Časopis pro pěstování matematiky

Hana Čermáková

Über einige spezielle Systeme der dreidimensionalen Räume im projektiven Raum P_7

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 113 (1988), No. 3, 232--245

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108787`

ÜBER EINIGE SPEZIELLE SYSTEME DER DREIDIMENSIONALEN RÄUME IM PROJEKTIVEN RAUM P_7

HANA ČERMÁKOVÁ, Brno

(Eingegangen am 29. Oktober 1985)

Summary. Die Pseudokongruenz im projektiven Raum ist die Grassmansche Mannigfaltigkeit $G_r(n-1, 2n-1, n)$. Das ist das n-parametrige System von $(n-1)$-Ebenen im $(2n-1)$-dimensionalen Raum. Für $n = 2$ bekommt man die Geradenkongruenz im Raume P_3. Aus der Literatur über Geradenkongruenzen werden in dieser Abhandlung die Ergebnisse von [1], [2], [6], [7] benützt. Man betrachtet den Fall $n = 4$. Die Charakteristik von $G_r(3, 7, 4)$ besteht aus Flächen vierter Ordnung. Man setzt voraus, daß auf diesen Flächen die Geraden liegen, oder daß diese Flächen singuläre Punkte haben. Es werden solche Mannigfaltigkeiten untersucht, ihre geometrischen Eigenschaften gefunden und Fragen ihrer Existenz gelöst. Zur Untersuchung wird die Cartansche Methode (im Sinne von [3]) benützt.

Keywords: Projektive Differentialgeometrie, Systeme der linearen Räume.

Classification AMS: 53A20.

EINFÜHRUNG

Im projektiven Raum P_7 betrachtet man das System der dreidimensionalen Räume P_3. Die Lage von P_3 hängt von vier Parametern ab. Die Räume P_3 bilden dann die Grassmansche Mannigfaltigkeit $G_r(3, 7, 4)$. Zur Untersuchung von $G_r(3, 7, 4)$ benützt man das bewegliche Bezugssystem mit den Eckpunten A_i, $\bar{A}_i$, $i = 1, 2, 3. 4$. Man benützt die Bezeichnungen ähnlich in [8], [9].

Die Eckpunkte A_i wählt man im Raume P_3. Alle Eckpunkte sind linear unabhängig. Dann gilt

$$(1)\qquad \begin{aligned} \mathrm{d}A_i &= \omega_i^k A_k + \hat{\omega}_i^k \bar{A}_k \\ \mathrm{d}\bar{A}_i &= \tilde{\omega}_i^k A_k + \bar{\omega}_i^k \bar{A}_k\,, \quad i, k = 1, 2, 3, 4\,. \end{aligned}$$

Nach den Strukturgleichungen von P_7 folgt dann

$$(2)\qquad \begin{aligned} \mathrm{d}\omega_i^k &= \omega_i^s \wedge \omega_s^k + \hat{\omega}_i^s \wedge \tilde{\omega}_s^k \\ \mathrm{d}\hat{\omega}_i^k &= \omega_i^s \wedge \hat{\omega}_s^k + \hat{\omega}_i^s \wedge \bar{\omega}_s^k \\ \mathrm{d}\tilde{\omega}_i^k &= \tilde{\omega}_i^s \wedge \hat{\omega}_s^k + \bar{\omega}_i^s \wedge \bar{\omega}_s^k \\ \mathrm{d}\bar{\omega}_i^k &= \tilde{\omega}_i^s \wedge \hat{\omega}_s^k + \bar{\omega}_i^s \wedge \bar{\omega}_s^k\,, \quad i, k, s = 1, 2, 3, 4\,. \end{aligned}$$

Die Formen $\tilde{\omega}_i^k$ sind die Hauptformen. Mit $M = x^i A_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, bezeichnet man den im Raume P_3 liegenden Punkt. Mit $TM(G_r)$ bezeichnet man den linearen Berührraum von $G_r(3, 7, 4)$ im Punkte M. $TM(G_r)$ ist durch die Punkte A_i, $i = 1, 2, 3, 4$ und durch die Punkte $\mathrm{d}M$ bestimmt. Die Punkte $\mathrm{d}M$ gehören zu allen Werten von Haptformen. In allgemeinen Fall ist die Dimension von $TM(G_r)$ gleich 7. Wenn $\dim TM(G_r) = 7 - c$, $c > 0$ gilt, dann ist M der Brennpunkt der Ordnung c von $G_r(3, 7, 4)$. Die Brennpunkte von $G_r(3, 7, 4)$, die im Raume P_3 liegen, bilden die Berührmannigfaltigkeit FP_3.

Im folgenden wählen wir vier unabhängige Hauptformen ω_i, $i = 1, 2, 3, 4$. Die Formen $\hat{\omega}_i^k$ sind dann ihre linearen Kombinationen. Die Pfaffsche Untermannigfaltigkeit von $G_r(3, 7, 4)$ ist durch das System der linearen Gleichungen mit den Unbekannten $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ bestimmt. Den Berührraum der Pfaffschen Mannigfaltigkeit bestimmt man durch A_i und durch die Punkte $\mathrm{d}M$. Diese Punkte gehören zu allen Werten der Hauptformen, die die Gleichungen der Pfaffschen Mannigfaltigkeit erfüllen.

Sei die Pfaffsche Mannigfaltigkeit mit der Gleichung $\alpha^i \omega_i = 0$, $i = 1, 2, 3, 4$ gegeben. Wenn die Dimension ihres Berührraumes im Brennpunkte M von der Ordnung c kleiner als $(7 - c)$ ist, dann ist $\alpha^i \omega_i$ die zum Brennpunkte M gehörige Torsalform (im Sinne von [4]).

1. $G_r(3, 7, 4)$ ENTHÄLT BRENNPUNKTE DRITTER ORDNUNG

Im folgenden setzen wir voraus, daß in jedem Raum P_3 vier Brennpunkte dritter Ordnung existieren. In diesen Punkten wählen wir die Eckpunkte A_i, $i = 1, 2, 3, 4$. Weiter setzen wir voraus, daß jedes Paar der Berührräume TA_i, $i = 1, 2, 3, 4$, nur den Raum $(A_1 A_2 A_3 A_4)$ gemeinsam hat. In diesem Räumen wählen wir die Punkte $\bar{A}_i$. Es gilt dann

$$\mathrm{d}A_i = \omega_i^k A_k + \bar{A}_i \varphi_i^k \omega_k\,, \quad i, k = 1, 2, 3, 4\,. \tag{3}$$

Wir werden die übrigen Brennpunkte der Mannigfaltigkeit $G_r(3, 7, 4)$ bestimmen. Sei $M = x^i A_i$, dann gilt $\mathrm{d}M = x^i \bar{A}_i \varphi_i^k \omega_k + Q$. Q ist eine lineare Kombination von A_1, A_2, A_3, A_4. Wenn M der Brennpunkt der Mannigfaltigkeit $G_r(3, 7, 4)$ ist, dann sind die vier Punkte $x^i \bar{A}_i \varphi_i^k$, $k = 1, 2, 3, 4$ linear abhängig. Daraus folgt

$$x^1 x^2 x^3 x^4 (\varphi_1^k, \varphi_2^k, \varphi_3^k, \varphi_4^k) = 0\,. \tag{4}$$

$(\varphi_1^k, \varphi_2^k, \varphi_3^k, \varphi_4^k)$ ist die Determinante, ihre Zeilen sind mit $k = 1, 2, 3, 4$ bezeichnet.

Satz 1. *Setzen wir voraus, daß in jedem Raume P_3 der Mannigfaltigkeit $G_r(3, 7, 4)$ vier unabhängige Brennpunte A_i dritter Ordnung existieren. Weiter soll jedes Paar der Berührräume TA_i nur den gemeinsame Raum $(A_1 A_2 A_3 A_4)$ enthalten. Dann ist entweder FP_3 von vier Ebenen gebildet, oder ist FP_3 nicht definiert.*

Beweis. Wenn $\det(\varphi_1^k, \varphi_2^k, \varphi_3^k, \varphi_4^k) \neq 0$, dann ist FP_3 von den Ebenen $x^i = 0$, $i = 1, 2, 3, 4$ gebildet. Solch eine Mannigfaltigkeit nennt man auch vollständig fokal [5]. Jede von diesen Ebenen enthält drei Brennpunkte dritter Ordnung. Sei $p, q \in \{1, 2, 3, 4\}$, $p \neq q$. Die Punkte A_p, A_q sind die Brennpunkte dritter Ordnung, die übrigen Punkte der Geraden $(A_p A_q)$ sind die Brennpunkte zweiter Ordnung der Mannigfaltigkeit FP_3. Die Formen $\varphi_i^k \omega_k$ sind die Torsalformen der Punkte A_i. Wenn für $i = 1, 2, 3, 4$ diese Formen linear abhängig sind, dann gilt $\det(\varphi_1^k, \varphi_2^k, \varphi_3^k, \varphi_4^k) = 0$. FP_3 ist nicht definiert. Alle Punkte von P_3 sind die Brennpunkte von $G_r(3, 7, 4)$.

