

# Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

---

Theodor Monin

Řešení úlohy 12. v XI. ročníku tohoto časopisu

*Časopis pro pěstování matematiky a fysiky*, Vol. 17 (1888), No. 5, 231–235

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/108795>

## Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1888

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

Kdyby byla dána podmínka, aby nějaký trojúhelník  $abc$  v průmětně byl polárným vzhledem ku kontuře průmětu plochy  $P$ , což jak známo třem prostým podmínkám odpovídá, tu bychom opakující přešlou konstrukci dvakrát, obdrželi dva body jako středy promítání.

Na tomto základě bychom ustanovili střed promítání, kdyby byly v průmětně určeny sdružené průměry neb osy kontury, ovšem jen co do polohy.

Kombinováním těchto tří případů obdržíme celou řadu úkolů, které způsoby svrchu uvedenými dají se snadno řešiti. Nutno arci přihlížeti k tomu, aby počet podmínek nebyl překročen, aneb je-li překročen, aby řešení bylo možné, což se v každém případě zvlášť musí vyšetřiti.

Kdyby místo plochy byla určena křivka stupně 2-ho  $P$  a měl se stanoviti střed promítání tak, aby její průmět některé ze svrchu uvedených podmínek vyhovoval, tu bychom postupovali týměž způsobem jako při ploše. Příslušná modifikace řešení jest tak jednoduchá, že netřeba se o ní šířiti.

---

## Řešení úlohy 12. v XI. ročníku tohoto časopisu.

Podává

**Theodor Monin,**

asistent při o. k. české vysoké škole technické v Praze.

V rovinné čáře zvolme dva body  $A$  a  $B$ , v bodu  $A$  sestrojme normálu a protněme ji v bodu  $C$  přímkou  $BC$  kolmou k těživě  $AB$ . Blíží-li se bod  $B$  bodu  $A$ , jaké mezi se blíží průsečík  $C$ ?

Buďte dále  $A$  a  $B$  dva body na čáře prostorové a buď  $C$  průsečík hlavní normály bodu  $A$  s rovinou vedenou bodem  $B$  kolmo ku těživě  $AB$ , kde jest limita bodu  $C$  pro případ, že  $B$  se blíží bodu  $A$ ?

Buď dána libovolná plocha a na ní body  $A$  a  $B$ . Necht opět  $C$  značí průsečík normály v bodu  $A$  s rovinou vedenou bodem  $B$  kolmo ku  $AB$ . Blíží-li se  $B$  opět bodu  $A$ , v jakých mezích jest limita průsečíku  $C$ ? (W.)

Křivka kruhová  $K'$ , opsaná trojúhelníku  $ABC$ , dotýká se v bodu  $A$  původní křivky  $K$ , při čemž jsou body  $A$  a  $C$  v křivce  $K'$  diametrálně protilehlými. Tento vztah potrvá i tehdy, když bod  $B$  bude ku  $A$  nekonečně blízký, to jest, když  $K'$  bude v bodu  $A$  oskulovati křivku  $K$ . Dle toho bude vzdálenost bodu  $C'$ , který je limitou bodu  $C$ , od bodu  $A$  rovna dvěma příslušným poloměrům křivosti křivky  $K$ .

Když jest  $K$  křivkou prostorovou, platí výsledek tentýž.  $K$  důkazu použijeme však plochy kulové  $L$ , jejížto střed se nalezá na hlavní normále a která obsahuje body  $A$  a  $B$ , dotýkajíc se v bodu  $A$  křivky  $K$ . Tu jest zřejmo, že na této ploše bude se také nalezati bod  $C$ , jsa diametrálně protilehlý ku bodu  $A$ .

To bude platiti ovšem i pro mezní polohu bodu  $B$ , při čemž plocha kulová  $L$  bude míti v bodu  $A$  s křivkou  $K$  dotyk trojbodový, protínajíc příslušnou rovinu oskulační v křivce kruhové křivosti. Tím jest tento případ na předešlý převeden.

