Jan Kadlec

О некоторых свойствах решений эллиптических дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с неограниченным интегралом Дирихле

*Časopis pro pěstování matematiky*, Vol. 88 (1963), No. 2, 142--155

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108746`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 88 (1963), Praha

# О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА С НЕОГРАНИЧЕННЫМ ИНТЕГРАЛОМ ДИРИХЛЕ

ЯН КАДЛЕЦ (Jan Kadlec), Прага

(Поступило в редакцию 16/XI 1961 г.)

В настоящей работе показано существование производной Нечаса по внешней конормали решения задачи Пуассона с правой частью, интегрируемой с квадратом, и решается задача Дирихле при краевом условии, тоже интегрируемом с квадратом, для несамосопряженного оператора в области с границей, удовлетворяющей условию Липшица.

## ВВЕДЕНИЕ

Настоящую работу можно понимать как продолжение работы Й. Нечаса [1], в которой для областей типа $\mathfrak{N}$ и самосопряженных эллиптических операторов с коэффициентами в пространстве $C^{(1)}$ доказывается существование слабой[1]) производной решения задачи Пуассона по внешней конормали в смысле Нечаса, существование которой не вытекает из теорем вложения. На основе свойств этой производной можно определить решение задачи Дирихле с краевым условием $g \in L_2(\Omega^{\cdot})$ и доказать существование и однозначность этого решения.

Результаты, полученные Нечасом, теперь расширим на случай несамосопряженного эллиптического оператора с коэффициентами в пространстве $C^{(0),1}$. Соотношение (2.4) позволяет нам перенести результаты на несамосопрояженный случай. Для получения необходимых результатов мы должны воспользоваться теоремой Кошелева и мы считаем целесообразным ввести теорему 2.10, которая позволяет ограничиться теоремой Кошелева для случая $p = 2$, так как доказательство этого случая ведется проще. Поскольку мы, в сущности, исходим из работы Нечаса [1], то не считаем нужным входить в подробности доказательств некоторых теорем, встречающихся в выше цитированной работе.

*В конце я хотел бы выразить благодарность* Й. НЕЧАСУ *за полезные советы и внимание к этой работе.*

[1]) „Слабая" здесь не понимается в смысле Соболева, но в более обобщенном смысле (смотри [1]).

## 1. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ И ПУАССОНА

**1.1.** В далнейшем мы сохраним следующие обозначения:

Пусть $E_n$ обозначает $n$-мерное евклидово пространство с координатами $[x_1, \ldots, x_n]$. Пусть $\Omega$ — ограниченная область. Область будет принадлежать к множеству $\mathfrak{N}^{(0),1}$, если будут выполнены следующие предположения:

1. Существует $m$ систем координат в $E_n$ и $m$ функций $a_r$, $r = 1, 2, \ldots, m$, так, что каждую точку границы можно записать хотя бы в одной из этих систем координат в виде

$$[x_{r1}, x_{r2}, \ldots, x_{r\,n-1}, a_r(x_{r1}, \ldots, x_{r\,n-1})]\,,$$

что мы будем записывать сокращенно $[X_r, a_r(X_r)]$. Относительно функций $a_r$ мы предпологаем, что они удовлетворяют условию Липшица в параллелепипеде $|x_{r_i}| < \alpha$, $i \neq n$ с фиксированной константой $K$.[2])

2. Существует число $\beta \leqq 1$ так, что точка с координатами $X_r \in C_r$, $a_r(X_r) - \beta < X_{rn} < a_r(X_r)$ лежит внутри $\Omega$, а точка с координатами $X_r \in C_r$, $a_r(X_r) < X_{rn} < a_r(X_r) + \beta$ лежит вне $\Omega$.

3. Если область $\Omega$ принадлежит к множеству $\mathfrak{N}^{(0),1}$, то имеет место следующее предположение (смотри [2]): Существует последовательность подобластей $\Omega_k$, $k = 1, 2, \ldots$ таких, что $\Omega_k \subset \Omega_{k+1} \subset \Omega$, $\lim\limits_{k \to \infty} \Omega_k = \Omega$. При этом точки границ областей $\Omega_k$ можно записать в виде $[X_r, a_{rk}(X_r)]$, где функции $a_{rk}$ являются в параллелепипеде $C_r$ бесконечно дифференцируемыми и удовлетворяющими условию Липшица с одной и той же константой $K$ (независимой от $k$) и

$$\lim_{k \to \infty} \int_{C_r} \left[ \sum_{i=1}^{n-1} \left( \frac{\partial a_{rk}}{\partial x_{ri}} - \frac{\partial a_r}{\partial x_{ri}} \right)^2 \right] \mathrm{d}X_r = 0\,,$$

$$a_r(X_r) - \beta < a_{rk}(X_r) \leqq a_r(X_r)\,.$$

Если $\Omega = \Omega_1$, то будем писать $\Omega \in \mathfrak{M}$.

Символом $\mathscr{D}(\Omega)$ обозначим множество бесконечно дифференцируемых функций в области $\Omega$, которые обладают компактным носителем в $\Omega$, $\mathscr{E}(\Omega)$ — пространство бесконечно дифференцируемых функций, непрерывно продолжаемых со всеми своими производными на $\overline{\Omega}$.

Далее обозначим

$$\Delta(u, v) = \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \mathrm{d}\Omega\,,$$

$$(u, v) = \int_{\Omega} uv\, \mathrm{d}\Omega\,.$$

---

[2]) Запишем $X_r \in C$ .