2. $G_r(3, 7, 4)$ ENTHÄLT BRENNPUNKTE ZWEITER ORDNUNG

Setzen wir voraus, daß auf der Erzeugenden P_3 von $G_r(3, 7, 4)$ vier Brennpunkte zweiter Ordnung liegen. Die Dimension der Berührräume in diesen Punkten ist gleich 5. In diesen Punkten wählen wir die Punkte A_1, A_2, A_3, A_4. Setzen wir voraus, daß die Punkte $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3, \bar{A}_4$ beliebig gewählt sind. Die Spuren von TA_i, $i = 1, 2, 3, 4$, im Raume $(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 \bar{A}_4)$ sind vier Geraden, die im allgemeinen Falle windschief sind. Setzen wir weiter voraus, daß diese vier Punkte zwei reelle Transversalen haben. Auf einer von ihnen wählen wir die Punkte $\bar{A}_1$, $\bar{A}_2$, auf der anderen die Punkte $\bar{A}_3$, $\bar{A}_4$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{d}A_i &= \omega_i^k A_k + \lambda_i^l \varphi_i^k \omega_k \bar{A}_l + \lambda_i^h \varphi_i^{*k} \omega_k \bar{A}_h \\ \mathrm{d}\bar{A}_i &= \tilde{\omega}_i^k A_k + \bar{\omega}_i^k \bar{A}_k , \quad k, i = 1, 2, 3, 4 ; \quad l = 1, 2 ; \quad h = 3, 4 . \end{aligned} \tag{5}$$

Für alle Werte von $i = 1, 2, 3, 4$ sind die Formen $\varphi_i^k \omega_k$ und $\varphi_i^{*k} \omega_k$ linear unabhängig. Im Falle der linearen Abhängigkeit der beiden Formen hat TA_i die Dimension 4. Das ist unter unseren Voraussetzungen nicht möglich. Wenn im Punkte der Punktmannigfaltigkeit der lineare Berührraum nicht existiert, dann nennt man den Punkt singulär.

Satz 2. *Wenn in der Erzeugenden P_3 von $G_r(3, 7, 4)$ vier Brennpunkte zweiter Ordnung liegen, dann sind diese Punkte die singulären Punkte der zugehörigen Mannigfaltigkeit FP_3.*

Beweis. Betrachten wir den Punkt $M = x^i A_i$. Dann gilt

$$\mathrm{d}M = R + x^i \lambda_i^1 \varphi_i^k \omega_k \bar{A}_1 + x^i \lambda_i^2 \varphi_i^k \omega_k \bar{A}_2 + x^i \lambda_i^3 \varphi_i^{*k} \omega_k \bar{A}_3 + x^i \lambda_i^4 \varphi_i^{*k} \omega_k \bar{A}_4 .$$

R ist die lineare Kombination der Punkte A_1, A_2, A_3, A_4. Wenn der Punkt M zur Charakteristik gehört, dann gilt

$$(x^i \lambda_i^1 \varphi_i^k, x^i \lambda_i^2 \varphi_i^k, x^i \lambda_i^3 \varphi_i^{*k}, x^i \lambda_i^4 \varphi_i^{*k}) = 0 . \tag{6}$$

Auf der linken Seite von (6) ist die Determinante, ihre Zeilen sind durch $k =$

$= 1, 2, 3, 4$ bestimmt. (6) ist eine Gleichung vierten Grades. Sie enthält nicht die Ausdrücke mit $(x^s)^4$, $s = 1, 2, 3, 4$, und mit $(x^s)^3 x^j$, s, $j = 1, 2, 3, 4$, $j \neq s$. Die Berührebenen der charakteristischen Fläche vierter Ordnung in den Punkten A_1, A_2, A_3, A_4 sind nicht definiert; A_1, A_2, A_3, A_4 sind die singulären Punkte von FP_3.

Satz 3. *Wenn FP_3 die Verbindungslinie von zwei singulären Punkten zweiter Ordnung enthält, dann sind folgende Fälle möglich:*

a) *Diese zwei Punkte haben eine gemeinsame Torsalform.*

b) *Die Berührräume von $G_r(3, 7, 4)$ in diesen Punkten haben einen gemeinsamen Raum, dessen Dimension größer als 3 ist.*

Beweis. Setzen wir voraus, daß $p, q \in \{1, 2, 3, 4\}$ gilt. Suchen wir die Bedingung, daß die Gerade (A_pA_q) zur Brennmannigfaltigkeit von $G_r(3, 7, 4)$ im Raume $(A_1A_2A_3A_4)$ gehört. In der Gleichung (6) ist dann der Koeffizient des Gliedes mit $(x^p)^2 (x^q)^2$ Null gleich. Dann gilt

$$(x^p\lambda_p^1\varphi_p^k, x^q\lambda_q^2\varphi_q^k, x^p\lambda_p^3\varphi_p^{*k}, x^q\lambda_q^4\varphi_q^{*k}) + (x^p\lambda_p^1\varphi_p^k, x^q\lambda_q^2\varphi_q^k, x^q\lambda_q^3\varphi_q^{*k}, x^p\lambda_p^4\varphi_p^{*k}) +$$
$$+ (x^q\lambda_q^1\varphi_q^k, x^p\lambda_p^2\varphi_p^k, x^p\lambda_p^3\varphi_p^{*k}, x^q\lambda_q^4\varphi_q^{*k}) + (x^q\lambda_q^1\varphi_q^k, x^p\lambda_p^2\varphi_p^k, x^q\lambda_q^3\varphi_q^{*k}, x^p\lambda_p^4\varphi_p^{*k}) = 0\,.$$

Daraus folgt:

$$(\varphi_p^k, \varphi_q^k, \varphi_p^{*k}, \varphi_q^{*k})(\lambda_p^1\lambda_q^2\lambda_p^3\lambda_q^4 - \lambda_p^1\lambda_q^2\lambda_q^3\lambda_p^4 - \lambda_q^1\lambda_p^2\lambda_p^3\lambda_q^4 + \lambda_q^1\lambda_p^2\lambda_q^3\lambda_p^4) = 0\,.$$

Wir bekommen zwei Möglichkeiten:

a)

$$(\varphi_p^k, \varphi_q^k, \varphi_p^{*k}, \varphi_q^{*k}) = 0\,.$$

In diesem Falle sind die Formen linear abhängig. Die Torsalformen der Mannigfaltigkeit A_p sind die linearen Kombinationen von zwei unabhängigen Formen $\varphi_p^k\omega_k$, $\varphi_p^{*k}\omega_k$. Die Torsalformen der Mannigfaltigkeit A_q sind lineare Kombinationen der Formen $\varphi_q^k\omega_k$, $\varphi_q^{*k}\omega_k$. Dann existieren solche Funktionen $\alpha_{p_1}, \alpha_{p_2}, \alpha_{q_1}, \alpha_{q_2}$ dass folgendes gilt:

$$\alpha_{p_1}\varphi_p^k\omega_k + \alpha_{p_2}\varphi_p^{*k}\omega_k = -\alpha_{q_1}\varphi_q^k\omega_k - \alpha_{q_2}\varphi_q^{*k}\omega_k\,.$$

Die Form $\alpha_{p_1}\varphi_p^k\omega_k + \alpha_{p_2}\varphi_p^{*k}\omega_k$ ist die gemeinsame Torsalform der Mannigfaltigkeiten A_p, A_q.

b)

$$(\lambda_p^1\lambda_q^2\lambda_p^3\lambda_q^4 - \lambda_p^1\lambda_q^2\lambda_q^3\lambda_p^4 - \lambda_q^1\lambda_p^2\lambda_p^3\lambda_q^4 + \lambda_q^1\lambda_p^2\lambda_q^3\lambda_p^4) = 0\,. \tag{7}$$