Abychom konečně ustanovili mezní polohy bodu  $C$  v případě posledním, myslíme si bodem  $A$  zcela libovolný normální pronik. Bod  $C'$ , který je limitou bodu  $C$  pro tento pronik, bude se nalezati na normále ve vzdálenosti  $AC'$ , rovnající se dvojnásobnému poloměru křivosti, který v bodu  $A$  tomuto proniku přísluší. Poněvadž se pak středy křivosti všech normálních proniků nalezají na úsečce, omezené oběma hlavními středy křivosti plochy v bodu  $A$ , budou se mezní polohy bodu  $C$  nalezati na normále ve dvakrát tak velkých vzdálenostech od bodu  $A$ , jako jsou hlavní poloměry křivosti.

---

## Drobné zprávy.

Podává

**Matyáš Lerch,**

docent při české vysoké škole technické v Praze.

1. Ve svém článku „*O jistém integrálu omezeném*“, uveřejněném ve Zprávách o zas. král. čes. spol. nauk z r. 1886, zabýval jsem se integrálem

$$\int_0^{\infty} e^{-\pi z^2} z^{s-1} \cos 2\pi v z dz = \frac{1}{2} \psi(s|v),$$

kde  $v$  je libovolné, a  $s$  má reálnou část kladnou, a dospěl jsem k tomu výsledku, že lze jej vyjádřiti tvarem

$$(1) \quad \psi(s|v) = \pi^{-\frac{1}{2}s} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) C(s|v),$$

kde  $\Gamma$  značí známý Eulerův integrál, a kde  $C(s|v)$  hová rovnici

$$(2) \quad C(s|v) = C(1-s|v\tau) e^{-\pi v^2},$$

při čemž  $C(s|v)$  je celistvá funkce transcendentní obou proměnných  $s, v$  daná řadou

$$(3) \quad C(s|v) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{\frac{s}{2}}{n} \frac{(4\pi v^2)^n}{(2n)!},$$

kde  $\binom{\frac{s}{2}}{n} = \frac{s}{2} \cdot \left(\frac{s}{2} + 1\right) \left(\frac{s}{2} + 2\right) \dots \left(\frac{s}{2} + n - 1\right), \binom{\frac{s}{2}}{0} = 1.$

Funkce tato jest ovšem pouze zvláštním případem obecnější jedné řady *Kummerovy*, o níž platí vztah podobný rovnici (2). Ale jednak je tento zvláštní případ svou podobností s integrálem Eulerovým zajímavým a jednak bylo radno uveřejniti právě *způsob*, jímž v řečeném pojednání odvodil jsem rovnici (2), vycházející z relace Cauchy-Poissonovské vyjadřující lineární transformací eliptické transcendenty  $\vartheta_3(u|\tau)$ , kdežto *Kummer* byl ke svému obecnějšímu vztahu veden teorií řady hypergeometrické. V této poznámce upozorňuji na důležitost vztahu (2), který umožňuje v mnohých případech stanoviti hodnotu našeho integrálu  $\psi$ .

Z rovnice (3) je patrné, že  $C(s|v)$  je celistvou racionální sudou funkcí  $v$  stupně  $2k$ , je-li  $s = -2k$ , a v tomto případě bude dle (1) integrál  $\psi$  tvaru

$$\pi^{-\frac{1}{2}s} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right). \text{ Cel. funkce } (v).$$

Je-li pak  $s$  tvaru  $2k + 1$ , ( $k$  celistvé  $\geq 0$ ), bude  $1 - s$  tvaru  $-2k$  a tedy bude dle (2) integrál opět stanovitelný a sice

$$\pi^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) e^{-\pi v^2}. \text{ Cel. funkce } (v).$$

V jednom z příštích zasedání předložiti hodlám král. čes. spol. nauk pojednání, které jedná o tomto integrálu z jiného stanoviska a obsahuje více jeho zajímavých vlastností.

2. Ačkoli po Weierstrassovi podána byla celá řada příkladů funkcí spojitých, které nemají funkce odvozené (derivace)

(které otráslý základy starého počtu differenciálního), přec poskytuje jich studium začátečníku jisté obtíže, jež není vždy snadno překonati. Kdo by se o jednoduchých v té věci příkladech přesvědčiti chtěl, toho odkazují na své francouzské pojednání „Contributions à la théorie des fonctions“ uveřejněné ve Zprávách o zas. král. čes. spol. nauk z roku 1886, kde methodou naprosto elementárnou dokázáno, že funkce

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos 2^n \pi x}{2^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n! \pi x}{n!}$$

nemají derivace v místech, jichž je v každém intervallu nekonečně mnoho, která jsou tedy všehustě rozložena po celém oboru reálné proměnné  $x$ .

