Časopis pro pěstování matematiky, roč. 88 (1963), Praha

ÜBER DAS VOLUMEN DES KÖRPERS, DESSEN RANDFLÄCHE DIE ENVELOPPE EINER EINPARAMETRIGEN FAMILIE VON KONVEXEN ZYLINDERFLÄCHEN IST

ZBYNĚK NÁDENÍK, Praha

(Eingelangt am 29. Dezember 1961)

Für das Integral der mittleren Krümmung und die Oberfläche der Enveloppe einer einparametrigen Familie von konvexen Zylinderflächen werden die Formeln abgeleitet, die mit den wohlbekannten Formeln von Minkowski für konvexe Körper eng verwandt sind.

Einleitung. Die folgenden Untersuchungen beziehen sich auf reelle Gebilde des dreidimensionalen euklidischen Raumes, in dem ein orthogonales Koordinatensystem mit dem Nullpunkt O zugrunde gelegt wird. Gegeben sei eine geschlossene singularitätenfreie Kurve C vierter Klasse mit positiver erster Krümmung und mit der Bogenlänge s und mit der Gesamtlänge l. Die Bogen- bzw. die Gesamtlänge des sphärischen Tangentenbildes Γ der Kurve C bezeichnen wir mit α bzw. mit a. Die Parameterdarstellung von C sei $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(\alpha)$. Folglich sind die Krümmung $k_1 = k_1(\alpha)$ und die Torsion $k_2 = k_2(\alpha)$ der Kurve C und ebenso $k(\alpha) = k_2 : k_1$ stetig differenzierbare Funktionen mit der Periode a. Den Tangenten-, den Hauptnormalen- und den Binormalenvektor der Kurve C bezeichnen wir mit $\boldsymbol{t}(\alpha), \boldsymbol{n}(\alpha), \boldsymbol{b}(\alpha)$. Weiter sei $\nu(\alpha)$ die Normalebene der Kurve C in ihrem Punkte $P(\alpha)$ mit dem Ortsvektor $\boldsymbol{r}(\alpha)$.

Wir wählen in jeder Normalebene $\nu(\alpha)$, $\alpha \in \langle 0, a)$, eine geschlossene konvexe Kurve $\kappa(\alpha)$; ihre Länge sei $L(\alpha)$ und der Flächeninhalt des mit $\kappa(\alpha)$ begrenzten Bereiches sei $F(\alpha)$. Für jedes $\alpha \in \langle 0, a)$ konstruieren wir die Zylinderfläche $\Lambda(\alpha)$ mit dem Normalschnitt $\kappa(\alpha)$.

Der Gegenstand der folgenden Untersuchungen ist die geschlossene Enveloppe S der einparametrigen Familie von konvexen Zylinderflächen $\Lambda(\alpha)$; $\alpha \in \langle 0, a)$.

Bei jedem fest gewählten $\alpha \in \langle 0, a)$ ist $\boldsymbol{r}(\alpha) + \boldsymbol{n}(\alpha) \cos \gamma + \boldsymbol{b}(\alpha) \sin \gamma$, $\gamma \in \langle 0, 2\pi)$ der Ortsvektor des Punktes des Einheitskreises $\varepsilon(\alpha)$ in der Ebene $\nu(\alpha)$ mit dem Mittelpunkte $P(\alpha)$. Die Menge der Punkte mit den Ortsvektoren $\boldsymbol{n}(\alpha) \cos \gamma + \boldsymbol{b}(\alpha) \sin \gamma$, $\alpha \in \langle 0, a)$, $\gamma \in \langle 0, 2\pi)$, d. h. das sphärische Bild des durch den Einheitskreis $\varepsilon(\alpha)$ erzeugten „Einheitsröhrenfläche um C", benennen wir die „Einheitsfläche Ω". Wir setzen

$$\text{(1)} \qquad d\omega = -\cos \gamma \, d\gamma \, d\alpha \,,$$

so dass $d\omega$ — falls $1/k_1 > 1$ — das Flächenelement $d\omega_e$ (bzw. das negativ genommene

Flächenelement $d\omega_h$) des sphärischen Bildes Ω_e (bzw. Ω_h) des elliptischen (bzw. des hyperbolischen) Teiles der Einheitsröhrenfläche um C bedeutet. Nach dieser Konvention ist also

$$\int_{\Omega} \{.\}\, d\omega = \int_{\Omega_e} \{.\}\, d\omega_e - \int_{\Omega_h} \{.\}\, d\omega_h \,. \tag{2}$$

Endlich sollen $\Delta_1(f, g)$ und $\Delta_2(f)$ den ersten und den zweiten Beltramischen Differentialoperator der Funktionen f, g bezüglich Ω bedeuten.