Der Berührraum der Mannigfaltigkeit $G_r(3, 7, 4)$ im Punkte A_p ist durch die Punkte $A_1, A_2, A_3, A_4, \lambda_p^1\bar{A}_1 + \lambda_p^2\bar{A}_2, \lambda_p^3\bar{A}_3 + \lambda_p^4\bar{A}_4$ bestimmt. Der Berührraum der Mannigfaltigkeit $G_r(3, 7, 4)$ im Punkte A_q ist durch die Punkte $A_1, A_2, A_3, A_4, \lambda_q^1\bar{A}_1 + \lambda_q^2\bar{A}_2$, $\lambda_q^3\bar{A}_3 + \lambda_q^4\bar{A}_4$ bestimmt. Bei der Gültigkeit von (7) sind die Punkte $\lambda_p^1\bar{A}_1 + \lambda_p^2\bar{A}_2$, $\lambda_p^3\bar{A}_3 + \lambda_p^4\bar{A}_4$, $\lambda_q^1\bar{A}_1 + \lambda_q^2\bar{A}_2$, $\lambda_q^3\bar{A}_3 + \lambda_q^4\bar{A}_4$ linear abhängig, die Berührräume in den

Punkten A_p und A_q haben im allgemeinen Fall einen vierdiemensionalen gemeinsamen Raum. Die angeführten Berührräume sind von der Dimension 5. Nur wenn die Punkte $\lambda_p^1 \bar{A}_1 + \lambda_p^2 \bar{A}_2$, $\lambda_q^1 \bar{A}_1 + \lambda_q^2 \bar{A}_2$ und ebenso auch die Punkte $\lambda_p^3 \bar{A}_3 + \lambda_p^4 \bar{A}_4$, $\lambda_q^3 \bar{A}_3 + \lambda_q^4 \bar{A}_4$ geometrisch zusammenfallen, dann fallen die Berührräume der Mannigfaltigkeit $G_r(3, 7, 4)$ in den Punkten A_p, A_q zusammen.

Betrachten wir wieder den allgemeinen Fall. Die Gleichungen des Bezugssystemes von $G_r(3, 7, 4)$ haben die Form (5). Wir bilden die äußeren Ableitungen der Koeffizienten bei $\bar{A}_l$, $\bar{A}_h$ in den ersten vier Gleichungen und benützen wir die Strukturgleichungen des projektiven Raumes P_7. Dann bekommen wir

$$\text{(8)} \qquad \mathrm{d}\lambda_i^p \wedge \varphi_i^k \omega_k + \lambda_i^p \, \mathrm{d}\varphi_i^k \omega_k = \omega_i^s \wedge \lambda_s^p \varphi_s^k \omega_k + \lambda_i^l \varphi_i^k \omega_k \wedge \bar{\omega}_l^p + \lambda_i^h \varphi_i^{*k} \omega_k \wedge \bar{\omega}_h^p$$

$$\text{(9)} \qquad \mathrm{d}\lambda_i^q \wedge \varphi_i^{*k} \omega_k + \lambda_i^q \, \mathrm{d}\varphi_i^{*k} \omega_k = \omega_i^s \wedge \lambda_s^q \varphi_s^{*k} \omega_k + \lambda_i^l \varphi_i^k \omega_k \wedge \bar{\omega}_l^q + \\ + \lambda_i^h \varphi_i^{*k} \omega_k \wedge \bar{\omega}_h^q ,$$

$i, k, s = 1, 2, 3, 4$; $p, l = 1, 2$; $q, h = 3, 4$.

Setzen wir weiter voraus, daß die Formen $\varphi_i^k \omega_k$ für $i = 1, 2, 3, 4$ linear unabhängig sind, dasselbe gilt auch für die Formen $\varphi_i^{*k} \omega_k$. Dann gilt

$$\text{(10)} \qquad \varphi_i^{*k} \omega_k = \alpha_i^s \varphi_s^k \omega_k , \quad \varphi_i^k \omega_k = \alpha_i^{*s} \varphi_s^{*k} \omega_k , \quad s, k = 1, 2, 3, 4 .$$

In die Gleichung (8) setzen wir $p = 1$, $p = 2$ ein, daraus eliminieren wir $\mathrm{d}\varphi_i^k \omega_k$ und benützen die Gleichung (10), wir bekommen dann

$$\text{(11)} \qquad [-\lambda_i^2 \, \mathrm{d}\lambda_i^1 + \lambda_i^1 \, \mathrm{d}\lambda_i^2 + \lambda_i^l(-\lambda_i^2 \bar{\omega}_l^1 + \lambda_i^1 \bar{\omega}_l^2) + \alpha_i^i \lambda_i^h(-\lambda_i^2 \bar{\omega}_h^1 + \lambda_i^1 \bar{\omega}_h^2)] \wedge \\ \wedge \varphi_i^k \omega_k + [(\lambda_i^2 \lambda_{i+j}^1 - \lambda_i^1 \lambda_{i+j}^2) \, \omega_i^{i+j} + \lambda_i^h(-\lambda_i^2 \bar{\omega}_h^1 + \lambda_i^1 \bar{\omega}_h^2) \, \alpha_i^{i+j}] \wedge \varphi_{i+j}^k \omega_k = 0 .$$

Ähnlich aus der Gleichung (9) folgt dann

$$\text{(12)} \qquad [-\lambda_i^4 \, \mathrm{d}\lambda_i^3 + \lambda_i^3 \, \mathrm{d}\lambda_i^4 + \lambda_i^h(-\lambda_i^4 \bar{\omega}_h^3 + \lambda_i^3 \bar{\omega}_h^4) + \lambda_i^l(-\lambda_i^4 \bar{\omega}_l^3 + \lambda_i^3 \bar{\omega}_l^4) \, \alpha_i^{*i}] \wedge \\ \wedge \varphi_i^{*k} \omega_k + [\omega_i^{i+j}(\lambda_i^4 \lambda_{i+j}^3 - \lambda_i^3 \lambda_{i+j}^4) + \lambda_i^l(-\lambda_i^4 \bar{\omega}_l^3 + \lambda_i^3 \bar{\omega}_l^4) \, \alpha_i^{*i+j}] \wedge \varphi_{i+j}^{*k} \omega_k = 0 ,$$

i ist kein Additionsindex.

Setzen wir voraus, daß i fest ist und daß j die Werte j_1 und j_2 hat. Aus den Gleichungen (11), (12) folgt dann, daß die Form

$$\text{(13)} \qquad [\alpha_i^{i+j_2} \alpha_i^{*i+j_1} (\lambda_i^4 \lambda_{i+j_2}^3 - \lambda_i^3 \lambda_{i+j_2}^4) (\lambda_i^2 \lambda_{i+j_1}^1 - \lambda_i^1 \lambda_{i+j_1}^2) - \\ - \alpha_i^{*i+j_2} \alpha_i^{i+j_1} (\lambda_i^4 \lambda_{i+j_1}^3 - \lambda_i^3 \lambda_{i+j_1}^4) (\lambda_i^2 \lambda_{i+j_2}^1 - \lambda_i^1 \lambda_{i+j_2}^2)] \, \omega_i^{i+j_1}$$

die Hauptform ist. Für die Koeffizienten in der Gleichung des Bezugssystemes haben wir keine Funktionsabhängigkeit vorausegesetzt. Es besteht nur eine Abhängigkeit zwischen den Koeffizienten der Formen $\varphi_i^k \omega_k$ und $\varphi_i^{*k} \omega_k$, $i, k = 1, 2, 3, 4$. Wir benützen die Ausdrücke (10). Δ^* sei die Determinante aus den Größen α_i^{*k}, A_i^{*k} sei das algebraische Komplement in der Determinante, welches zu α_i^{*k} gehört. Aus der Gleichung (10) kann man die Form $\varphi_i^{*k} \omega_k$ berechnen. Es gilt

$$\varphi_i^{*k} \omega_k = \frac{1}{\Delta^*} \sum_s A_s^{*i} \varphi_s^k \omega_k .$$

Mit Hilfe der Gleichungen (10) bekommen wir dann

$$\alpha_i^s = \frac{1}{\Delta^*} A_s^{*i} .$$

Bei der Gültigkeit dieser Gleichungen ist der Koeffizient von $\omega_i^{i+j_1}$ in der Gleichung (13) in allgemeinem Fall nicht Null gleich, $\omega_i^{i+j_1}$ ist die Hauptform. Wenn wir alle Werte von $i = 1, 2, 3, 4$, $j = 1, 2, 3$ voraussetzen, dann sind in allgemeinem Fall alle Formen ω_i^k, $k \neq i$ Hauptformen. Ebenso sind die Formen

$$\lambda_i^h(-\lambda_i^2\varpi_h^1 + \lambda_i^1\varpi_h^2), \quad \lambda_i^l(-\lambda_i^4\varpi_l^3 + \lambda_i^3\varpi_l^4) \tag{14}$$

Hauptformen. Aus (11), (12) folgt, daß

$$[-\lambda_i^2\,d\lambda_i^1 + \lambda_i^1\,d\lambda_i^2 + \lambda_i^l(-\lambda_i^2\varpi_l^1 + \lambda_i^1\varpi_l^2)] \tag{15}$$

$$[-\lambda_i^4\,d\lambda_i^3 + \lambda_i^3\,d\lambda_i^4 + \lambda_i^h(-\lambda_i^4\varpi_h^3 + \lambda_i^3\varpi_h^4)] \tag{16}$$

auch Hauptformen sind.

