Časopis pro pěstování matematiky

Václav Havel; Ivan Studnička

Bemerkung über gemeinsame Beziehung zwischen kartesischen Gruppen und kartesischen Zahlensystemen

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 103 (1978), No. 4, 384--390

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108789`

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1978

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* `http://project.dml.cz`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 103 (1978), Praha

BEMERKUNG ÜBER GEMEINSAME BEZIEHUNG ZWISCHEN KARTESISCHEN GRUPPEN UND KARTESISCHEN ZAHLENSYSTEMEN

VÁCLAV HAVEL und IVAN STUDNIČKA, Brno

(Eingegangen am 6. Januar 1977)

Das kartesische Zahlensystem wurde von R. BAER im Jahr 1942 eingeführt ([1], S. 145), während die kartesische Gruppe von G. PICKERT im Jahr 1952 ([4], S. 335). Zu dem Zusammenhang zwischen diesen beiden Begriffen hat sich schon im Jahr 1954 L. LOMBARDO-RADICE ([3], S. 133–134) geäußert, aber nur in Richtung zu seinen „Refraktionsebenen".

Im vorliegenden Artikel ordnen wir jeder vertikal-transitiven Ebene Π mit einem Bezugssystem $\mathfrak{B}$ schon eindeutig eine kartesische Gruppe $\mathbf{CG}_{\Pi,\mathfrak{B}}$ und zugleich ein kartesisches Zahlensystem $\mathbf{CNS}_{\Pi,\mathfrak{B}}$ zu, klären den beiderseitigen Zusammenhang (Behauptung 1) und schließen einige Folgerungen (Behauptungen 2, 3, 4). Dabei kann man die Frage stellen, ob eine kartesische Gruppe existiert, die mit dem angeschlossenen kartesischen Zahlensystem zusammenfällt und entweder keine Distributivität erfüllt oder aus beiden Distributivitäten genau die linke Distributivität erfüllt. Es ist nicht schwierig Beispiele von solchen kartesischen Gruppen zu konstruieren (§ 3).

1. Es sei eine projektive Ebene gegeben mit einer ausgezeichneten Geraden g_∞ und einem ausgezeichneten Punkt X_∞ auf g_∞.[1]) Ist diese Ebene (X_∞, g_∞) – transitiv im Sinne von [1], S. 140, dann werden wir für sie die Benennung *vertikal-transitiv* gebrauchen.

Für ein *Bezugssystem* einer solchen vertikal-transitiven Ebene erklären wir jedes geordnete Quadrupel $(0, X_\infty, Y_\infty, E)$ von Punkten in allgemeiner Lage und mit $X_\infty Y_\infty = g_\infty$ und setzen $Z_\infty := 0E \sqcap g_\infty$, $\hat{Z}_\infty := ((EX_\infty \sqcap 0Y_\infty)(EY_\infty \sqcap 0X_\infty)) \sqcap \sqcap g_\infty$. Im weiteren untersuchen wir eine vertikal-transitive Ebene Π mit einem Bezugssystem $\mathfrak{B} = (0, X_\infty, Y_\infty, E)$. Setzen wir $\mathcal{M} := 0Y_\infty \setminus \{Y_\infty\}$ und führen binäre Operationen $+, \oplus, ., \odot$ auf $\mathcal{M}$ folgendermaßen ein (Abb. 1–4):

[1]) Im weiteren bezeichnen wir mit AB die Gerade durch Punkte $A \neq B$ und mit $a \sqcap b$ den Schnittpunkt der Geraden $a \neq b$. Die Geraden fassen wir als Punktmengen auf.

