Pavel Bartoš

Poznámka o určení simplexu rovinami a o parametrickom vyjadrení súradníc jeho bodov

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 90 (1965), No. 3, 366--368

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108751`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 90 (1965), Praha

RŮZNÉ

POZNÁMKA O URČENÍ SIMPLEXU ROVINAMI A O PARAMETRICKOM VYJADRENÍ SÚRADNÍC JEHO BODOV

PAVEL BARTOŠ, Bratislava

Majme $n + 1$ rovín v n-rozmernom euklidovskom priestore E_n $(n \geqq 2)$ takých, že každých n týchto rovín má spoločný práve jeden bod. Týmito rovinami, ktorých rovnice píšeme v tvare

$$\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}x_k + b_i = 0\,, \quad (i = 1, 2, \ldots, n + 1) \tag{1}$$

je určený jediný simplex v E_n ako prenik $n + 1$ polpriestorov týmito rovinami určených. Ukážeme, ako treba vybrať túto jedinú kombináciu $n + 1$ polpriestorov spomedzi všetkých $2(n + 1)$ polpriestorov určených rovinami (1).

Oba polpriestory určené každou z rovín (1) vyjadríme analyticky rovnicami

$$\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}x_k + b_i = l_i \quad \text{resp.} \quad \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}x_k + b_i = -l_i\,, \tag{2}$$

kde parameter l_i prebieha všetky nezáporné čísla.

Utvorme takú kombináciu polpriestorov (2), v ktorej je obsažený pre každý index $i = 1, 2, \ldots, n + 1$ práve jeden (a to ktorýkoľvek) z dvoch opačných polpriestorov. Vezmime napr. polpriestory

$$\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}x_k + b_i = l_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n + 1)\,. \tag{3}$$

Z $n + 1$ rovníc (3) vylúčením $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dostaneme

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, & \ldots, & a_{1,n}, & b_1 - l_1 \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & \ldots, & a_{2,n}, & b_2 - l_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n+1,1}, & a_{n+1,2}, & \ldots, & a_{n+1,n}, & b_{n+1} - l_{n+1} \end{vmatrix} = 0\,. \tag{4}$$

Ak tento determinant rozvedieme podľa prvkov posledného stĺpca, po malej úprave dostaneme

$$\sum_{i=1}^{n+1} \Delta_i l_i = \sum_{i=1}^{n+1} \Delta_i b_i = \Delta\,, \tag{5}$$

kde Δ_i je doplnok prvku $b_i - l_i$.

Aby prenik uvažovaných polpriestorov bol simplexom, je nutné a postačujúce, aby hodnoty nezáporných parametrov boli i zhora ohraničené. Táto podmienka však bude zrejme splnená vtedy a len vtedy, keď v rovnici (5) bude platiť

$$\text{sign}\, \Delta_i = \text{sign}\, \Delta \neq 0 \tag{6}$$

pre všetky indexy $i = 1, 2, \ldots, n + 1$.[1]) Potom totiž platí

$$0 \leqq l_i \leqq \frac{|\Delta|}{|\Delta_i|} \quad (i = 1, 2, \ldots, n + 1)$$

a teda tak parametre l_i, ako aj súradnice x_k sú ohraničené a takým je aj príslušný útvar. Keby však (hoci len pre jeden) index i neplatil vzťah (6), boli by podľa (5) prípustné ľubovoľné nezáporné hodnoty všetkých parametrov l_i; príslušný útvar by bol neohraničený a nebol by simplexom. V tomto prípade však môžeme jednoducho korigovať nevyhovujúcu kombináciu polpriestorov (3), a to tak, že píšeme $-l_i$ miesto l_i všade tam, kde pre index i nie je splnený vzťah (6).

Je zrejmé, ako použiť prakticky tieto výsledky. Ukážeme to na príklade v E_3.

Príklad. Stanovte, ktoré polpriestory určené rovinami

$$2x + y + z = 6\,; \quad x + y - 2z = 2\,; \quad x + 2y + z = 3\,; \quad 2x + 3y + z = 6$$

vytvoria štvorsten.

Uvažujme o polpriestoroch

$$2x + y + z - 6 = l_1\,, \quad x + y - 2z - 2 = l_2\,, \quad x + 2y + 2 - 3 = l_3\,,$$
$$2x + 3y + z - 6 = l_4\,.$$

Dosadením a vyčíslením determinantu (4) dostaneme

$$l_1 + l_2 + 5l_3 - 4l_4 = 2\,.$$

Tento výsledok ukazuje, že v štvrtej rovnici treba zmeniť znamienko l_4. Danými rovinami určený štvorsten je teda prenikom polpriestorov

$$2x + y + z \geqq 6\,, \quad x + y - 2z \geqq 2\,, \quad x + 2y + z \geqq 3\,, \quad 2x + 3y + z \leqq 6$$

a vzťah medzi parametrami bude $l_1 + l_2 + 5l_3 + 4l_4 = 2$.

Z našej úvahy vyplýva aj metóda parametrického vyjadrenia súradníc bodov simplexu v E_n. K tomu voľme ktorýchkoľvek n rovníc (3), ak je nimi simplex určený, napr. pre $i = 1, 2, \ldots, n$. Keďže tieto rovnice sú lineárne nezávislé, možno z nich určiť súradnice $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ako funkcie nezáporných parametrov $l_1, l_2, \ldots, l_n$.

[1]) Prípad $\Delta = 0$, sign $\Delta_i =$ konšt. $\neq 0$ pre $i = 1, 2, \ldots, n + 1$ by znamenal $l_1 = l_2 = l_3 = \ldots = l_{n+1} = 0$ a rovniciam (3) by vyhovoval jediný bod. Tento prípad vylučujeme.

Súradnicami bodov simplexu budú hodnoty týchto funkcií, keď parametre budú vyhovovať podľa (5) vzťahu

$$\sum_{b=1}^{n} |\Delta_i| \, l_i \leqq |\Delta| \,, \quad \text{lebo } 0 \leqq l_{n+1} \leqq \left| \frac{\Delta}{\Delta_{n+1}} \right| \text{ [2]} .$$

V našom príklade riešením sústavy

(7) $2x + y + z = 6 + l_1 \,, \quad x + y - 2z = 2 + l_2 \,, \quad x + 2y + z = 3 + l_3$

dostaneme

(8) $$x = \tfrac{1}{8}(21 + 5l_1 + l_2 - 3l_3) \,, \quad y = \tfrac{1}{8}(-1 - 3l_1 + l_2 + 5l_3) \,,$$
$$z = \tfrac{1}{8}(5 + l_1 - 3l_2 + l_3)$$

čo je parametrické vyjadrenie súradníc bodov simplexu v tom prípade, ak nezáporné parametre spĺňajú vzťah, ktorý dostaneme, keď tieto výrazy dosadíme do poslednej rovnice $2x + 3y + z = 6 - l_4$. Po úprave dostaneme, ako prvej, $l_1 + l_2 + 5l_3 + 4l_4 = 2$, a teda parametre l_1, l_2, l_3 vo vyjadrení (8) musia spĺňať nerovnosť $l_1 + l_2 + 5l_3 \leqq 2$.

[2]) Pri voľbe inej n-tice rovníc dostaneme výsledok, ktorý sa líši len formálne a určuje tú istú množinu bodov.