Die in der Ebene $v(\alpha)$ auf dem Einheitskreise $\varepsilon(\alpha)$ definierte Stützfunktion der Kurve $\kappa(\alpha)$ bezeichnen wir mit $h(\alpha, \gamma)$; selbstverständlich hat die Funktion $h(\alpha, \gamma)$ die Periode a (bzw. 2π) bezüglich α (bzw. γ). Wir benennen sie auch die Stützfunktion der Enveloppe S. Die Differenzierbarkeitsvoraussetzungen über die Stützfunktion $h(\alpha, \gamma)$ werden wir nicht präzisieren und die Existenz und Stetigkeit aller im Folgenden auftretenden oder nötigen Ableitungen voraussetzen. Wir werden aber erstens annehmen, dass

$$\left[k \frac{\partial h}{\partial \gamma} - \frac{\partial h}{\partial \alpha}\right]_{\gamma = \varepsilon\pi/2} = 0 \quad (\varepsilon = \pm 1) \tag{3}$$

gilt, und dann werden wir noch die Funktion $w(\alpha, \gamma)$ folgenderweise definieren:

$$w(\alpha, \gamma) = \frac{k \dfrac{\partial h}{\partial \gamma} - \dfrac{\partial h}{\partial \alpha}}{\cos \gamma} \quad \text{für} \quad \gamma \not\equiv \frac{\varepsilon\pi}{2} \pmod{2\pi}\,, \tag{4}$$

$$w(\alpha, \gamma) = \lim_{\gamma \to \varepsilon\pi/2} \frac{k \dfrac{\partial h}{\partial \gamma} - \dfrac{\partial h}{\partial \alpha}}{\cos \gamma} = - \varepsilon \left[k \frac{\partial^2 h}{\partial \gamma^2} - \frac{\partial^2 h}{\partial \alpha\, \partial \gamma}\right]_{\gamma = \varepsilon\pi/2} \quad \text{für} \quad \gamma \equiv \frac{\varepsilon\pi}{2} \pmod{2\pi}\,.$$

Zweitens werden wir noch voraussetzen, dass

$$A(h) = \frac{1}{k_1}\left(h + \frac{\partial^2 h}{\partial \gamma^2}\right) - \left\{h^2 + \left(h + \frac{\partial^2 h}{\partial \gamma^2}\right) \Delta_2(h) - \left(\frac{\partial^2 h}{\partial \gamma^2}\right)^2 - \left(\frac{\partial w}{\partial \gamma}\right)^2\right\} \cos \gamma > 0\,. \tag{5}$$

Die Relation (3) garantiert, dass alle Punkte der Fläche S im Endlichen liegen und (5) bedeutet, dass S singularitätenfrei ist und dass ihre Gesamtkrümmung gleich Null ist (Abschn. 1). Wegen (4) ist dann

$$\Delta_1(h, h) = \left(\frac{\partial h}{\partial \gamma}\right)^2 + w^2\,, \tag{6}$$

$$\Delta_2(h) \cos \gamma = k \frac{\partial w}{\partial \gamma} - \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{\partial}{\partial \gamma}\left(\frac{\partial h}{\partial \gamma} \cos \gamma\right), \tag{7}$$

$$\Delta_1\left(h, \frac{\partial^2 h}{\partial \gamma^2}\right) \cos \gamma = \frac{\partial h}{\partial \gamma} \frac{\partial^3 h}{\partial \gamma^3} \cos \gamma + w \frac{\partial^2 w \cos \gamma}{\partial \gamma^2}\,. \tag{8}$$

Im Grunde genommen ist z. B. $\int_\Omega \Delta_2(h)\,d\omega$ das „uneigentliche" Integral, dessen Existenz aber einleuchtend ist. Es erübrigt sich, davon in späteren einzelnen Fällen näher zu sprechen.