$$(1)\quad a + b := 0Y_\infty \sqcap ((aX_\infty \sqcap 0Z_\infty)\, Y_\infty \sqcap bZ_\infty)\, X_\infty \qquad \forall a, b \in \mathscr{M},$$

$$(2_1)\quad \ominus a := 0Y_\infty \sqcap ((a\hat{Z}_\infty \sqcap 0X_\infty)\, Y_\infty \sqcap 0\hat{Z}_\infty)\, X_\infty \qquad \forall a \in \mathscr{M},$$

$$(2_2)\quad (\ominus a) \oplus b := 0Y_\infty \sqcap ((a\hat{Z}_\infty \sqcap 0X_\infty)\, Y_\infty \sqcap 0\hat{Z}_\infty)\, X_\infty \qquad \forall a, b \in \mathscr{M},$$

$$(3)\quad a \,.\, b := 0Y_\infty \sqcap X_\infty((aX_\infty \sqcap 0Z_\infty)\, Y_\infty \sqcap 0(bX_\infty \sqcap EY_\infty) \qquad \forall a, b \in \mathscr{M},$$

$$(4)\quad a \odot b := 0Y_\infty \sqcap X_\infty((a\hat{Z}_\infty \sqcap 0X_\infty)\, Y_\infty \sqcap 0(bX_\infty \sqcap EY_\infty) \qquad \forall a, b \in \mathscr{M}.$$

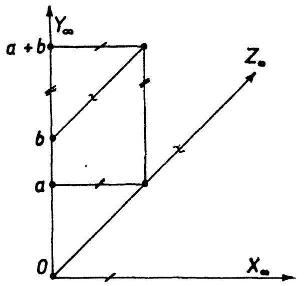

Abb. 1.

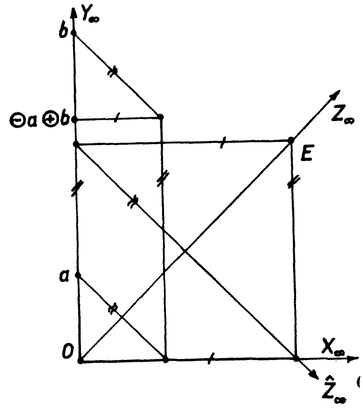

Abb. 2.

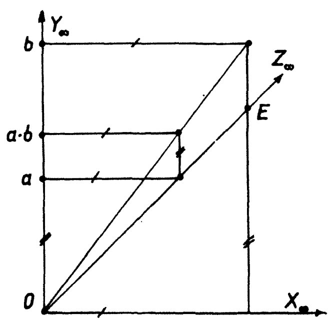

Abb. 3.

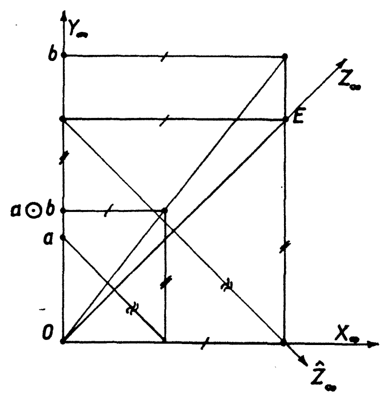

Abb. 4.

Daraus folgt, daß $(\mathscr{M}, +, 0)$, $(\mathscr{M}, \oplus, 0)$ Gruppen mit neutralem Element 0 sind, daß für jedes $x \in \mathscr{M}$ die Beziehungen $0 = x \,.\, 0 = 0 \,.\, x = x \odot 0 = 0 \odot x$, $x = 1 \,.\, x = x \,.\, 1$, $x = 1 \odot x$, $\ominus x = x \odot (\ominus 1)$ gelten und daß

$$(5)\qquad \#\{x \in \mathscr{M} \mid x \,.\, a = x \,.\, b + c\} = \#\{x \in \mathscr{M} \mid c + b \,.\, x = a \,.\, x\} = 1$$

für jedes $a, b, c \in \mathscr{M}$ mit $a \neq b$, und

$$\#\{x \in \mathscr{M} \mid x \odot a = x \odot b \oplus c\} = \#\{x \in \mathscr{M} \mid c \oplus b \odot y = a \odot y\} = 1$$

für jedes $a, b, c \in \mathscr{M}$ mit $a \neq b$ gilt.