Пусть $W_2^{(1)}(\Omega)$ — пространство функций, первые обобщенные производные которых интегрируемы с квадратом. В этом пространстве введем скалярное произведение

$$[u, v] = (u, v) + \Delta(u, v) \quad \text{и норму} \quad \|u\|_{W_2^{(1)}}(\Omega) = [u, u]^{1/2}.$$

Обозначим $\mathring{W}_2^{(1)}(\Omega) = \overline{\mathscr{D}(\Omega)}$, где замыкание понимается по норме пространства $W_2^{(1)}(\Omega)$. Пусть, далее, $W(\Omega^{\cdot})$ — множество следов функций пространства $W_2^{(1)}(\Omega)$ в смысле теорем вложения, и $W_2^{(2)}(\Omega)$ — пространство тех $v \in W_2^{(1)}(\Omega)$, для которых

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \, \partial x_j} \in L_2(\Omega).$$

Норму в этом пространстве определим равенством

$$\|v\|_{W_2^{(2)}(\Omega)} = \left( \sum_{i,j=1}^{n} \left\| \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \, \partial x_j} \right\|^2_{L_2(\Omega)} + \|v\|^2_{W_2^{(1)}(\Omega)} \right)^{1/2}.$$

**1.2. Теорема** (Лакс-Милграм). *Пусть $B$ — непрерывный положительно определенный билинейный функционал в пространстве Гильверта $H$, т.е.*

$$|B(x, y)| \leqq \|B\| \, \|x\| \, \|y\|, \tag{1.1}$$

$$|B(x, x)| \geqq \kappa \|x\|^2; \quad \kappa > 0. \tag{1.2}$$

*Пусть $f$ — непрерывный линейный функционал на $H$. Тогда существует один и только один элемент $v \in H$ и элемент $w \in H$ так, что $f(x) = B(x, v) = B(w, x)$ для всех $x \in H$.*

Эта теорема является простым следствием теоремы Рисса и поэтому ее доказательство опускаем.

**1.3. Определение.** Предположим, что

1. $\mathrm{D}u = -(a^{ij}u_i')_j' + cu$,[3]) где коэффициенты $a^{ij}$ и $c$ — ограниченные действительные измеримые функции,

2. $\mathrm{D}$ — эллиптический оператор, т.е. $c \geqq 0$, и предположим существование положительной постоянной $\alpha$, для которой

$$a^{ij}\xi_i\xi_j \geqq \alpha\delta^{ij}\xi_i\xi_j$$

при любом векторе $(\xi_i)$ из $E_n$.

Определим билинейные функционалы $A, D$ в $W_2^{(1)}(\Omega)$ соотношениями

$$A(u, v) = \int_\Omega a^{ij}u_i'v_j', \quad D(u, v) = A(u, v) + \int_\Omega cuv.$$

---

[3]) Здесь суммируется по индексам, встречающимся два раза, и $u_i'$ обозначает производную в смысле обобщенных функций.

Вместо эллиптичности оператора D можно предпологать $P$-эллиптичность оператора D, т.е. выполнение соотношения

$$|D(\varphi, \varphi)| \geqq \alpha \|\varphi\|^2_{\mathring{W}_2^{(1)}(\Omega)}, \quad \text{где} \quad \alpha > 0, \quad \varphi \in \mathscr{D}(\Omega).$$

Предпологаем, что для области $\Omega$ имеет место $\Omega \in \mathfrak{N}^{(0),1}$.

**1.4. Определение.** Функцию $v \in W_2^{(1)}(\Omega)$ будем называть решением уравнения $\mathrm{D}v = f$, где $f \in L_2(\Omega)$, если $D(v, \varphi) = (f, \varphi)$ для всех $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$.

Тогда $\mathrm{D}u = f$ имеет место в смысле обобщенных функций.

Пусть $v_0 \in W_2^{(1)}(\Omega)$; тогда скажем, что $v = v_0$ на $\Omega^{\cdot}$, если $v - v_0 \in \mathring{W}_2^{(1)}(\Omega)$.

Задача Дирихле заключается в нахождении функции $v \in W_2^{(1)}(\Omega)$ такой, что $v = v_0$ на $\Omega^{\cdot}$ и $\mathrm{D}v = f$, где $v_0$ и $f$ заранее заданные функции, $v_0 \in W_2^{(1)}(\Omega)$ и $f \in L_2(\Omega)$.

Если $v_0 = 0$, то задача Дирихле называется задачей Пуассона.

**1.5. Теорема.** *Пусть оператор* D *эллиптический. Тогда для каждого* $f \in L_2(\Omega)$ *и* $v_0 \in W_2^{(1)}(\Omega)$ *существует одно и только одно решение* $v$ *соответствующей задачи Дирихле, и справедлива оценка*

$$\|v - v_0\|_{W_2^{(1)}(\Omega)} \leqq C(\|f\|_{L_2(\Omega)} + \|v_0\|_{W_2^{(1)}(\Omega)}).$$

*Константа* $C$ *одинакова для всех областей с равностепенно ограниченным диаметром и для всех операторов с равностепенно ограниченными коэффициентами* $a^{ij}$, $c$ *и одной и той же константой эллиптичности.*

Доказательство. Для $\varphi \in \mathring{W}_2^{(1)}(\Omega)$ справедливо

$$\left|\int_\Omega f\varphi\right| \leqq \|f\|_{L_2} \|\varphi\|_{L_2} \leqq C(r) \|f\|_{L_2} \|\varphi\|_{W_2^{(1)}}, \tag{1.3}$$

$$|D(v_0, \varphi)| \leqq C(\beta) \|v_0\|_{W_2^{(1)}} \|\varphi\|_{W_2^{(1)}}, \tag{1.4}$$