Die Hauptkrümmungen der Fläche S bezeichnen wir mit $1/R_1$, $1/R_2$ und ihr Flächenelement mit dS.

Für das Integral der mittleren Krümmung $M = \frac{1}{2}\int_S (1/R_1 + 1/R_2)\,dS$ und für die Oberfläche $O = \int_S dS$ der Fläche S und für den Rauminhalt V des Körpers K mit der Randfläche S gelten folgende Formeln (wir machen auf (1) und (2) aufmerksam):

$$(*)\qquad M = \pi \int_C ds + \int_\Omega h\,d\omega\,,$$

$$O = \int_C L\,ds + \int_\Omega \left\{h^2 - \frac{1}{2}\Delta_1(h, h)\right\} d\omega\,,$$

$$V = \int_C F\,ds + \int_\Omega \left(h + \frac{\partial^2 h}{\partial \gamma^2}\right)\left\{\frac{1}{2}h^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial \gamma}\right)^2 - \frac{1}{2}\Delta_1(h, h)\right\} d\omega\,.$$

Reduziert sich die Grundkurve C — immer mit demselben sphärischen Tangentenbilde Γ — im Grenzfalle in den Nullpunkt O, so ist dann die Stützfunktion $h(\alpha, \gamma)$ auf der Einheitsfläche Ω definiert und die ersten Integrale der rechten Seiten in (*) fallen fort. Wir haben dann die Formeln

$$M = \int_\Omega h\,d\omega\,,\quad O = \int_\Omega \left\{h^2 - \frac{1}{2}\Delta_1(h, h)\right\} d\omega\,,$$

$$V = \int_\Omega \left(h + \frac{\partial^2 h}{\partial \gamma^2}\right)\left\{\frac{1}{2}h^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial \gamma}\right)^2 - \frac{1}{2}\Delta_1(h, h)\right\} d\omega\,,$$

aus denen die zwei ersten mit den wohlbekannten Formeln von MINKOWSKI für das Integral der mittleren Krümmung und die Oberfläche des konvexen Körpers formal identisch sind (Abschn. 2—4).

1. Die Stützebene $\tau(\alpha, \gamma)$ der konvexen Zylinderfläche $\Lambda(\alpha)$ in der (in der Ebene $\nu(\alpha)$ enthaltenen) Richtung γ hat die Darstellung $\{\mathbf{x} - \mathbf{r}(\alpha)\} . \{\mathbf{n}(\alpha)\cos\gamma + \mathbf{b}(\alpha) . . \sin\gamma\} - h(\alpha, \gamma) = 0$. Aus dieser Relation und ihren partiellen Ableitungen nach α und γ gewinnt man bei $\gamma \not\equiv \varepsilon\pi/2 \pmod{2\pi}$ für den Ortsvektor $\mathbf{x}$ des Brennpunktes der Stützebene $\tau(\alpha, \gamma)$ die Gleichungen

$$(1,1)\qquad (\mathbf{x} - \mathbf{r}) . \mathbf{t} = \left(k\frac{\partial h}{\partial \gamma} - \frac{\partial h}{\partial \alpha}\right) : \cos\gamma\,,$$

$$(\mathbf{x} - \mathbf{r}) . \mathbf{n} = h\cos\gamma - \frac{\partial h}{\partial \gamma}\sin\gamma\,,\quad (\mathbf{x} - \mathbf{r}) . \mathbf{b} = h\sin\gamma + \frac{\partial h}{\partial \gamma}\cos\gamma\,.$$

Wegen (3) und (4) folgt sofort aus (1,1) folgende Parameterdarstellung der Menge der Brennpunkte aller Stützebenen $\tau(\alpha, \gamma)$:

$$(1{,}2)\quad \mathbf{Q}(\alpha,\gamma) = \boldsymbol{r}(\alpha) + w(\alpha,\gamma)\,\boldsymbol{t}(\alpha) + \left\{h(\alpha,\gamma)\cos\gamma - \frac{\partial h(\alpha,\gamma)}{\partial\gamma}\sin\gamma\right\}\boldsymbol{n}(\alpha) +$$