Damit sind die nachstehenden Definitionen motiviert. Ein geordnetes Quadrupel $(\mathscr{M}, +, ., 0)$ heißt *verallgemeinerte kartesische Gruppe*, falls $\mathscr{M}$ eine wenigstens zweielementige Menge ist, wobei $(\mathscr{M}, +, 0)$ eine Gruppe bildet, $x . 0 = 0 . x = 0$ für jedes $x \in \mathscr{M}$ gilt und die Bedingung (5) erfüllt ist. Wenn überdies ein ausgezeichnetes Element $1 \in \mathscr{M}$ existiert mit $x . 1 = 1 . x = x$ für jedes $x \in \mathscr{M}$, bzw. mit $-(x . (-1)) = 1 . x = x$ für jedes $x \in \mathscr{M}$, so heißt $(\mathscr{M}, +, ., 0)$ eine *kartesische Gruppe*, bzw. ein *kartesisches Zahlensystem*.

Wir können nun die obigen Betrachtungen kürzer fassen: Die gegebene vertikaltransitive Ebene Π mit ihrem Bezugssystem $\mathfrak{B}$ bestimmt eindeutig eine kartesische Gruppe $\mathbf{CG}_{\Pi,\mathfrak{B}}$ und ein kartesisches Zahlensystem $\mathbf{CNS}_{\Pi,\mathfrak{B}}$. Umgekehrt ist jede kartesische Gruppe, bzw. jedes kartesische Zahlensystem isomorph[2]) mit der kartesischen Gruppe $\mathbf{CG}_{\Pi,\mathfrak{B}}$ bezüglich einer geeigneten vertikal-transitiven Ebene Π mit einem geeigneten Bezugssystem $\mathfrak{B}$, bzw. mit dem kartesischen Zahlensystem $\mathbf{CNS}_{\Pi,\mathfrak{B}}$ bezüglich einer geeigneten vertikal-transitiven Ebene Π mit einem geeigneten Bezugssystem $\mathfrak{B}$. Diese wohlbekannte Tatsache lassen wir hier ohne Beweis.

2. Es sei Π eine vertikal-transitive Ebene und $\mathfrak{B} = (0, X_\infty, Y_\infty, E)$ ihr Bezugssystem. Wir bezeichen wie oben $\mathbf{CG}_{\Pi,\mathfrak{B}} = (\mathscr{M}, +, ., 0, 1)$ und $\mathbf{CNS}_{\Pi,\mathfrak{B}} = (\mathscr{M}, \oplus, \odot, 0, 1)$. Wir setzen $a . b = c \Leftrightarrow a =: c/b$ und $a \odot b = c \Leftrightarrow a =: c//b$.

Behauptung 1. *Für die binaren Operationen* $+, ., \oplus, \odot$ *gelten die Beziehungen*

(i) $+ = \oplus$,

(ii) $(-a/-1) . b = a \odot b \quad \forall a, b \in \mathscr{M}$,

(iii) $(c//1) \odot d = c . d \quad \forall c, d \in \mathscr{M}$.

Behauptung 2. *Die binaren Operationen* $.,\ \odot$ *fallen zusammen, wenn und nur wenn*

(iv) $a . (-1) = -a \quad \forall a \in \mathscr{M}$,

bzw. wenn und nur wenn

(v) $a \odot 1 = a \quad \forall a \in \mathscr{M}$.

ist.

Behauptung 3. $\mathbf{CG}_{\Pi,\mathfrak{B}}$ *erfüllt die linke, bzw. rechte Distributivität*[3]), *wenn und nur wenn* $\mathbf{CNS}_{\Pi,\mathfrak{B}}$ *die linke, bzw. die rechte Distributivität erfüllt.*

---

[2]) Gemeint ist der übliche Isomorphismus der algebraischen Systeme mit derselben Signatur.