где

$$r \geqq \operatorname{diam} \Omega, \quad \beta \geqq \operatorname{supess} (|a^{ij}(x)|, |c(x)|),$$

$$D(\varphi, \varphi) \geqq \alpha \int_\Omega \delta^{ij} \varphi'_i \varphi'_j \geqq \frac{\alpha}{C(r)} \|\varphi\|^2_{W_2^{(1)}}. \tag{1.5}$$

Из (1.3) и (1.4) следует, что функционал

$$F(\varphi) = \int_\Omega f\varphi - D(v_0, \varphi)$$

непрерывен на $\mathring{W}_2^{(1)}(\Omega)$. Вследствие (1.4) и (1.5) для билинейного функционала $D$ справедливо (1.1) и (1.2). Итак, существует элемент $u^* \in \mathring{W}_2^{(1)}(\Omega)$ так, что $F(\varphi) = D(u^*, \varphi)$ для $\varphi \in \mathring{W}_2^{(1)}(\Omega)$.

Обозначим $v = u^* + v_0$. Тогда $v$ является решением задачи Дирихле. Имеем

$$F(u^*) \geqq \frac{\alpha}{C(r)} \|u^*\|^2_{W_2^{(1)}}$$

и

$$F(u^*) \leqq C(r, \alpha, \beta) \|u^*\|_{W_2^{(1)}} (\|f\|_{L_2} + \|v_0\|_{W_2^{(1)}}) ,$$

одкуда вытекает вторая часть теоремы.

**1.6. Лемма.** *Пусть функция $f$ определена на $n$-мерном кубе $K$; предположим, что все обобщенные производные первого порядка функции $f$ ограничены по абсолютной величине постоянной $k > 0$. Тогда существует функция $\tilde{f}$ так, что $f = \tilde{f}$ почти всюду на $K$, и $\tilde{f}$ удовлетворяет на $K$ условию Липшица с постоянной $k\sqrt{n}$.*

Доказательство. Из известных теорем вложения (смотри, напр., [4]) вытекает, что существует на $K$ непрерывная функция $\tilde{f}$ так, что $f = \tilde{f}$ почти всюду на $K$. Если мы покажем, что $\tilde{f}$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной $k$ на всяком отрезке, который содержится в $K$ и направление которого совпадает с направлением некоторой оси координат, то лемма будет доказанной.

Пусть $u$ – отрезок параллельный координате $x_n$. Обозначим $x = [x_1, \ldots, x_{n-1}] \in E_{n-1}$, $y \in E_1$, и будем писать

$$[x, y] = [x_1, \ldots, x_{n-1}, y] , \quad f([x, y]) = f(x, y) ,$$
$$K^{x,*} = \mathscr{E}\{y;\ [x, y] \in K\} , \quad {}_*K = \mathscr{E}\{x;\ x \in E_{n-1},\ K^{x,*} \neq \emptyset\} .$$

Пусть $[\bar{x}, y_1] \in u$, $[\bar{x}, y_2] \in u$. Пусть $M$ обозначает множсетво всех $x \in {}_*K$, для которых функция $\tilde{f}^x(y) = \tilde{f}(x, y)$ абсолютно непрерывна на $K^{x,*}$, и

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} \tilde{f}^x(y) = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$$

для потчи всех $y \in K^{x,*}$. Известно, что ${}_*K - M$ является множеством ($(n - 1)$-мерной) меры нуль (смотри, напр., [5]).

Возьмем $x^m \in M$ $(m = 1, 2, \ldots)$ так, чтобы $\lim x^m = \bar{x}$. Имеет место соотношение

$$|\tilde{f}(x^m, y_1) - \tilde{f}(x^m, y_2)| =$$
$$= \left| \int_{y_1}^{y_2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} f(x^m, y)\, \mathrm{d}y \right| \leqq k|y_1 - y_2| .$$

Из непрерывности $\tilde{f}$ вытекает предельным переходом

$$|\tilde{f}(\bar{x}, y_1) - \tilde{f}(\bar{x}, y_2)| \leqq k|y_1 - y_2| .$$

и лемма доказана.

Почти очевидны следующие леммы:

**1.7. Лемма.** *Пусть $\Omega$ является открытым множеством. Обозначим для всех $X, Y \in \Omega$ символом $d(X, Y)$ нижнюю грань длин ломанных линий, соединяющих в $\Omega$ точки $X$ и $Y$. Если на всяком кубе $K \subset \Omega$ функция $g$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной $c$, то $|g(X) - g(Y)| \leqq c\, d(X, Y)$ для всех $X, Y \in \Omega$.*

**1.8. Лемма.** *Если $\Omega \in \mathfrak{N}^{(0),1}$, то существует $a > 0$ так, что $d(X, Y) \leqq a|X - Y|$.*

Доказательство, которое проводится, например, от противного, предоставить читателю.

Из предыдущего следует:

**1.9. Теорема.** *Пусть $\Omega$ — открытая область и пусть функция $f$ обладает на $\Omega$ ограниченными обобщенными производными первого порядка. Тогда существует функцуя $\tilde{f}$, для которой имеет место:*

1) $\tilde{f} = f$ *почти всюду на* $\Omega$.

