Časopis pro pěstování matematiky

Jaroslav Lukeš

Semiregulární množiny v harmonických prostorech

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 100 (1975), No. 2, 195--197

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108765

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 100 (1975), Praha

ÚLOHY A PROBLÉMY

SEMIREGULÁRNÍ MNOŽINY V HARMONICKÝCH PROSTORECH

JAROSLAV LUKEŠ, Praha

V tomto časopise, *roč.* 97 (1972), str. 334, předložil JOSEF KRÁL následující úlohu: Nechť U je resolutivní množina s hranicí $U^* \neq \emptyset$ v harmonickém prostoru X (viz [1]) a označme pro každý kompakt $K \subset X$ symbolem $C(K)$ prostor všech spojitých (konečných) reálných funkcí na K. Každé funkci $f \in C(U^*)$ je tedy přiřazena harmonická funkce H_f^U na U, která je zobecněným řešením (v Perronově smyslu) Dirichletovy úlohy příslušné k množině U a okrajové podmínce f. Nechť U_r značí množinu všech $x \in U^*$, pro něž $\lim\limits_{y \to x, y \in U} H_f^U(y) = f(x)$ pro každou funkci $f \in C(U^*)$. Množina U se nazývá semiregulární, jestliže pro každou funkci $f \in C(U^*)$ lze příslušnou funkci H_f^U rozšířit na $F \in C(U \cup U^*)$. Je-li U semiregulární, pak U_r je kompaktní. Obrácení tohoto tvrzení neplatí v Bauerových harmonických prostorech. Rozhodněte, zda obrácené tvrzení platí v Brelotových prostorech (nebo alespoň v harmonickém prostoru indukovaném klasickými harmonickými funkcemi na n-rozměrném euklidovském prostoru $X = R^n$), tj. rozhodněte o správnosti následujícího

Tvrzení. *Nechť X je Brelotův prostor a buď $U \subset X$ relativně kompaktní otevřená (a tedy resolutivní) množina, $U^* \neq \emptyset$. Pak U je semiregulární, právě když U_r je kompaktní.*

IVAN NETUKA dokázal v tomto časopise, roč. *98* (1973), str. 419–421 v poznámce o semiregulárních množinách, že odpověď na uvedenou otázku je kladná, jestliže množina $U_{ir} = U^* \setminus U_r$ všech iregulárních bodů je polární. Není těžké sestrojit příklad Brelotova harmonického prostoru, v němž existuje otevřená relativně kompaktní množina s uzavřenou množinou regulárních bodů, která není semiregulární. Jeden příklad takového prostoru podává C. CONSTANTINESCU v Rev. Roum. Math. Pures Appl. *10* (1965), 267–270, jiný uvádí Ivan Netuka v tomto časopise, roč. *99* (1974), 90–93. V této poznámce podáme úplnou charakteristiku semiregulárních množin v obecných, ne nutně Brelotových, harmonických prostorech. Dokážeme totiž následující větu.

Věta. *Nechť $(X, \mathscr{H})$ je silný harmonický prostor ve smyslu Bauerovy axiomatiky [3], v němž konstanty jsou harmonické funkce a kde harmonické funkce oddělují body. Potom relativně kompaktní otevřená množina U je semiregulární, právě když množina regulárních bodů je kompaktní a množina iregulárních bodů má harmonickou míru 0 v každém bodě množiny U.*

Jestliže $A \subset U^*$, říkejme v dalším krátce, že A je *nulová*, má-li harmonickou míru 0 v každém bodě množiny U. Poznamenejme, že každá polární množina obsažená v U^* je nulová a že obecně množina iregulárních bodů může mít v některých bodech, anebo i ve všech bodech, množiny U, kladnou harmonickou míru.

K důkazu uvedené věty využijeme podstatně výsledků prací [4] a [5], shrňme tedy jejich nejdůležitější myšlenky.

Buď Y kompaktní metrický prostor a $\mathscr{A}$ uzavřený lineární podprostor $C(Y)$ obsahující konstanty a oddělující body Y. Na $\mathscr{A}$ uvažujme supremovou normu a označme $\mathscr{A}'$ topologický duál a $\mathscr{A}'^{+}$ jeho positivní kužel. Zobrazení $\delta : x \mapsto \varepsilon_x$, kde ε_x značí Diracovu míru v bodě x, je homeomorfním vnořením Y do $\mathscr{A}'^{+}$ a Choquetova hranice $\mathrm{Ch}_{\mathscr{A}}\, Y$ je právě vzor všech extremálních bodů množiny $S(\mathscr{A})$ při zobrazení δ, kde $S(\mathscr{A})$ je slabý uzávěr konvexního obalu $\delta(Y)$ v $\mathscr{A}'^{+}$. Je známo, že následující dvě podmínky jsou ekvivalentní:

(i) $S(\mathscr{A})$ je Choquetův simplex,

(ii) pro každý kompakt $K \subset \mathrm{Ch}_{\mathscr{A}}\, Y$ lze každou spojitou funkci na K prodloužit na funkci z $\mathscr{A}$ se stejnou normou.