[3]) Wir gebrauchen hier die Unterscheidung der beiden Distributivitäten nach G. Pickert (Addition bevorzugt die Multiplikation).

Behauptung 4. *Die Assoziativität für . ist genau dann der Assoziativität für $\odot$ äquivalent, wenn die Operationen . , $\odot$ zusammenfallen.*

B e w e i s der Behauptung 1. Es seien a, b beliebige Elemente der Menge $\mathscr{M} \setminus \{0\}$. Dann gilt $(\ominus a) \oplus b = (-a) + b$ genau dann, wenn für die Punkte B', C' $B'X_\infty = C'X_\infty$ gilt. (B' und C' werden so konstruiert, daß für $A = a$, $A' = b$ zuerst $B := 0X_\infty \sqcap AZ_\infty$, $C := 0X_\infty \sqcap A\hat{Z}_\infty$ gefunden wird und dann $B' := A'Z_\infty \sqcap BY_\infty$, $C' := A'\hat{Z}_\infty \sqcap CY_\infty$.) Die Geltung von $B'X_\infty = C'X_\infty$ ist aber eine Folge des

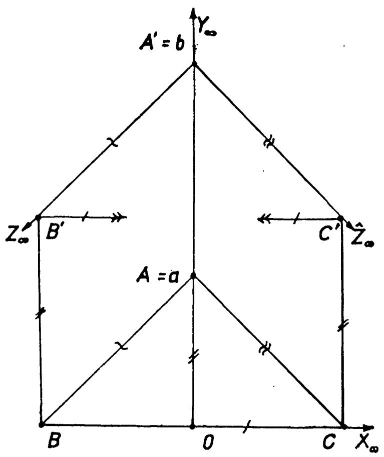

Abb. 5.

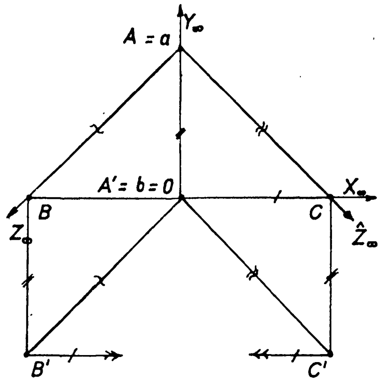

Abb. 6.

Desarguesschen Satzes (mit Zentrum Y_∞ und Achse g_∞), angewendet auf die Punkte A, B, C, A', B', C' (Abb. 5). Insbesondere für $b = 0$ bekommt man $\ominus a = -a$, so daß das Zusammenfallen von . und $\odot$ daher folgt (Abb. 6). Die Gerade $(EX_\infty \sqcap 0Y_\infty)(EY_\infty \sqcap 0X_\infty)$, bzw. aZ_∞, hat bezüglich $\mathbf{CG}_{\Pi,\mathfrak{B}}$ die Gleichung $y = x \,.\, (-1) + 1$, bzw. $y = x \,.\, (-1) + a$, so daß $(-a/-1) \,.\, b \in ((a\hat{Z}_\infty \sqcap 0X_\infty)\, Y_\infty \sqcap 0(bX_\infty \sqcap EY_\infty))\, X_\infty$ ist. Daraus folgt $(-a/-1) \,.\, b = a \odot b$ für jedes $a, b \in \mathscr{M}$. Setzen wir $-a/-1 = c$, dann ist $c \,.\, b = a \odot b$, während (ii) ergibt $(-a/-1) \,.\, 1 = a \odot 1$, d. h. $a = c//1$, und folglich $c \,.\, b = (c//1) \odot b$. ∎

Behauptung 2 ist eine unmittelbare Folge der Behauptung 1.

B e w e i s der Behauptung 3. Angenommen es gilt die linke Distributivität

$$\text{(A)} \qquad (a + b) \,.\, c = a \,.\, c + b \,.\, c \quad \forall a, b, c \in \mathscr{M} \,.$$

Es soll die linke Distributivität

$$\text{(B)} \qquad (a + b) \odot c = a \odot c + b \odot c \quad \forall a, b, c \in \mathscr{M}$$

hergeleitet werden.