2) $\tilde{f}$ *локально на $\Omega$ удовлетворяет условию Липшица (итак, $\tilde{f}$ непрерывна на $\Omega$).*

3) *Если $\Omega \in \mathfrak{N}^{(0),1}$, то $\tilde{f}$ удовлетворяет условию Липшица на $\Omega$ (итак, обладает непрерывным продолжением на $\overline{\Omega}$, которое тоже удовлетворяет условию Липшица).*

**1.10. Теорема.** *Пусть $\Omega \in \mathfrak{M}$ и оператор $\mathrm{D}$ обладает свойствами из определения 1.3. Пусть $\partial/v - \partial a^{ij}/\partial x_k$ — ограниченные функции на $\Omega$, $f \in L_2(\Omega)$, $v$ — решение задачи Пуассона $\mathrm{D}v = f$, $v \in \mathring{W}_2^{(1)}(\Omega)$. Тогда $v \in W_2^{(2)}(\Omega)$ и имеет место оценка $\|v\|_{W_2^{(2)}(\Omega)} \leqq C(\Omega)\, \|f\|_{L_2(\Omega)}$.*

Доказательство. В силу теоремы 1.9 можно пользоваться результатами работы [3].

**1.11.** Замечание. Мы ограничиваемся случаем $p = 2$, так как этого достаточно для дальнейших рассуждений, и доказательство проще, чем доказательство теоремы Кошелева для $p > 2$ (смотри [4]).

## 2. СООТНОШЕНИЕ МЕЖДУ ЗАДАЧЕЙ ПУАССОНА ДЛЯ СИММЕТРИЧЕСКОГО И НЕСИММЕТРИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА

**2.1. Теорема.** *Пусть $\Omega \in \mathfrak{N}^{(0),1}$, $u_i \in W_p^{(1)}(\Omega)$ $(p \geqq 1)$, $u = [u_1, \ldots, u_n]$. Тогда имеет место равенство*

$$\int_{\Omega^{\cdot}} u \,\mathrm{d}\Omega^{\cdot} = \int_{\Omega} \operatorname{div} u \,\mathrm{d}\Omega \tag{2.1}$$

*(в смысле следов).*

Доказательство. Если $u_i \in \mathscr{E}(\Omega)$ и $\Omega \in \mathfrak{M}$, то (2.1) имеет место.

Пусть теперь $\Omega \in \mathfrak{N}^{(0),1}$ и $\varphi_r$ — функции из теоремы 2.5 работы [1]. Определим $u_r = u\varphi_r$. Справедливы равенства:

$$\int_{\Omega^{\cdot}} u_r = \int_{c_r} u_r(X_r, a_r(X_r)) \left[1 + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\partial a_r}{\partial x_{ri}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}X_r\,,$$

$$\int_{\Omega^{\cdot}_k} u_r = \int_{c_r} u_r(X_r, a_{rk}(X_r)) \left[1 + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\partial a_{rk}}{\partial x_{ri}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}X_r\,,$$

где носитель $u_r$ является компактным множеством. Последовательность функций $a_{rk}$ является в $C_r$ неубывающей последовательностью непрерывных функций и стремится к непрерывной функции $a_r$. По теореме Дини эта последовательность стремится равномерно к $a_r$. Функции $u_r(X_r, a_{rk}(X_r))$ стремятся равномерно к $u_r(X_r, a_r(X_r))$, так как $u_r$ равномерно непрерывна.

Теперь очевидно, что

$$1 \leqq \left[1 + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\partial a_r}{\partial x_{ri}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \leqq [1 + (n-1)\, K^2]^{\frac{1}{2}}\,.$$

Из неравенства

$$\left|\left[1 + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\partial a_r}{\partial x_{ri}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} - \left[1 + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\partial a_{rk}}{\partial x_{ri}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\right| \leqq \left[\sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\partial a_r}{\partial x_{ri}} - \frac{\partial a_{rk}}{\partial x_{ri}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

правая часть которого стремится к нулю в $L_2(C_r)$, следует

$$\int_{\Omega^{\cdot}_k} u_r \to \int_{\Omega^{\cdot}} u, \quad \int_{\Omega^{\cdot}_k} u \to \int_{\Omega^{\cdot}} u\,, \quad \text{если} \quad k \to \infty\,.$$

Теперь предельным переходом получим (2.1) для всех $u \in \mathscr{E}(\Omega)$. При помощи соотношения $\overline{\mathscr{E}(\Omega)} = W_p^{(1)}(\Omega)$ получим предельным переходом утверждение теоремы.

**2.2.** Замечание. В дальнейшем предпологаем, что

$$\max_{i,j,k} \operatorname*{supess}_{x\in\Omega} \left|\frac{\partial}{\partial x_k} a^{ij}(x)\right| < +\infty\,, \quad \operatorname*{supess}_{x\in\Omega} |c(x)| < +\infty\,.$$

**2.3. Определение.** Пусть $v_j$ обозначают компоненты вектора внешней нормали. Определим производную функции $u$ по внешней конормали относительно оператора D соотношением

$$\frac{\partial u}{\partial_0 v} = a^{ij} v_j u_i'\,,$$

если только правая часть имеет смысл.