Betrachten wir vier Forfen (16) ($i = 1, 2, 3, 4$). Mit χ_i bezeichnen wir die Form

$$\chi_i = \lambda_i^h(-\lambda_i^4\varpi_h^3 + \lambda_i^3\varpi_h^4) = \lambda_i^3\lambda_i^4(\varpi_4^4 - \varpi_3^3) + (\lambda_i^3)^2\,\varpi_3^4 - (\lambda_i^4)^2\,\varpi_4^3 .$$

Die vier Forfen χ_i sind lineare Kombinationen von drei Formen $(\varpi_4^4 - \varpi_3^3)$, ϖ_3^4, ϖ_4^3. In allgemeinem Fall existieren die Koeffizienten A^i so, daß $A^i\chi_i = 0$ gilt. Man kann eicht A^i wählen:

$$A^i = (-1)^i \begin{vmatrix} \lambda_{i+1}^3\lambda_{i+1}^4 & \lambda_{i+2}^3\lambda_{i+2}^4 & \lambda_{i+3}^3\lambda_{i+3}^4 \\ (\lambda_{i+1}^3)^2 & (\lambda_{i+2}^3)^2 & (\lambda_{i+3}^3)^2 \\ (\lambda_{i+1}^4)^2 & (\lambda_{i+2}^4)^2 & (\lambda_{i+3}^4)^2 \end{vmatrix} \tag{17}$$

Betrachten wir die Hauptform

$$\Phi_{34} = A^i(-\lambda_i^4\,d\lambda_i^3 + \lambda_i^3\,d\lambda_i^4 + \chi_i) .$$

Mit Hilfe von (17) gilt dann:

$$\Phi_{34} = |\lambda_i^4\,d\lambda_i^3 - \lambda_i^3\,d\lambda_i^4,\ \lambda_i^3\lambda_i^4,\ (\lambda_i^3)^2,\ (\lambda_i^4)^2| . \tag{18}$$

Ähnlich finden wir die Hauptform Φ_{12}.

$$\Phi_{12} = |\lambda_i^2\,d\lambda_i^1 - \lambda_i^1\,d\lambda_i^2,\ \lambda_i^1\lambda_i^2,\ (\lambda_i^1)^2,\ (\lambda_i^2)^2| . \tag{19}$$

Für die Hauptformen (14) gilt dann

$$\lambda_i^h(-\lambda_i^2\varpi_h^1 + \lambda_i^1\varpi_h^2) = \varpi_3^1(-\lambda_i^3\lambda_i^2) + \varpi_4^1(-\lambda_i^4\lambda_i^2) + \varpi_3^2(\lambda_i^3\lambda_i^1) + \varpi_4^2(\lambda_i^4\lambda_i^1)$$

$$\lambda_i^l(-\lambda_i^4\varpi_l^3 + \lambda_i^3\varpi_l^4) = \varpi_1^3(-\lambda_i^1\lambda_i^4) + \varpi_i^4(\lambda_i^1\lambda_i^3) + \varpi_2^3(-\lambda_i^2\lambda_i^4) + \varpi_2^4(\lambda_i^2\lambda_i^3) .$$

Daraus folgt bei der Gültigkeit von

$$|-\lambda_i^1\lambda_i^4,\ \lambda_i^1\lambda_i^3,\ -\lambda_i^2\lambda_i^4,\ \lambda_i^2\lambda_i^3| \neq 0 ,$$

daß die Formen $\varpi_3^1, \varpi_4^1, \varpi_3^2, \varpi_4^2, \varpi_1^3, \varpi_1^4, \varpi_2^3, \varpi_2^4$ Hauptformen sind. Wir benützen

nun folgende Bezeichnung:
$S_5^{34} = (A_1, A_2, A_3, A_4, \bar{A}_3, \bar{A}_4)$ is der fünfdimensionale Raum, der durch P_3 geht. Es gilt dann:

$$TA_i(G_r) = (A_1, A_2, A_3, A_4, \lambda_i^1 \bar{A}_1 + \lambda_i^2 \bar{A}_2, \lambda_i^3 \bar{A}_3 + \lambda_i^4 \bar{A}_4) .$$

Weiter benützen wir folgende Bezeichnung:

$$H_4^{i34} = S_5^{34} \cap TA_i(G_r) , \quad H_4^{i12} = S_5^{12} \cap TA_i(G_r)$$
$$S_5^{12} = (A_1, A_2, A_3, A_4, \bar{A}_1, \bar{A}_2) .$$

Es gilt dann $H_4^{i34} = (A_1, A_2, A_3, A_4, \lambda_i^3 \bar{A}_3 + \lambda_i^4 \bar{A}_4)$.

Die vierdimensionalen Räume H_4^{i34} gehören zum fünfdimensionalen Raum S_5^{34}, sie bilden die Räumeschar mit der Achse $(A_1 A_2 A_3 A_4)$. Ähnlich gilt $H_4^{i12} = (A_1, A_2, A_3, A_4, \lambda_i^1 \bar{A}_1 + \lambda_i^2 \bar{A}_2)$. Die vierdimensionalen Räume H_4^{i12} gehören zum fünfdimensionalen Raum S_5^{12}, sie bilden die Räumeschar mit der Achse $(A_1 A_2 A_3 A_4)$.

Satz 4. *Zur Mannigfaltigkeit $G_r(3, 7, 4)$ kann man invariant zwei Mannigfaltigkeiten $G_r(5, 7, 4)$ zuordnen. Ihre Erzeugenden sind die Räume S_5^{34}, bzw. S_5^{12}. Das Doppelverhältnis E_{34} der Räume H_4^{i34} $(i = 1, 2, 3, 4)$ hat den invarianten Charakter. Dasselbe gilt für das Doppelverhältnis E_{12} der Räume H_4^{i12}.*

Beweis. Betrachten wir den Raum $S_5^{34} = (A_1, A_2, A_3, A_4, \bar{A}_3, \bar{A}_4)$. Mit δ bezeichnen wir die Differentiation bei den konstanten Hauptparametern und die Werte der Formen ω_i^i bezeichnen wir dann mit π_i^i, (i ist kein Additionsindex). Es gilt dann:

$$\delta(A_1, A_2, A_3, A_4, \bar{A}_3, \bar{A}_4) =$$
$$= (\pi_1^1 + \pi_2^2 + \pi_3^3 + \pi_4^4 + \bar{\pi}_3^3 + \bar{\pi}_4^4)(A_1, A_2, A_3, A_4, \bar{A}_3, \bar{A}_4) .$$

S_5^{34} hängt nicht von den sekundären Parametern ab. Betrachten wir den Raum S_5^{12}. Dann gilt

$$\delta(A_1, A_2, A_3, A_4, \bar{A}_1, \bar{A}_2) =$$
$$= (\pi_1^1 + \pi_2^2 + \pi_3^3 + \pi_4^4 + \bar{\pi}_1^1 + \bar{\pi}_2^2)(A_1, A_2, A_3, A_4, \bar{A}_1, \bar{A}_2) .$$

S_5^{12} hängt nicht von den sekundären Parametern ab. Das Doppelverhältnis der Räume H_4^{i34} ist gleich dem Doppelverhältnis von vier Punkten $\lambda_i^3 \bar{A}_3 + \lambda_i^4 \bar{A}_4$. dE_{34} hängt von den sekundären Parametern nicht ab. E_{34} ist eine Invariante. Dasselbe gilt für E_{12}.

