových, jsou-li dané čtyři paprsky neomezeny?

Prof. *Vinc. Jarolímek.*