**2.4. Замечание.** Пусть $\mathrm{D} = \mathrm{D}_1 + \mathrm{D}_2$, где $\mathrm{D}_1$ и $\mathrm{D}_2$ — операторы рассматриваемого нами типа, не обязательно эллиптические. Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial_D \nu} = \frac{\partial u}{\partial_{D_1} \nu} + \frac{\partial u}{\partial_{D_2} \nu}.$$

**2.5. Теорема.** *Пусть для коэффициентов $a^{ij}$ оператора* D *имеет место соотношение $a^{ij}(x) = -a^{ji}(x)$. Пусть $\overline{\Omega} \subset \Omega_1$, $u \in C^{(1)}(\Omega_1)$ и $u = 0$ на $\Omega^{\cdot}$. Тогда*

$$\frac{\partial u}{\partial_D \nu} = 0. \tag{2.2}$$

Доказательство. Имеем

$$\frac{\partial u}{\partial_D \nu} = u'_j b^j, \quad b^j = a^{ji} \nu_i,$$

так что $\partial u / \partial_D \nu$ является производной в направлении $b = [b^1, \ldots, b^n]$.

Из соотношения $b^i \nu_i = a^{ij} \nu_i \nu_j = 0$ и $u = 0$ на $\Omega^{\cdot}$ следует (2.2).

**2.6. Замечание.** Обозначим $\mathbf{A}^+ = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \overline{\mathbf{A}})$, $\mathbf{A}^- = \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \overline{\mathbf{A}})$, где $\mathbf{A}$ — матрица. Их элементы обозначим соответственно $a^{ij}_+$ и $a^{ij}_-$. Тогда $\mathbf{A} = \mathbf{A}^+ + \mathbf{A}^-$, и матрица $\mathbf{A}^+$ симметрична и $\mathbf{A}^-$ антисимметрична.

**2.7. Замечание.** Пусть $a^{ij}$, $c$ — коэффициенты оператора D и $a^{ij}_+$, 0 или $a^{ij}_-$, $c$ — соответственно коэффициенты оператора $\mathrm{D}_+$ и $\mathrm{D}_-$. Если оператор D эллиптический, то $\mathrm{D}_+$ эллиптический в том же самом смысле как D, причем с такой же константой эллиптичности.

Доказательство. Этот факт непосредственно вытекает из соотношений

$$2a^{ij}\xi_i\xi_i = a^{ij}\xi_i\xi_j + a^{ji}\xi_i\xi_j = (a^{ij} + a^{ji})\,\xi_i\xi_j.$$

**2.8. Теорема.** *Пусть $\Omega \in \mathfrak{M}$ и $\Omega \subset K(O, r)$, где $K(O, r)$ обозначает шар с центром $O$ и радиусом $r$. Пусть оператор* D *является эллиптический. Тогда для функции $u$, которая является решением задачи Пуассона $\mathrm{D}u = f$, $f \in L_2(\Omega)$ и $u = 0$ на $\Omega^{\cdot}$, имеет место $u \in W_2^{(2)}(\Omega)$. Для $f^+ = \mathrm{D}_+ u$ справедливо*

$$\|f^+\|_{L_2(\Omega)} \leqq C \|f\|_{L_2(\Omega)}. \tag{2.3}$$

*Постоянная $C$ зависит только от $r$, от ограничения $\partial a^{ij}/\partial x_k$, $c$ и от константы эллиптичности оператора* D.

Доказательство.

$$f = \mathrm{D}u = \mathrm{D}_+ u + \mathrm{D}_- u = f^+ - (a^{ij}_- u'_i)'_j + cu = \\ = f^+ - a^{ij}_- u''_{ij} - (a^{ij}_-)'_j u'_i + cu.$$

Но $a_{-}^{ij} u_{ij}'' = 0$; из этого вытекает

$$f = f^{+} - (a_{-}^{ij})_j' u_i' + cu$$

и

$$\|f^{+}\|_{L_2(\Omega)} \leqq \|f\|_{L_2(\Omega)} + C\|u\|_{W_2^{(1)}(\Omega)} .$$

Используем теперь неравенство теоремы 1.7.

$$\|u\|_{W_2^{(1)}(\Omega)} \leqq C\|f\|_{L_2(\Omega)} ,$$

где $C$ зависит только от $r$ и константы эллиптичности оператора D, ч.т.д.

**2.9. Определение.** Пусть $^*\mathscr{E}(\Omega)$ значит множество всех функций $v$, $v = 0$ на $\Omega^{\boldsymbol{\cdot}}$, которые имеют продолжение $v^*$ на $\Omega_1$, $\Omega_1 \supset \overline{\Omega}$, такое, что $v^* \in \mathscr{E}(\Omega_1)$.

**2.10. Теорема.** *Обозначим через $^*W_2^{(2)}(\Omega)$ множество всех $u \in W_2^{(2)}(\Omega)$ таких, что $u = 0$ на $\Omega^{\boldsymbol{\cdot}}$. Пусть $\Omega \in \mathfrak{M}$. Тогда $^*\mathscr{E}(\Omega)$ плотно в $^*W_2^{(2)}(\Omega)$, в котором норма порождена нормой пространства $W_2^{(2)}(\Omega)$.*

Доказательство. Для начала предположим, что $\Omega$ является полупространством $x_n > 0$. Пусть $v \in {}^*W_2^{(2)}(\Omega)$ и обладает компактным носителем в $E_n$, если продолжим $v$ вне $\Omega$ нулем.

Обозначим $\Delta v = f$ на $\Omega$. Пусть $K$ — куб, $0 < x_i < \pi$, и пусть

$$\overline{\mathscr{E}(x \in E_n,\ v(x) \neq 0)} \subset K^{\circ} \cup \mathscr{E}(x \in E_n,\ x_n = 0) .$$

Пусть, далее, $\varphi \in \mathscr{D}(E_n)$ и

$$\overline{\mathscr{E}(x \in E_n,\ \varphi(x) \neq 0)} \subset K^{\circ} \cup \mathscr{E}(x \in E_n,\ x_n \leqq 0) ,$$

$\varphi(x) = 1$, если $v(x) \neq 0$.