Satz 5. *Die Punkte A_1, A_2, A_3, A_4 sind die Brennpunkte erster Ordnung der Mannigfaltigkeiten S_5^{12} und S_5^{34}.*

Beweis. Sei N der Punkt der Erzeugenden von S_5^{12}. Dann gilt: $N = x^i A_i + x^5 \bar{A}_1 + x^6 \bar{A}_2$, $i = 1, 2, 3, 4$. Mit Hilfe der Gleichungen des Bezugsystems bekommen wir

$$dN = x^i \lambda_i^h \varphi_i^{*k} \omega_k \bar{A}_h + x^5(\bar{\omega}_1^3 \bar{A}_3 + \bar{\omega}_1^4 \bar{A}_4) + x^6(\bar{\omega}_2^3 \bar{A}_3 + \bar{\omega}_2^4 \bar{A}_4) + S\,, \quad h = 3, 4\,.$$

S ist eine lineare Kombination der Punkte $A_1, A_2, A_3, A_4, \bar{A}_1, \bar{A}_2$. Nach den Voraussetzungen sind die Formen $\varphi_i^{*k}\omega_k$ für $i = 1, 2, 3, 4$ linear unabhängig. Wir haben bewiesen, daß $\bar{\omega}_1^3, \bar{\omega}_1^4, \bar{\omega}_2^3, \bar{\omega}_2^4$ Hauptformen sind. Es gilt dann

$$\bar{\omega}_1^3 = \gamma_1^{3i} \varphi_i^{*k} \omega_k\,, \quad \bar{\omega}_1^4 = \gamma_1^{4i} \varphi_i^{*k} \omega_k\,, \quad \bar{\omega}_2^3 = \gamma_2^{3i} \varphi_i^{*k} \omega_k\,, \quad \bar{\omega}_2^4 = \gamma_2^{4i} \varphi_i^{*k} \omega_k\,.$$

Wenn wir diese Ausdrücke in die Gleichung für dN einsetzen, dann bekommen wir:

$$dN = \bar{A}_3[x^i \lambda_i^3 + x^5 \gamma_1^{3i} + x^6 \gamma_2^{3i}]\, \varphi_i^{*k} \omega_k + \bar{A}_4[x^i \lambda_i^4 + x^5 \gamma_1^{4i} + x^6 \gamma_2^{4i}]\, \varphi_i^{*k} \omega_k + S\,.$$

Der Punkt N ist ein Brennpunkt erster Ordnung, wenn die Matrix

$$\left(x^i \lambda_i^3 + x^5 \gamma_1^{3i} + x^6 \gamma_2^{3i}\,, \quad x^i \lambda_i^4 + x^5 \gamma_1^{4i} + x^6 \gamma_2^{4i}\right)$$

den Rang eins hat. (Die Zeilen der Matrix sind mit $i = 1, 2, 3, 4$ bestimmt, i ist kein Additionsindex.) Im Falle $x^1 = 1$, $x^2 = 0$, $x^3 = 0$, $x^4 = 0$, $x^5 = 0$, $x^6 = 0$, hat diese Matrix den Rang eins, die Glieder der Matrix in den letzten drei Zeilen sind gleich Null. Der Punkt A ist ein Brennpunkt erster Ordnung der Mannigfaltigkeit S_5^{12}. Dasselbe gilt für die Punkte A_2, A_3, A_4. Das gleiche Ergebnis finden wir für die Mannigfaltigkeit S_5^{34}.

Betrachten wir die Spuren von TA_i im Raume $(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 \bar{A}_4)$ und setzen wir voraus, daß diese Geraden windschief sind. Sie sind durch die Punkte $\lambda_i^1 \bar{A}_1 + \lambda_i^2 \bar{A}_2, \lambda_i^3 \bar{A}_3 + \lambda_i^4 \bar{A}_4$ bestimmt. Ihre Plückerschen Koordinaten bekommen wir in folgender Form:

$$p_{12i} = 0\,, \quad p_{13i} = \lambda_i^1 \lambda_i^3\,, \quad p_{14i} = \lambda_i^1 \lambda_i^4\,, \quad p_{23i} = \lambda_i^2 \lambda_i^3\,, \quad p_{24i} = \lambda_i^2 \lambda_i^4\,, \quad p_{34i} = 0\,. \tag{20}$$

Wenn die Bilder dieser Geraden in einer Ebene des Kleinschen Raumes liegen, dann ist der Rang der Matrix $(0, \lambda_i^1 \lambda_i^3, \lambda_i^1 \lambda_i^4, \lambda_i^2 \lambda_i^3, \lambda_i^2 \lambda_i^4, 0)$ gleich drei. Dann gilt

$$\det\left(-\lambda_i^3 \lambda_i^2, \lambda_i^3 \lambda_i^1, -\lambda_i^4 \lambda_i^2, \lambda_i^4 \lambda_i^1\right) = 0\,. \tag{21}$$

Wenn (21) gilt, liegen alle drei solche Geraden auf einer Fläche zweiten Grades, sie haben die hyperboloidische Lage. Die Spuren der Räume $TA_i(G_r)$ haben im Raume $(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 \bar{A}_4)$ ein einparametriges System von Transversalen. Unter diesen Voraussetzungen existiert die durch $(A_1 A_2 A_3 A_4)$ gehende einparametrige Schar von P_5 mit folgenden Eigenschaften. Die Räume TA_i haben mit diesen Räumen Räume von der Dimension 4 gemeinsam. Im folgenden werden wir voraussetzen, daß die Gleichung (21) nicht gelten muß.

Mit P_5^t bezeichnen wir den durch $(A_1 A_2 A_3 A_4)$ gehenden Raum, der mit den Räumen einen gemeinsamen Raum von der Dimension vier hat. Mit s bezeichnen wir die Zahl $s \in \{1, 2, 3, 4\}$ und setzen wir voraus, daß P_5^t durch die Punkte

(22)
$$A_1, A_2, A_3, A_4\,, \quad \varkappa_s(\lambda_s^1\bar{A}_1 + \lambda_s^2\bar{A}_2) + \bar{\varkappa}_s(\lambda_s^3\bar{A}_3 + \lambda_s^4\bar{A}_4)\,,$$
$$\varkappa_{s+1}(\lambda_{s+1}^1\bar{A}_1 + \lambda_{s+1}^2\bar{A}_2) + \bar{\varkappa}_{s+1}(\lambda_{s+1}^3\bar{A}_3 + \lambda_{s+1}^4\bar{A}_4)$$

bestimmt ist. Weiter setzen wir voraus, daß nicht $\varkappa_s = \bar{\varkappa}_s = 0$ bzw. $\varkappa_{s+1} = \bar{\varkappa}_{s+1} = 0$ gilt. Bei dieser Wahl hat P_5^t den einen vierdimensionalen Raum mit den Räumen $TA_s(G_r)$ und $TA_{s+1}(G_r)$ gemeinsam. Die Spur des Raumes P_5^t im Raume $(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3\bar{A}_4)$ ist die Gerade

23)
$$[\varkappa_s(\lambda_s^1\bar{A}_1 + \lambda_s^2\bar{A}_2) + \bar{\varkappa}_s(\lambda_s^3\bar{A}_3 + \lambda_s^4\bar{A}_4)\,,$$
$$\varkappa_{s+1}(\lambda_{s+1}^1\bar{A}_1 + \lambda_{s+1}^2\bar{A}_2) + \bar{\varkappa}_{s+1}(\lambda_{s+1}^3\bar{A}_3 + \lambda_{s+1}^4\bar{A}_4)]\,.$$

Für die Plückerschen Koordinaten dieser Geraden bekommen wir:

$$\begin{aligned}
p_{12} &= \varkappa_s\varkappa_{s+1}(\lambda_s^1\lambda_{s+1}^2 - \lambda_s^2\lambda_{s+1}^1)\\
p_{13} &= \varkappa_s\bar{\varkappa}_{s+1}\lambda_s^1\lambda_{s+1}^3 - \varkappa_{s+1}\bar{\varkappa}_s\lambda_{s+1}^1\lambda_s^3\\
p_{14} &= \varkappa_s\bar{\varkappa}_{s+1}\lambda_s^1\lambda_{s+1}^4 - \varkappa_{s+1}\bar{\varkappa}_s\lambda_{s+1}^1\lambda_s^4\\
p_{23} &= \varkappa_s\bar{\varkappa}_{s+1}\lambda_s^2\lambda_{s+1}^3 - \varkappa_{s+1}\bar{\varkappa}_{s+1}^2\lambda_s^3\\
p_{24} &= \varkappa_s\bar{\varkappa}_{s+1}\lambda_s^2\lambda_{s+1}^4 - \varkappa_{s+1}\bar{\varkappa}_s\lambda_{s+1}^2\lambda_s^4\\
p_{34} &= \bar{\varkappa}_s\bar{\varkappa}_{s+1}(\lambda_s^3\lambda_{s+1}^4 - \lambda_s^4\lambda_{s+1}^3)\,.
\end{aligned}$$

Die Spuren der Berührräume sind die Geraden

$$(\lambda_{s+2}^1\bar{A}_1 + \lambda_{s+2}^2\bar{A}_2,\ \lambda_{s+2}^3\bar{A}_3 + \lambda_{s+2}^4\bar{A}_4)$$
$$(\lambda_{s+3}^1\bar{A}_1 + \lambda_{s+3}^2\bar{A}_2,\ \lambda_{s+3}^3\bar{A}_3 + \lambda_{s+3}^4\bar{A}_4)\,.$$