Für jedes $a, b, c \in \mathscr{M}$ ist $a \odot c + b \odot c = (-a/-1) . c + (-b/-1) . c = ((-a/-1) + (-b/-1)) . c$ und weiter auch $(a + b) \odot c = (-(a + b)/-1) . c$. Für jedes $a, b, u, v \in \mathscr{M}$ ist die Summe von $-a = u . (-1)$, $-b = v . (-1)$ gleich $u . (-1) + v . (-1) = (u + v) . (-1)$, so daß also $u + v = (-a - b)/-1$. Nachdem aber (A) die Komutativität der Addition $+$ zur Folge hat (vgl. z. B. [4], S. 336), ist auch $-a - b = -(a + b)$ für jedes $a, b \in \mathscr{M}$. Daraus folgt schon (B).

Im weiteren setzen wir (B) voraus und wollen (A) herleiten. Erstens ist für jedes $a, b, c \in \mathscr{M}$ $a . c + b . c = (a//1) \odot c + (b//1) \odot c = (a//1 + b//1) \odot c$ und zweitens $(a + b) . c = ((a + b)//1) \odot c$. Für jedes $a, b, u, v \in \mathscr{M}$ ist die Summe von $a = u \odot 1$, $b = v \odot 1$ gleich $u \odot 1 + v \odot 1 = (u + v) \odot 1$, so daß also $u + v = (a + b)//1$ und daraus folgt schon (A).

Es gelte nun die rechte Distributivität

$$\text{(C)} \qquad a . (b + c) = a . b + a . c \quad \forall a, b, c \in \mathscr{M} .$$

Wir wollen die restliche rechte Distributivität

$$\text{(D)} \qquad a \odot (b + c) = a \odot b + a \odot c \quad \forall a, b, c \in \mathscr{M}$$

herleiten: Die linke Seite von (D) ist gleich $(-a/-1) . b + (-a/-1) . c = (-a/-1) . . (b + c)$ und die rechte Seite ist gleich $(-a/-1) . b + (-a/-1) . c = (-a/-1) . . (b + c)$. Damit ist (D) erfüllt.

Falls (D) gilt, dann ist $a \odot (b + c) = (a//1) . (b + c)$ und $a . b + a . c = (a//1) \odot b + (a//1) \odot c = (a//1) . (b + c)$, womit ist (C) erfüllt.

Beweis der Behauptung 4. Für $a, b, c \in \mathscr{M}$ gelte $(a \odot b) \odot c = a \odot (b \odot c)$. Nach (ii) ist dann $(-(-a/-1) . b/-1) . c = (-a/-1) . ((-b/-1) . c)$ und für $u = -a/-1$, $v = -b/-1$, $w = -(u . b)/-1$ also $w . c = u . (v . c)$. Zur Geltung von $(u . v) . c = u . (v . c)$ ist also notwendig sowie auch hinreichend, daß $w = u . v$ oder auch $-(u . b) = (u . v) . (-1)$ gilt. Für $v = 1$ folgt daraus $b = 1$ und $-u = u . (-1)$, so daß dann $. = \odot$.

Für $a, b, c \in \mathscr{M}$ gelte nun $(a . b) . c = a . (b . c)$. Dann folgt nach (iii) auch $(((a//1) \odot b)//1) \odot c = (a//1) \odot ((b//1) \odot c)$ und für $u = a//1$, $v = b//1$ und $w = (u \odot b)//1$ ist also $w \odot c = u \odot (v \odot c)$. Zur Geltung von $(u \odot v) \odot c = u \odot (v \odot c)$ ist also notwendig und hinreichend, daß $w = u \odot v$ oder auch $u \odot b = (u \odot v) \odot 1$ ist. Für $v = 1$ folgt daraus $b = 1$ und weiter $u \odot 1 = (u \odot 1) \odot 1$, woraus sich schon (v) und $. = \odot$ ergibt. ∎