3. Geometrům je známo, jakou roli hrají v aplikacích příbuznosti zvané involucemi vyšších řádů, jichž theorii zbudovali pp. *Emil Weyr* a *Charles Le Paige*.

Ve svém článku „Bestimmung der Anzahl merkwürdiger Gruppen einer allgemeinen Involution  $n$ -ter Ordnung  $k$ -ter Stufe“ otištěném ve Zprávách král. čes. spol. nauk z r. 1885 ukázal jsem, že má t. zv. obecná involuce stupně  $n$  a řádu  $k$  celkem

$$\varphi! \binom{n-k}{\varphi} s_1 s_2 \dots s_{\varphi-1} s_{\varphi}$$

skupin, v nichž splývá  $s_1$  prvků v jeden,  $s_2$  prvků v druhý atd. až  $s_{\varphi}$  prvků v  $\varphi$ -tý vícenásobný prvek, při čemž

$$s_1 + s_2 + \dots + s_{\varphi} = k + \varphi \leq n.$$

Případy zvláštní, kde  $s_1 = s_2 = \dots = s_{\varphi} = 2$ ,  $\varphi = k$  a pak  $\varphi = 1$ ,  $s_1 = k + 1$ , byly před tím vyšetřeny *Em. Weyrem*, poslédní také *C. Le Paige-em*. Nový důkaz této věty podal pan *Jacques Deruyts* ve zprávách Belgické Akademie věd z r. 1887. (*Bulletin de l'Académie royale de Belgique*, 3<sup>me</sup> série, t. XIV, n<sup>o</sup> 8).

4. V *Mémoires de l'Acad. roy. des Sciences, des Lettres et de Beaux-Arts de Belgique*, t. XLV, 1884 uvádí p. *Catalan* str. 52. svého pojednání o řetězcích a řadách větu, že výraz

$$\frac{1 + q^{2n-1}}{(1+q)q^{n-1}}$$

kdě  $q$  značí jeden z kořenů rovnice  $t^2 - at + 1 = 0$ , je číslo

celistvé, jakmile jest  $a$  číslem celistvým. Tato věta je bezprostředně patrna. Předně je jasno, že jest onen výraz racionální funkcí proměnné  $a$ , poněvadž se nemění, přejde-li  $q$  v  $\frac{1}{q}$ , t. j. vymění-li se kořeny rovnice řečené; za druhé je zlomek

$$\frac{1 + q^{2n-1}}{1 + q}$$

roven polynomu  $1 - q + q^2 - \dots \pm q^{2n}$ , a pak  $\frac{1}{q^{n-1}} = (a - q)^{n-1}$ , tak že náš výraz lze vyjádřiti jakožto celistvou funkcí  $a$ ,  $q$ . Je tedy celistvým číslem algebraickým a zároveň racionálním, tedy číslem celistvým v obyčejném toho slova smyslu, je-li  $a$  číslo celistvé.

## Úlohy.

### Druhé řešení úlohy 12.

Pan V. Jeřábek, professor v Brně, který úkol ten proponoval, zaslal jednoduché řešení toto:

Tečna kruhu v bodu O necht' protíná tečny AM, BN v bodech P, R. I jest  $AP = OP$ , a poněvadž

$$\sphericalangle MQP = OAB = OMP, \text{ též } MP = OP,$$

pročež  $AP = PM$ ,  
a podobně  $BR = RN$ .

Je-li C středem kruhu daného a Q středem úsečky MN, pak příčky CQ, PR, které středy protilehlých stran lichoběžníka ABNM spojují, půlí se na vzájem v bodu S. Poněvadž S a Q jsou dle stálého středu C a poměru  $\frac{CS}{CQ} = \frac{1}{2}$  podobně položeny, jest geom. místem bodu Q přímka jdoucí rovnoběžně s tečnou OP ve vzdálenosti rovné poloměru CO.

### Řešení úlohy 13.

(Zaslal p. Otakar Havelka, stud. VIII. tř. v Ném. Brodě.)

Poněvadž  $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$ , bude

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{5} + \frac{z}{7} = \frac{349}{105}$$