Ihre Plückerschen Koordinaten sind durch (20) für $i = s + 2$, $i = s + 3$ bestimmt. Die Bedingungen bei denen diese Geraden die Gerade (23) schneiden, bekommen wir in der folgenden Form:

(24)
$$\begin{aligned}
&\varkappa_s\bar{\varkappa}_{s+1}[-\lambda_s^1\lambda_{s+1}^3\lambda_{s+2}^2\lambda_{s+2}^4 + \lambda_s^1\lambda_{s+1}^4\lambda_{s+2}^2\lambda_{s+2}^3 + \lambda_s^2\lambda_{s+1}^3\lambda_{s+2}^1\lambda_{s+2}^4 -\\
&- \lambda_s^2\lambda_{s+1}^4\lambda_{s+2}^1\lambda_{s+2}^3] - \varkappa_{s+1}\bar{\varkappa}_s[-\lambda_{s+1}^1\lambda_s^3\lambda_{s+2}^2\lambda_{s+2}^4 + \lambda_{s+1}^1\lambda_s^4\lambda_{s+2}^2\lambda_{s+2}^3 +\\
&+ \lambda_{s+1}^2\lambda_s^3\lambda_{s+2}^1\lambda_{s+2}^4 - \lambda_{s+1}^2\lambda_s^4\lambda_{s+2}^1\lambda_{s+2}^3] = 0\\
&\varkappa_s\bar{\varkappa}_{s+1}[-\lambda_s^1\lambda_{s+1}^3\lambda_{s+3}^2\lambda_{s+3}^4 + \lambda_s^1\lambda_{s+1}^4\lambda_{s+3}^2\lambda_{s+3}^3 + \lambda_s^2\lambda_{s+1}^3\lambda_{s+3}^1\lambda_{s+3}^4 -\\
&- \lambda_s^2\lambda_{s+1}^4\lambda_{s+3}^1\lambda_{s+3}^3] - \varkappa_{s+1}\bar{\varkappa}_s[-\lambda_{s+1}^1\lambda_s^3\lambda_{s+3}^2\lambda_{s+3}^4 + \lambda_{s+1}^1\lambda_s^4\lambda_{s+3}^2\lambda_{s+3}^3 +\\
&+ \lambda_{s+1}^2\lambda_s^3\lambda_{s+3}^1\lambda_{s+3}^4 - \lambda_{s+1}^2\lambda_s^4\lambda_{s+3}^1\lambda_{s+3}^3] = 0
\end{aligned}$$

(24) ist ein homogenes System für die Unbekannten $\varkappa_s\bar{\varkappa}_{s+1}$ und $\varkappa_{s+1}\bar{\varkappa}_s$. Dieses System hat immer eine triviale Lösung. Wir bekommen folgende Möglichkeiten:

$$\varkappa_s = 0 \wedge \varkappa_{s+1} = 0\,, \quad \bar{\varkappa}_s = 0 \wedge \bar{\varkappa}_{s+1} = 0\,.$$

Die Lösung sind die Räume $(A_1A_2A_3A_4\bar{A}_3\bar{A}_4)$ und $(A_1A_2A_3A_4\bar{A}_1\bar{A}_2)$. Weitere Lösungen bekommen wir, wenn die Determinante der Koeffizienten bei $\varkappa_s\bar{\varkappa}_{s+1}$, $\varkappa_{s+1}\bar{\varkappa}_s$ in dem System (24) Null gleich ist. Nach längerer Berechnung bekommen wir die Bedingung (21). Bei der Gültigkeit dieser Bedingung kann man die Parameter in der folgenden Form wählen:

$$\frac{\varkappa_s}{\bar{\varkappa}_s} = \varrho[-\lambda^1_{s+1}\lambda^3_s\lambda^2_{s+2}\lambda^4_{s+2} + \lambda^1_{s+1}\lambda^4_s\lambda^2_{s+2}\lambda^3_{s+2} + \lambda^2_{s+1}\lambda^3_s\lambda^1_{s+2}\lambda^4_{s+2} - \lambda^2_{s+1}\lambda^4_s\lambda^1_{s+2}\lambda^3_{s+2}]$$

$$\frac{\varkappa_{s+1}}{\bar{\varkappa}_{s+1}} = \varrho[-\lambda^1_s\lambda^3_{s+1}\lambda^2_{s+2}\lambda^4_{s+2} + \lambda^1_s\lambda^4_{s+1}\lambda^2_{s+2}\lambda^3_{s+2} + \lambda^2_s\lambda^3_{s+1}\lambda^1_{s+2}\lambda^4_{s+2} - \lambda^2_s\lambda^4_{s+1}\lambda^1_{s+2}\lambda^3_{s+2}]$$

Im folgenden setzen wir voraus, daß die Bedingung (21) nicht gilt. Wir werden die Fragen der Existenz und der Allgemeinheit der Mannigfaltigkeit $G_r(3, 7, 4)$ lösen. Wir benützen folgende Bezeichnung:

$$\Omega_i = \varphi^k_i\omega_k \quad \text{und} \quad \Omega^*_i = \varphi^{*k}_i\omega_k\,.$$

Nach (10) ist dann $\Omega^*_i = \alpha^s_i\Omega_s$. Bei der Wahl des Bezugssystems haben wir 16 Formen gewählt. Diese Formen sind die Koeffizienten von $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3, \bar{A}_4$ in den ersten vier Gleichungen von (7). Nach den Strukturgleichungen von P_7 gelten dann die Gleichungen

$$\text{(25)} \qquad \mathrm{d}\lambda^p_i \wedge \Omega_i + \lambda^p_i\,\mathrm{d}\Omega_i = \omega^s_i \wedge \lambda^p_s\Omega_s + \lambda^l_i\Omega_i \wedge \bar{\omega}^p_l + \lambda^h_i\Omega^*_i \wedge \bar{\omega}^p_h$$

$$\text{(26)} \qquad \mathrm{d}\lambda^q_i \wedge \Omega^*_i + \lambda^q_i\,\mathrm{d}\Omega^*_i = \omega^s_i \wedge \lambda^q_s\Omega^*_s + \lambda^l_i\Omega_i \wedge \bar{\omega}^q_l + \lambda^h_i\Omega^*_i \wedge \bar{\omega}^q_h$$

$$i, k, s = 1, 2, 3, 4\,; \quad p, l = 1, 2\,; \quad q, h = 3, 4\,.$$

Durch Eliminierung von $\mathrm{d}\Omega_i$ bekommen wir 12 Bedingungen. Wenn wir die Formen aus den Gleichungen (25) (für $p = 1, 2$) eliminieren, dann bekommen wir

$$\text{(27)} \qquad [-\lambda^2_i\,\mathrm{d}\lambda^1_i + \lambda^1_i\,\mathrm{d}\lambda^2_i + \lambda^l_i(-\lambda^2_i\bar{\omega}^1_l + \lambda^1_i\bar{\omega}^2_l) + \alpha^i_i\lambda^h_i(-\lambda^2_i\bar{\omega}^1_h + \lambda^1_i\bar{\omega}^2_h)] \wedge$$
$$\wedge\ \Omega_i + [(\lambda^2_i\lambda^1_{i+j} - /\lambda^1_i\lambda^2_{i+j})\,\omega^{i+j}_i + \lambda^h_i(-\lambda^2_i\bar{\omega}^1_h + \lambda^1_i\bar{\omega}^2_h)\,\alpha^{i+1}_i] \wedge \Omega_{i+j} = 0\,,$$

i ist kein Additionsindex.