Předpokládejme nyní, že $(X, \mathscr{H})$ je silný harmonický prostor ve smyslu Bauerovy axiomatiky [3] a nechť pro jednoduchost konstantní funkce jsou harmonické a harmonické funkce oddělují body X. Je-li $U \subset X$ relativně kompaktní otevřená množina a zvolíme-li za $\mathscr{A}$ systém všech spojitých funkcí na $\overline{U}$, které jsou harmonické v U, vzniká otázka, zda pro tento systém funkcí je splněna některá z ekvivalentních podmínek (i) či (ii). Takto formulovali v [6] svůj problém E. G. Effros a J. L. Kazdan, přičemž sami dokázali, že při splnění dodatečného tzv. dominačního axiomu D, je vždy $S(\mathscr{A})$ simplex. Nedávno J. Bliedtner a W. Hansen v práci [4] ukázali, že $S(\mathscr{A})$ je simplex bez jakýchkoliv dalších axiomů. Navíc v [5] dokázali (Proposition 7), že maximální míry v Choquetově uspořádání representující body množiny $\overline{U}$ splývají s vymetenými (balayage) Diracovými měrami na doplněk U (což jsou v podstatě harmonické míry) v každém bodě $\overline{U}$, právě když množina iregulárních bodů je nulová. Protože bod $x \in U^*$ leží v Choquetově hranici, právě když maximální míra jej representující je právě Diracova míra, a bod $x \in U^*$ je regulárním bodem množiny U, právě když Diracova míra v tomto bodě splývá s vymetenou Diracovou měrou, dostáváme odtud ihned následující

Lemma. *Je-li množina iregulárních bodů nulová, splývá Choquetova hranice s množinou regulárních bodů.*

Přejděme nyní k důkazu hlavní věty uvedené v úvodu. Je-li U semiregulární množina, potom je množina iregulárních bodů nulová (viz [2], Věta 35). Nechť naopak pro otevřenou relativně kompaktní množinu U je množina U_r uzavřená a množina U_{ir} nulová. Podle lemmatu víme, že $U_r = \mathrm{Ch}_{\mathscr{A}} \overline{U}$. Zvolme $f \in C(U^*)$ a označme $F = f \upharpoonright U_r$. Podle (ii) existuje $G \in C(\overline{U})$ a harmonická na U tak, že $F = G \upharpoonright U_r$. Stačí nyní dokázat, že $H_f^U = G$ na U. Položíme-li ovšem $\Phi = H_f^U - G$ na U, jest funkce Φ harmonická a omezená na U a pro každé $z \in U_r$ jest $\lim_{x \to z} \Phi(x) = 0$. Odtud podle principu minima pro harmonické funkce (viz [3], Věta 4.4.6) vyplývá, že $\Phi = 0$ na U.

Literatura

[1] *C. Constantinescu:* Harmonic spaces and their connections with the semi-elliptic differential equations and with Markov processes, Elliptische Differentialgleichungen (Symposium), Akademie-Verlag, Berlin 1969.

[2] *H. Bauer:* Axiomatische Behandlung des Dirichletschen Problems für elliptische und parabolische Differentialgleichungen, Math. Ann. *146* (1962), 1—59.

[3] *H. Bauer:* Harmonische Räume und ihre Potentialtheorie, Lecture Notes in Mathematics, vol. *22*, Springer-Verlag, Berlin/New York, 1966.

[4] *J. Bliedtner - W. Hansen:* Simplexes et espaces harmoniques, CR Acad. Sci. Paris, Sér. A, *278*, 757—759.

[5] *J. Bliedtner - W. Hansen:* Cônes de fonctions surharmoniques. Caractérisation de la frontière de Choquet, CR Acad. Sci. Paris, Sér. A, *278*, 1299—1301.

[6] *E. G. Effros - J. L. Kazdan:* Applications of Choquet simplexes to elliptic and parabolic boundary value problems, J. Diff. Equations *8* (1970), 95—134.

Adresa autora: 186 00 Praha 8, Sokolovská 83 (Matematicko-fyzikální fakulta UK).