3. Es sei $(\mathscr{R}, +, ., 0, 1)$ der Körper der reellen Zahlen. Wir nehmen eine auf $\{x \in \mathscr{R} \mid x \leqq 0\}$ von $-\infty$ zu 0 stetige monotone reelle Funktion f und definieren die Multiplikation $._f$ auf $\mathscr{R}$, so daß $a ._f b := f(a) . b$, falls $a, b < 0$ und $a ._f b := a . b$ in allen übrigen Fällen ist. Nach [3], S. 136–137, ist $(\mathscr{R}, +, ._f, 0, 1)$ eine kartesische Gruppe mit $x ._f (-1) = -f(x)$ für jedes $x \leqq 0$. Ist $f \neq \mathrm{id}_{\{x \in \mathscr{R} \mid x \leqq 0\}}$, so gibt es $x_0 < 0$, so daß $x_0 \cdot_f(-1) \neq x_0$. Daher ist $(\mathscr{R}, +, \cdot_f, 0, 1)$ kein kartesisches Zahlensystem.

Es ensteht die Frage nach der Existenz einer kartesischen Gruppe, die zugleich ein kartesisches Zahlensystem ist und wenigstens eine Distributivität nicht erfüllt. M. HALL fand schon in seiner grundlegenden Arbeit [2] (in Appendix, S. 273–276) Linksquasikörper R, S, T, U (in seiner Bezeichnung) der Ordnung 9, von denen keiner die linke Distributivität erfüllt; R hat assoziative Multiplikation und S, T, U nicht; das Element -1 liegt bei R, S, T im Zentrum, bei U aber nicht, so daß R, S, T zugleich kartesische Zahlensysteme sind, während U nicht diese Eigenschaft hat. Somit hat man also ein Beispiel der kartesischen Gruppe, wo die linke Distributivität verletzt ist.

Wir kehren nun zu dem Körper $(\mathscr{R}, +, ., 0, 1)$ der reelen Zahlen zurück. Definiert man weiter eine neue Multiplikation $*_f$ auf $\mathscr{R}$ mittels $a *_f b := b \cdot_f a$ für jedes $a, b \in \mathscr{R}$, wobei die obige Funktion f so gewählt ist, daß $f(-1) = -1, f \neq \mathrm{id}_{\{x \in \mathscr{R} | x \leqq 0\}}$, so sind in der kartesischen Gruppe $(\mathscr{R}, +, *_f, 0, 1)$ beide Distributivitäten, sowie auch die multiplikative Assoziativität verletzt, jedoch gilt $x *_f(-1) = -x$ für jedes $x \in \mathscr{R}$.