Ähnlich eliminieren wir $\mathrm{d}\Omega^*_i$ aus der Gleichung (26). Wir bekommen

$$\text{(28)} \qquad [-\lambda^4_i\,\mathrm{d}\lambda^3_i + \lambda^3_i\,\mathrm{d}\lambda^4_i + \lambda^h_i(-\lambda^4_i\bar{\omega}^3_h + \lambda^3_i\bar{\omega}^4_h) + \lambda^l_i(-\lambda^4_i\bar{\omega}^3_l + \lambda^3_i\bar{\omega}^4_l)\,\alpha^{*i}_i] \wedge$$
$$\wedge\ \Omega^*_i + [\omega^{i+j}_i(\lambda^4_i\lambda^3_{i+j} - \lambda^3_i\lambda^4_{i+j}) + \lambda^l_i(-\lambda^4_i\bar{\omega}^3_l + \lambda^3_i\bar{\omega}^4_l)\,\alpha^{*i+j}_i] \wedge \Omega^*_{i+j} = 0\,.$$

Die letzten vier Bedingungen bekommen wir, wenn wir in die Gleichung (25) $p = 1$ einsetzen, wenn wir daraus $\mathrm{d}\Omega_i$ berechnen und die Gleichung (26) für $q = 3$ einsetzen. Dann bekommen wir

$$\lambda^1_i\,\mathrm{d}\Omega_i = -\mathrm{d}\lambda^1_i \wedge \Omega_i + \omega^s_i \wedge \lambda^1_s\Omega_s + \lambda^h_i\Omega_i \wedge \bar{\omega}^1_l + \lambda^h_i\alpha^k_i\Omega_k \wedge \bar{\omega}^1_h$$

$$\mathrm{d}\lambda^3_i \wedge \alpha^k_i\Omega_k + \lambda^3_i\,\mathrm{d}[\alpha^k_i\Omega_k] = \omega^s_i \wedge \lambda^3_s\alpha^k_s\Omega_k + \lambda^l_i\Omega_i \wedge \bar{\omega}^3_l + \lambda^h_i\alpha^k_i\Omega_k \wedge \bar{\omega}^3_h\,.$$

Dabei wurde die Beziehung (10) benützt. Wir bekommen die Gleichungen

$$(29) \qquad \lambda_i^3[\mathrm{d}\alpha_i^k + (\ldots) \wedge \Omega_k] = 0\,,$$

$(\ldots)$ sind die Formen, die $\mathrm{d}\alpha_i^k$ nicht enthalten. Man muß nun die Allgemeinheit der Lösung des Systems (27), (28), (29) finden. Wir führen noch folgende Bezeichnungen ein:

$$(30) \qquad \begin{aligned}
\Phi_{12i} &= -\lambda_i^2\,\mathrm{d}\lambda_i^1 + \lambda_i^1\,\mathrm{d}\lambda_i^2 + \lambda_i^l(-\lambda_i^2\bar{\omega}_l^1 + \lambda_i^1\bar{\omega}_l^2) + \alpha_i^i\lambda_i^h(-\lambda_i^2\bar{\omega}_h^1 + \lambda_i^1\bar{\omega}_h^2)\\
\Phi_{34i} &= -\lambda_i^4\,\mathrm{d}\lambda_i^3 + \lambda_i^3\,\mathrm{d}\lambda_i^4 + \lambda_i^h(-\lambda_i^4\bar{\omega}_h^3 + \lambda_i^3\bar{\omega}_h^4) + \alpha_i^*\lambda_i^l(-\lambda_i^4\bar{\omega}_l^3 + \lambda_i^3\bar{\omega}_l^4)\\
T_{i+1}^{12} &= \quad (\lambda_i^2\lambda_{i+j}^1 - \lambda_i^1\lambda_{i+j}^2)\,\omega_i^{i+j} + \lambda_i^h(-\lambda_i^2\bar{\omega}_h^1 + \lambda_i^1\bar{\omega}_h^2)\,\alpha_i^{i+j}\\
T_{i+j}^{34} &= (\lambda_i^4\lambda_{i+j}^3 - \lambda_i^3\lambda_{i+j}^4)\,\omega_i^{i+j} + \lambda_i^l(-\lambda_i^4\bar{\omega}_l^3 + \lambda_i^3\bar{\omega}_l^4)\,\alpha_i^{*i+j}\,,\\
&\quad i = 1, 2, 3, 4\,;\quad j = 1, 2, 3\,;\quad h = 3, 4\,;\quad l = 1, 2\,.
\end{aligned}$$

Die Gleichungen (27), (28) kann man in der folgenden Form ausdrücken:

$$(31) \qquad \begin{aligned}
&\Phi_{12i} \wedge \Omega_i + T_{i+1}^{12} \wedge \Omega_{i+1} + T_{i+2}^{12} \wedge \Omega_{i+2} + T_{i+3}^{12} \wedge \Omega_{i+3} = 0\\
&\Phi_{34i} \wedge \Omega_i^* + T_{i+1}^{34} \wedge \Omega_{i+1}^* + T_{i+2}^{34} \wedge \Omega_{i+2}^* + T_{i+3}^{34} \wedge \Omega_{i+3}^* = 0\,.
\end{aligned}$$

Betrachten wir die Formen T_{i+j}^{12}, T_{i+j}^{34}, $i = 1, 2, 3, 4$; $j = 1, 2, 3$. Wenn i fest ist, dann haben wir sechs solche Formen und sie sind die linearen Kombinationen von fünf Formen

$$(32) \qquad \begin{aligned}
&\omega_i^{i+j},\ \lambda_i^3(-\lambda_i^2\bar{\omega}_3^1 + \lambda_i^1\bar{\omega}_3^2) + \lambda_i^4(-\lambda_i^2\bar{\omega}_4^1 + \lambda_i^1\bar{\omega}_4^2)\,,\\
&\lambda_i^1(-\lambda_i^4\bar{\omega}_1^3 + \lambda_i^3\bar{\omega}_1^4) + \lambda_i^2(-\lambda_i^4\bar{\omega}_2^3 + \lambda_i^3\bar{\omega}_2^4)\,.
\end{aligned}$$

Die Formen T_{i+j}^{12}, T_{i+j}^{34} sind linear abhängig. Es gilt dann:

$$(33) \qquad A_{i1}T_{i+1}^{12} + A_{i2}T_{i+2}^{12} + A_{i3}T_{i+3}^{12} + B_{i1}T_{i+1}^{34} + B_{i2}T_{i+2}^{34} + B_{i3}T_{i+3}^{34} = 0$$

Wir wählen noch folgende Bezeichnung:

$$\Delta_{i+j} = (\lambda_i^2\lambda_{i+j}^1 - \lambda_i^1\lambda_{i+j}^2)\,,\quad \Delta_{i+j}^* = (\lambda_i^4\lambda_{i+j}^3 - \lambda_i^3\lambda_{i+j}^4)\,.$$

Wir benützen die Gleichungen (30) und setzen in die Gleichungen (33) ein. Wir bekommen lineare Kombinationen der Formen (32), die nicht abhängig sind. Ihre lineare Kombination ist nur dann Null gleich, wenn ihre Koefizienten gleich Null sind. In diesem Falle gilt dann

$$\begin{aligned}
&A_{i1}\Delta_{i+1} + B_{i1}\Delta_{i+1}^* = 0 \qquad && A_{i1}\alpha_i^{i+1} + A_{i2}\alpha_i^{i+2} + A_{i3}\alpha_i^{i+3} = 0\\
&A_{i2}\Delta_{i+2} + B_{i2}\Delta_{i+2}^* = 0 && B_{i1}\alpha_i^{*i+1} + B_{i2}\alpha_i^{*i+2} + B_{i3}\alpha_i^{*i+3} = 0\,.\\
&A_{i3}\Delta_{i+3} + B_{i3}\Delta_{i+3}^* = 0
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$A_{i1}\alpha_i^{i+1} + A_{i2}\alpha_i^{i+2} + A_{i3}\alpha_i^{i+3} = 0$$

$$-A_{i1}\frac{\Delta_{i+1}}{\Delta_{i+1}^*}\alpha_i^{*i+1} - A_{i2}\frac{\Delta_{i+2}}{\Delta_{i+2}^*}\alpha_i^{*i+2} - A_{i3}\frac{\Delta_{i+3}}{\Delta_{i+3}^*}\alpha_i^{*i+3} = 0\,.$$

Ferner kann man $A_{i1}, A_{i2}, A_{i3}, B_{i1}, B_{i2}, B_{i3}$ bis auf eine Umnormierung berechnen. Wir bekommen dann

$$A_{i1} = \varrho\left(-\alpha_i^{i+2}\alpha_i^{*i+3}\frac{\Delta_{i+3}}{\Delta_{i+3}^*} + \alpha_i^{i+3}\alpha_i^{*i+2}\frac{\Delta_{i+2}}{\Delta_{i+2}^*}\right)$$

und ähnlich auch die weiteren Koeffizienten. In allgemeinem Fall ist B_{i3} nicht Null gleich, man kann T_{i+3}^{12} bis auf die Umnormierung als linear Kombinationen von $T_{i+1}^{12}, T_{i+2}^{12}, T_{i+1}^{34}, T_{i+2}^{34}, T_{i+3}^{34}$ bestimmen:

$$T_{i+3}^{12} = a_1 T_{i+1}^{12} + a_2 T_{i+2}^{12} + a_4 T_{i+1}^{34} + a_5 T_{i+2}^{34} + a_6 T_{i+3}^{34}\,. \tag{34}$$