Из $f \in L_2$ вытекает

$$f(x) = \sum_{k_2 > 0,\, k_i \text{ целое}} f_{k_1,\ldots,k_n} \sin k_1 x_1 \ldots \sin k_n x_n ,$$

где ряд сходится в $L_2(K)$ к функции $f$. Обозначим

$$f_n(x) = \sum_{m_{i,n} \geqq k_i \geqq 1} f_{k_1,\ldots,k_n} \sin k_1 x_1 \ldots \sin k_n x_n ,$$

где $m_{i,n} \to \infty$ $(n \to \infty)$.

Решением задачи Пуассона $\Delta v_n = f_n$ на $K$ является функция

$$v_n = - \sum_{m_{i,n} \geqq k_i \geqq 1} \frac{f_{k_1,\ldots,k_n}}{k_1^2 + \ldots + k_n^2} \sin k_1 x_1 \ldots \sin k_n x_n .$$

Из $f_n \to f$ следует $v_n \to v$ в норме пространства $W_2^{(2)}(\Omega)$.

Если обозначить $\varphi v_n = u_n$, то

$$\|v - u_n\|_{W_2^{(2)}(\Omega)} = \|\varphi(v - v_n)\|_{W_2^{(2)}(K)} \leqq C\|v - v_n\|_{W_2^{(2)}(K)}$$

и $u_n \to v$ в $W_2^{(2)}(\Omega)$.

Очевидно, что $u_n \in {}^*\mathscr{E}(\Omega)$. При помощи функций $\varphi_r$ из теоремы 2.5 работы [1] и свойств бесконечно регулярных преобразований типа

$$y_1 = x_1, \ldots, y_{n-1} = x_{n-1}, y_n = x_n + h(x_1, \ldots, x_{n-1})$$

получаем утверждение теоремы.

**2.11. Теорема.** *Пусть* D *— оператор с антисиметричной матрицей коэффициентов* $a^{ij}$ *(т.е.* $a^{ij} = -a^{ji}$*) и пусть, далее, имеют место предположения, указанные в замечании* 2.2 $u \in {}^*W_2^{(2)}(\Omega)$, $\Omega \in \mathfrak{N}$. *Тогда* $\partial u/\partial_D \nu = 0$.

Доказательство. Существуют такие $u_n \in {}^*\mathscr{E}(\Omega)$, для которых справедливо $\|u_n - u\|_{W_2^{(2)}(\Omega)} \to 0$. По теореме 2.5 имеет место $\partial u_n/\partial_D \nu = 0$ и

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial_D \nu}\right\|_{L_2(\Omega^\cdot)} = \left\|\frac{\partial}{\partial_D \nu}(u_n - u)\right\|_{L_2(\Omega^\cdot)} \leqq C\|u - u_n\|_{W_2^{(2)}(\Omega)} \to 0 \quad (n \to \infty)\,.$$

**2.12. Замечание.** Таким образом можно показать, что произвольная производная функции $u$ в направлении, перпендикулярном к нормали, нулевая.

**2.13. Замечание.** Пусть $\Omega \in \mathfrak{N}$ и D — оператор, (свойства которого смотри в замечании 2.2). Пусть $D = D_+ + D_-$, $u$ — решение задачи Пуассона на $\Omega$. Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial_D \nu} = \frac{\partial u}{\partial_{D_+} \nu}\,. \tag{2.4}$$

Итак, достаточно рассматривать случай симметричного оператора.

## 3. НЕРАВЕНСТВО РЕЛЛИХА

**3.1.** Пусть для оператора D имеют место предположения, введенные в замечании 2.2 и, более того, D — эллиптический оператор на $\Omega$, $\Omega \in \mathfrak{N}^{(0),1}$ $(= \mathfrak{N})$.

Для симметричной части $D_+$ оператора D можно вести рассуждения, аналогичные рассуждениям части 4 работы [1]. При более общих предположениях, которым подчинен оператор D, мы должны воспользоваться леммой 2.1.

Соотношения

$$(v^{kl})'_i z^i = 0\,, \quad (v^{kl})'_i y^i = 0$$

в доказательстве теоремы 4.1 работы [1] можно доказать тоже при помощи теоремы 1.10 и замечания 2.12 настоящей работы, причем не нужно пользоваться теоремой 3.5 работы [1] (для случая $p > 2$).

Как известно, получаем неравенство (4.7) работы [1], которое принимает вид

$$\left\|\frac{\partial v}{\partial_{D+} \nu}\right\|_{L_2(\Omega^\cdot)} \leqq N\|f^+\|_{L_2(\Omega)} . \tag{3.1}$$

При помощи (2.3) и (2.4) получим неравенство

$$\left\|\frac{\partial v}{\partial_D \nu}\right\|_{L_2(\Omega^\cdot)} \leqq N\|f\|_{L_2(\Omega)} , \tag{3.2}$$

которое назвыется *неравенством Реллиха.*

Теперь все результаты части 4 работы [1] переносятся на несимметричный оператор описанного выше типа. Повторим эти теоремы.