Zuletzt wollen wir ein Beispiel der kartesischen Gruppe angeben mit kommutativer Multiplikation, aber mit verletzter Distributivität. Wir nehmen den Körper der rationalen Zahlen $(\mathscr{Q}, +, ., 0, 1)$ und wandeln die Multiplikation . in eine neue Multiplikation $\odot$ wie folgt um: Wir setzen $\mathscr{Q}' := \{p/q \mid p$ ist eine ungerade ganze Zahl; q eine nichtverschwindende ganze Zahl; p, q teilerfremd$\}$, $\alpha_x = 2$ für jedes $x \in \mathscr{Q} \setminus \mathscr{Q}'$, $\alpha_x = 0$ für jedes $x \in \mathscr{Q}'$ und $a \odot b = a \,.\, b \,.\, (1 + \alpha_a \,.\, \alpha_b)$ für jedes $a, b \in \mathscr{Q}$. Offensichtlich ist $\odot$ kommutativ. Wegen $2 \odot (4 + 1) \neq 2 \odot 4 + 2 \odot 1$ ist die Distributivität verletzt. Die Gültigkeit von $\#\{x \in \mathscr{Q} \mid x \odot a = x \odot b + c\} = 1$ für jedes $a, b, c \in \mathscr{Q}$ mit $a \neq b$ prüfen wir folgendermaßen nach. Es ist $x \odot a - x \odot b = x \,.\, a \,.\, (1 + \alpha_x \,.\, \alpha_a) - x \,.\, b \,.\, (1 + \alpha_x \,.\, \alpha_b)$, so daß die Gleichung $x \odot a = x \odot b + c$ als $x \,.\, (a - b + \alpha_x \,.\, (a \,.\, \alpha_a - b \,.\, \alpha_\beta)) = c$ überschrieben werden kann. Diese Gleichung lautet für $x \in \mathscr{Q}'$: (*) $x \,.\, (a - b) = c$ und für $x \in \mathscr{Q} \setminus \mathscr{Q}'$: (**) $x \,.\, (a - b + 2 \,.\, (a \,.\, \alpha_a - b \,.\, \alpha_b)) = c$. Es seien nun a, b, c drei vorgegebene Elemente aus $\mathscr{Q}$, wobei $a \neq b$. Ist erstens $c = 0$, dann ist 0 die einzige Lösung in $\mathscr{Q}'$ der Gleichung (*) und im Fall $a - b + 2 \,.\, (a \,.\, \alpha_a - b \,.\, \alpha_b) \neq 0$ gibt es keine Lösung der Gleichung (**) in $\mathscr{Q} \setminus \mathscr{Q}'$.

Bemerken wir, daß für $a - b \in \mathscr{Q}'$, bzw. $\in \mathscr{Q} / \mathscr{Q}'$ auch $a - b + 2 \,.\, (a \,.\, \alpha_a - b \,.\, \alpha_b) \in \mathscr{Q}'$, bzw. $\in \mathscr{Q} \setminus \mathscr{Q}'$ ist. Daraus folgt, daß der Fall $c = 0$, $a - b + 2 \,.\, (a \,.\, \alpha_a - b \,.\, \alpha_b) = 0$ nicht möglich ist, weil aus der zweiten Gleichung einerseits $a - b \in \mathscr{Q}' \setminus \{0\}$, anderseits aber auch $a - b = -2 \,.\, (a \,.\, \alpha_a - b \,.\, \alpha_b) \in \mathscr{Q} \setminus \mathscr{Q}'$ folgt, was einen Widerspruch liefert. Zweitens setzen wir nun $c \neq 0$ voraus, so daß die Gleichung (*) höchstens eine Lösung in $\mathscr{Q}'$ und die Gleichung (**) höchstens eine Lösung in $\mathscr{Q} \setminus \mathscr{Q}'$ hat. Weil aber $a - b$ und $a - b + 2 \,.\, (a \,.\, \alpha_a - b \,.\, \alpha_b)$ zugleich zu $\mathscr{Q}'$ oder zugleich zu $\mathscr{Q} \setminus \mathscr{Q}'$ gehören, hat entweder die Gleichung (*) eine Lösung in $\mathscr{Q}'$ und die Gleichung (**) keine Lösung in $\mathscr{Q} \setminus \mathscr{Q}'$ oder die Gleichung (*) keine Lösung in $\mathscr{Q}'$ und die Gleichung (**) eine Lösung in $\mathscr{Q} \setminus \mathscr{Q}'$.

Literaturverzeichnis

[1] *R. Baer:* Homogeneity of projective planes, Amer. Journ. Math. *64* (1942), 137—152.
[2] *M. Hall:* Projective planes, Trans. Amer. Math. Soc. *54* (1943), 229—277.
[3] *L. Lombardo-Radice:* I piani di rifrazione, Rend. Mat. Appl. *13* (1954), 130—142.
[4] *G. Pickert:* Nichtkommutative cartesische Gruppen, Arch. d. Math. *3* (1952), 335—342.

Anschrift der Verfasser: 602 00 Brno, Hilleho 6 (Vysoké učení technické).