Diesen Ausdruck für T_{i+3}^{12} setzen wir in die Gleichungen (31) ein und wir bekommen

$$\begin{aligned}
&\Phi_{12i} \wedge \Omega_i + T_{i+1}^{12} \wedge \Omega_{i+1} + T_{i+2}^{12} \wedge \Omega_{i+2} + \\
&\quad + \left(a_1 T_{i+1}^{12} + a_2 T_{i+2}^{12} + a_4 T_{i+1}^{34} + a_5 T_{i+2}^{34} + a_6 T_{i+3}^{34}\right) \wedge \Omega_{i+3} = 0 \\
&\Phi_{34i} \wedge \Omega_i^* + T_{i+1}^{34} \wedge \Omega_{i+1}^* + T_{i+2}^{34} \wedge \Omega_{i+2}^* + T_{i+3}^{34} \wedge \Omega_{i+3}^* = 0\,.
\end{aligned}$$

Das betrachtete System hat dann folgende Form:

$$\begin{aligned}
&\lambda_i^3(\mathrm{d}\alpha_i^s + (\ldots) \wedge \Omega_s) = 0 \\
&\Phi_{34i} \wedge \Omega_i^* + T_{i+1}^{34} \wedge \Omega_{i+1}^* + T_{i+2}^{34} \wedge \Omega_{i+2}^* + T_{i+3}^{34} \wedge \Omega_{i+3}^* = 0 \\
&\Phi_{12i} \wedge \Omega_i + T_{i+1}^{12} \wedge \Omega_{i+1} + T_{i+2}^{12} + \Omega_{i+2} + \\
&\quad + \left(a_1 T_{i+1}^{12} + a_2 T_{i+2}^{12} + a_4 T_{i+1}^{34} + a_5 T_{i+2}^{34} + a_6 T_{i+3}^{34}\right) \wedge \Omega_{i+3} = 0\,.
\end{aligned} \tag{35}$$

Zwischen den Größen α_i^s ist im allgemeinen keine Beziehung, die Formen $\mathrm{d}\alpha_i^s + (\ldots)$ können wir als 16 unabhängige Formen betrachten. Dieses System enthält $4.7 + 16 = 44$ unabhängige Formen: $\Phi_{34i}, \Phi_{12i}, T_{i+1}^{34}, T_{i+2}^{34}, T_{i+3}^{34}, T_{i+1}^{12}, T_{i+2}^{12}, \mathrm{d}\alpha_i^s + (\ldots)$, $i, s = 1, 2, 3, 4$. Wir berechnen nun das Integralelement ε_3. $u_i^{(q)}$ seien die Werte von Ω_i, $(q) = 1, 2, 3$. Setzen wir voraus, daß im allgemeinen $u_i^{(q)}$ unabhängig sind. Zu diesen Werten gehören dann die Größen $u_i^{*(q)} = \alpha_i^s u_s^{(q)}$. Die Matrix (α_i^s) ist im allgemeinen Fall regulär, die Größen $u_i^{*(q)}$ sind auch unabhängig. Das zum System der quadratischen äußeren Formen und zum Element ε_3 gehörige Polarsystem hat folgende Form:

$$\begin{aligned}
&\{\mathrm{d}\alpha_i^s + (\ldots)\}\, u_s^{(q)} = 0 \\
&\Phi_{34i} u_i^{*(q)} + T_{i+1}^{34} u_{i+1}^{*(q)} + T_{i+2}^{34} u_{i+2}^{*(q)} + T_{i+3}^{34} u_{i+3}^{*(q)} = 0 \\
&\Phi_{12i} u_i^{(q)} + T_{i+1}^{12} u_{i+1}^{(q)} + T_{i+2}^{12} u_{i+2}^{(q)} + \\
&\quad + \left(a_1 T_{i+1}^{12} + a_2 T_{i+2}^{12} + a_4 T_{i+1}^{34} + a_5 T_{i+2}^{34} + a_6 T_{i+3}^{34}\right) u_{i+3}^{(q)} = 0\,.
\end{aligned} \tag{36}$$

Die Matrix $\left(u_i^{*(q)}, u_{i+1}^{*(q)}, u_{i+2}^{*(q)}, u_{i+3}^{*(q)}\right)$ hat im allgemeinen Fall den Rang 3 ($q = 1, 2, 3$ sind die Zeilen der Matrix). Es existiert wenigstens eine Subdeterminante dritter Ordnung von dieser Matrix, die nicht gleich Null ist. Setzen wir im folgenden voraus, daß es die Determinante $\left(u_i^{*(q)}, u_{i+1}^{*(q)}, u_{i+2}^{*(q)}\right)$ ist. Für die übrigen Fälle ist die

Lösung ähnlich. Wir berechnen die Determinante D aus den Koeffizienten von $\Phi_{34i}, T^{34}_{i+1}, T^{34}_{i+2}, \Phi_{12i}, T^{12}_{i+1}, T^{12}_{i+2}$ in den Gleichungen (36). Es gilt dann

$$D = \left(u^{*(q)}_i, u^{*(q)}_{i+1}, u^{*(q)}_{i+2}\right)\left(u^{(q)}_i, u^{(q)}_{i+1} + a_1 u^{(q)}_{i+3}, u^{(q)}_{i+2} + a_2 u^{(q)}_{i+3}\right).$$

Die Faktoren auf der rechten Seite sind im allgemeinen Fall von Null verschieden. Der Rang des Systems (36) ist gleich $3.12 = 36$, für die Charaktere des Systems gilt $s_1 = s_2 = s_3 = 12$, $s_4 = 44 - 36 = 8$. In den Gleichungen (35) benützen wir das Lemma von Cartan. Wir bekommen die unbekannten Formen als lineare Kombinationen von $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4$ mit Hilfe von 120 Parametern. Die Formen T^{12}_{i+3} sind lineare Kombinationen der Formen $T^{12}_{i+1}, T^{12}_{i+2}, T^{34}_{i+1}, T^{34}_{i+2}, T^{34}_{i+3}$. Zwischen den Parametern gelten $4.4 = 16$ Beziehungen. Wir haben also $N = 120 - 16 = 104$ Parameter, $Q = s_1 + 2s_2 + 3s_3 + 4s_4 = 72 + 32 = 104 = N$. Daraus folgt

Satz 6. *Das System, daß die Mannigfaltigkeit $G_r(3, 7, 4)$ definiert, ist involutorisch, die Lösung hängt von acht Funktionen von vier Unbekannten ab.*

Literaturverzeichniss

[1] *S. P. Finikov:* Теория конгруенций, Moskva 1956.

[2] *S. P. Finikov:* Теория пар конгруенций, Moskva 1956.

[3] *S. P. Finkov:* Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. Moskva 1948.

[4] *L. E. Krugljakov:* Основы проективно-дифференциальной геометрии семейства многомерных плоскостей. Tomsk 1980.

[5] *K. Svoboda:* Über die Punktdeformation einer vollständig fokalen Pseudokongruenz. Math. Nachrichten *38* (1968), S. 197—206.

[6] *A. Švec:* Projective differential geometry of line congruences. Praha 1965.

[7] *J. Vala:* Über die Torsalsysteme des Kongruenzenpaares. Časopis pěst. mat. *96* (1971), 18—32.

[8] *J. Vala:* Über einige Mannigfaltigkeiten mit linearen Erzeugenden, Czechoslovak Math. J. *22* (*97*) (1972), 242—265.

[9] *J. Vala:* The special Grassman manifolds V^4_3 in the projective space P_7 (v tisku).

Souhrn

O NĚKTERÝCH SPECIÁLNÍCH SYSTÉMECH TROJROZMĚRNÝCH PROSTORŮ V PROJEKTIVNÍM PROSTORU P_7

HANA ČERMÁKOVÁ

V prostoru P_7 se studuje 4-parametrická varieta, jejíž tvořící prostory jsou prostory P_3. Charakteristikou takové variety je plocha 4. stupně. Ve speciálním případě existují na takových plochách přímky, nebo tyto plochy mají singulární body. Jsou studovány geometrické vlastnosti těchto variet a řešeny otázky jejich existence.

Резюме

О НЕКОТОРЫХ СПЕЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ ТРЕХМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВ В ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Hana Čermáková

В пространстве P_7 исследуется 4-параметрическое многообразие, состоящее из 3-параметрических пространств P_3. Характеристику этого многообразия составляют поверхности четвёртого порядка. Предполагается, что на этих поверхностях находятся прямые, или эти поверхности имеют особые точки. Исследуются такие многообразия, найдённы их геометрические свойства и решаются вопросы существования.

Anschrift des Verfassers: Katedra matematiky a deskriptivní geometrie stavební fakulty VUT, Barvičova 85, 662 37 Brno.