**3.2. Теорема.** *Каждому решению задачи Пуассона* $\mathrm{D}v = f$ *на* $\Omega, v = 0$ *на* $\Omega^\cdot(\Omega \in \mathfrak{N}^{(0),1})$ *можно поставить в соответствие обобщенную производную по внешней конормали, причем это соответствие является линейным непрерывным отображением пространства* $L_2(\Omega)$ *в* $L_2(\Omega^\cdot)$. *Если* $\Omega \in \mathfrak{M}$, *то* $\partial v/\partial_D \nu = a^{ij}\nu_i v'_j$.

**3.3. Теорема.** *Пусть* $g \in W(\Omega^\cdot)$ *и пусть* $u$ — *решение задачи Дирихле* $\mathrm{D}u = 0$ *на* $\Omega$, $u = g$ *на* $\Omega^\cdot$. *Тогда справедлива „обобщенная" теорема Грина*

$$\int_\Omega uf \,\mathrm{d}\Omega = -\int_{\Omega^\cdot} g \frac{\partial v}{\partial_D \nu} \,\mathrm{d}\Omega^\cdot .$$

Теорему 3.3 можно обобщить следующим образом:

**3.4. Теорема.** *Пусть* $g \in W(\Omega^\cdot)$ *и* $u \in W_2^{(1)}(\Omega)$, $u = g$ *на* $\Omega^\cdot$. *Тогда справедливо тождество*

$$\int_\Omega uf \,\mathrm{d}\Omega = -\int_{\Omega^\cdot} g \frac{\partial v}{\partial_D \nu} \,\mathrm{d}\Omega^\cdot + \mathrm{D}(u, v) . \tag{3.3}$$

Доказательство. Можно писать $u = u^* + u^{**}$, где $u^* = g$, $u^{**} = 0$ на $\Omega^\cdot$, $\mathrm{D}u^* = 0$, т.е.

$$D(u^*, \varphi) = 0 , \quad D(u, \varphi) = D(u^{**}, \varphi)$$

для всех $\varphi \in \mathring{W}_2^{(1)}(\Omega)$. Это значит, что

$$D(u^{**}, v) = \int_\Omega u^{**} f . \tag{3.4}$$

Если сложить (3.4) и „обобщенное" равенство Грина, в котором следует заменить $u$ на $u^*$, получим (3.3).

**3.5. Теорема.** *Пусть* $\Omega \in \mathfrak{N}^{(0),1}$, $u \in W_p^{(2)}(\Omega)$ $(p \geqq 1)$ *и* $v \in W_q^{(1)}(\Omega)$ $(1/p + 1/q = 1)$.

*Тогда*

$$-\int_\Omega v\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a^{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)=-\int_{\Omega^\cdot} v\frac{\partial u}{\partial_D\nu}+\int_\Omega a^{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}.$$

Доказательство. В (2.1) заменим $u_j$ $va^{ij}u_i'$.

**3.6. Теорема.** *Пусть* $\Omega\in\mathfrak{N}^{(0),1}$ *и* $v$ *решение задачи Пуассона* $\mathrm{D}v=f, f\in L_2(\Omega)$, *где* $v=0$ *на* $\Omega^\cdot$. *Пусть, далее, существует* $\partial v/\partial_D\nu$ *в смысле определения* 2.3. *(Это значит, что* $v\in W_2^{(2)}(\Omega)$.*)*

*Тогда слабая* „$\partial v/\partial_D\nu$“, *определенная теоремой* 3.2, *совпадает с* $\partial v/\partial_D\nu$.

Доказательство. Через $\varphi$, $\psi$ обозначим функции, определенные в доказательстве теоремы 4.2 работы [1]. Пусть $u$ — такая функция, что $\mathrm{D}u=0$, $u=\psi\varphi$ на $\Omega^\cdot$. Тогда

$$\int_\Omega u\,\mathrm{D}v=-\int_{\Omega^\cdot}\psi\varphi\frac{\partial v}{\partial_D\nu}\,\mathrm{d}\Omega^\cdot=-\int_{C_r}\psi(x_r)\frac{\partial v}{\partial_D\nu}\left[1+\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{\partial a_r}{\partial x_{ri}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x_r.$$

В соотношении (4.6) работы [1] сделаем предельный переход $k\to\infty$ и получим

$$0=\int_{C_r}\psi(x_r)\left(\frac{\partial v}{\partial_D\nu}-\frac{\partial v}{„\partial_D\nu}“\right)\left[1+\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{\partial a_r}{\partial x_{ri}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x_r$$

для $\psi\in\mathscr{D}(C_r)$. Из соотношения

$$\overline{\mathscr{E}(\Omega)}=W_p^{(1)}(\Omega)$$

вытекает

$$\frac{\partial v}{\partial_D\nu}=\frac{\partial v}{„\partial_D\nu}“.$$

## 4. НЕОГРАНИЧЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ ДИРИХЛЕ

**4.1.** На случай несимметричного оператора можно перенести тоже результаты части 5 работы [1]. Приводим их без доказательства:

**4.2. Определение.** Пусть $g\in L_2(\Omega^\cdot)$. Мы будем говорить, что функция $u\in L_2(\Omega)$ решает обобщенную задачу Дирихле $\mathrm{D}u=0$ с краевым условием $u=g$ на $\Omega^\cdot$, если каждая последовательность функций $u_e\in W_2^{(1)}(\Omega)$, решающих задачу Дирихле $\mathrm{D}u_e=0$ на $\Omega$, $u_e=g_e$ на $\Omega^\cdot$ и такая, что $g_e\to g$ в $L_2(\Omega^\cdot)$, сходится в $L_2(\Omega)$ к $u$.

**4.3. Теорема.** *Существует не более одного решения обобщенной задачи Дирихле.*

**4.4. Теорема.** *Существует одно и только одно линейное и непрерывное отображение $R$ пространства $L_2(\Omega^{\cdot})$ в $L_2(\Omega)$ такое, что для $g \in W(\Omega^{\cdot})$ будет $R(g) = u$, же $u$ — решение задачи Дирихле, соответствующее краевому условию $u = g$.*

Справедлива *оценка Хеллингера-Теплитца*

$$\|u\|_{L_2(\Omega)} \leqq N \|g\|_{L_2(\Omega^{\cdot})} \, .$$

**4.5. Теорема.** *Для каждой функции $g \in L_2(\Omega^{\cdot})$ существует одно и только одно решение обобщенной задачи Дирихле.*

*Литература*


[1] *Й. Нечас* (J. Nečas): О решениях эллиптических дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с неограниченным интегралом Дирихле. Чех. Мат. Журн. *10* (85), 1960, 283—298.

[2] *Й. Нечас* (J. Nečas): Об областях типа $\mathfrak{N}$. Чех. Мат. Журн. *12* (*87*), 1962, 274—287.

[3] *А. И. Кошелев:* Априорные оценки в $L_p$ и обобщенные решения эллиптических уравнений и систем. Успехи Матем. Наук, *XIII*, вып. 4, 1958, 29—86.

[4] *E. Magenes, G. Stampacchia*: I problemi al contorno per le equazioni differenziali di tipo ellittico. Annali di Pisa, Ser. III, Vol. *XII*, Fasc. III, 1958, 247—357.

[5] *J. Deny, J. L. Lions*: Les espaces du type de Beppo Levi, Annales de l'institut Fourier, *V*, 1955, 305—370.


## Výtah

## O NĚKTERÝCH VLASTNOSTECH ŘEŠENÍ S NEOMEZENÝM DIRICHLETOVÝM INTEGRÁLEM ELIPTICKÝCH PARCIÁLNÍCH DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC DRUHÉHO ŘÁDU


JAN KADLEC, Praha


Tato práce bezprostředně navazuje na práci J. NEČASE. Je dokázána následující věta:

*Nechť*

1. *$\Omega$ je oblast, jejíž hranice je lokálně popsána funkcí, splňující Lipschitzovu podmínku,*

2. A *je reálný eliptický diferenciální operátor druhého řádu, jehož koeficienty splňují Lipschitzovu podmínku na $\Omega$,*

3. *$u \in \mathring{W}_2^{(1)}(\Omega)$ je řešení Poissonova problému* $Au = f$, *kde $f \in L_2(\Omega)$.*

*Potom existuje derivace podle konormály $\partial u / \partial v$ v Nečasově smyslu, pro kterou platí Rellichova nerovnost*

$$\left|\frac{\partial u}{\partial v}\right|_{L_2(\Omega^{\cdot})} \leqq C |f|_{L_2(\Omega)}$$

*s konstantou, která nezávisí na $f$.*

*Ke každému $g \in L_2(\Omega^{\cdot})$ existuje v Nečasově smyslu právě jedno řešení Dirichletovy úlohy* $\mathrm{A}v = 0$ *v* $\Omega$, $u = g$ *na* $\Omega^{\cdot}$, *pro které platí Hellinger-Toeplitzova nerovnost*

$$|v|_{L_2(\Omega)} \leqq C|g|_{L_2(\Omega^{\cdot})} .$$

V práci je též dokázáno, že funkce, která má všechny zobecněné derivace prvního řádu omezené v oblasti $\Omega$, splňuje v této oblasti Lipschitzovu podmínku.


## Résumé

# SUR LES PROPRIÉTÉS DES SOLUTIONS AVEC L'INTÉGRALE DE DIRICHLET NON-BORNÉE DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU TYPE ELLIPTIQUE

JAN KADLEC, Praha

Cet article se rattache directement à un travail précedent de J. NEČAS. Nous démontrons le théorème suivant:

*Soit*

1. $\Omega$ *un domaine avec la frontière satisfaisant localement la condition de Lipschitz,*

2. A *un opérateur elliptique réel du deuxième ordre avec les coëfficients lipschitziens dans* $\Omega$,

3. $u \in \mathring{W}_2^{(1)}(\Omega)$ *la solution du problème de Poisson* $\mathrm{A}u = f$ *où* $f \in L_2(\Omega)$.

*Il existe, alors, la dérivée au sens de Nečas suivant la conormale* $\partial u/\partial v$, *pour laquelle l'inégalité de Rellich est valable*

$$\left|\frac{\partial u}{\partial v}\right|_{L_2(\Omega^{\cdot})} \leqq C|f|_{L_2(\Omega)} ,$$

*avec la constante indépendante de* $f$.

*Pour tout* $g \in L_2(\Omega^{\cdot})$ *il existe (au sens de Nečas) une et une seule solution du problème de Dirichlet* $\mathrm{A}v = 0$ *sur* $\Omega$, $v = g$ *sur* $\Omega^{\cdot}$ *telle que l'inegalité de Hellinger-Toeplitz*

$$|v|_{L_2(\Omega)} \leqq C|g|_{L_2(\Omega^{\cdot})}$$

*est satisfaite.*

A la fois, nous obtenons un résultat accessoire, théorème 1.9, assurant la propriété de Lipschitz pour la fonction $f$ ayant les dérivées du premier ordre bornées dans $\Omega$.