$$+ \left\{h(\alpha,\gamma)\sin\gamma + \frac{\partial h(\alpha,\gamma)}{\partial\gamma}\cos\gamma\right\}\boldsymbol{b}(\alpha)\,,$$

$$\alpha \in \langle 0, a)\,,\quad \gamma \in \langle 0, 2\pi)\,.$$

Aus (1,2) folgt

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial\alpha} = \left[\frac{1}{k_1} - h\cos\gamma + \frac{\partial h}{\partial\gamma}\sin\gamma + \frac{\partial w}{\partial\alpha}\right]\boldsymbol{t} -$$

$$- \left[k\left(h\sin\gamma + \frac{\partial h}{\partial\gamma}\cos\gamma\right) - \frac{\partial h}{\partial\alpha}\cos\gamma + \frac{\partial^2 h}{\partial\alpha\,\partial\gamma}\sin\gamma - w\right]\boldsymbol{n} +$$

$$+ \left[k\left(h\cos\gamma - \frac{\partial h}{\partial\gamma}\sin\gamma\right) + \frac{\partial h}{\partial\alpha}\sin\gamma + \frac{\partial^2 h}{\partial\alpha\,\partial\gamma}\cos\gamma\right]\boldsymbol{b}\,,$$

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial\gamma} = \frac{\partial w}{\partial\gamma}\boldsymbol{t} - \left(h + \frac{\partial^2 h}{\partial\gamma^2}\right)(\boldsymbol{n}\sin\gamma - \boldsymbol{b}\cos\gamma)$$

und weiter wegen (4) und (7):

$$(1{,}3)\qquad \left(\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial\alpha}\cdot\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial\alpha}\right)\left(\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial\gamma}\cdot\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial\gamma}\right) - \left(\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial\alpha}\cdot\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial\gamma}\right)^2 =$$

$$= \left\{\left(h + \frac{\partial^2 h}{\partial\gamma^2}\right)\left[\frac{1}{k_1} - h\cos\gamma + \frac{\partial h}{\partial\gamma}\sin\gamma + \frac{\partial w}{\partial\alpha}\right] +\right.$$

$$\left. + \frac{\partial w}{\partial\gamma}\left[\frac{\partial w}{\partial\gamma}\cos\gamma - k\left(h + \frac{\partial^2 h}{\partial\gamma^2}\right)\right]\right\}^2 =$$

$$= \left\{\frac{1}{k_1}\left(h + \frac{\partial^2 h}{\partial\gamma^2}\right) - \left[h^2 + \left(h + \frac{\partial^2 h}{\partial\gamma^2}\right)\Delta_2(h) - \left(\frac{\partial^2 h}{\partial\gamma^2}\right)^2 - \left(\frac{\partial w}{\partial\gamma}\right)^2\right]\cos\gamma\right\}^2.$$

Wegen (5) ist also die Menge der Punkte mit der Parameterdarstellung (1,2), d. h. die Enveloppe S der einparametrigen Familie von konvexen Zylinderflächen $\Lambda(\alpha)$, $\alpha \in \langle 0, a)$, eine singularitätenfreie und wegen (1,2) und (4) auch geschlossene Fläche mit dem Flächenelement

$$(1{,}4)\qquad \mathrm{d}S = A\,\mathrm{d}\gamma\,\mathrm{d}\alpha\,.$$

Bei genügend kleiner Konstante $v > 0$ erfüllt die Voraussetzung (5) über die Stützfunktion $h(\alpha,\gamma)$ auch die Funktion $h(\alpha,\gamma) + v$, die ja die Stützfunktion der zur Fläche S im äusseren Abstand v parallelen Fläche darstellt. Wir bezeichnen diese neue Fläche mit $S^{(v)}$ und den mit $S^{(v)}$ begrenzten Körper mit $K^{(v)}$. Aus (5) folgt

$$(1{,}5)\qquad A(h + v) = A(h) + v\left\{\frac{1}{k_1} - [2h + \Delta_2(h)]\cos\gamma\right\} - v^2\cos\gamma\,,$$

also nach der bekannten Eigenschaft der Parallelflächen

$$(1{,}6)\qquad \frac{1}{R_1}\cdot\frac{1}{R_2} = -\frac{\cos\gamma}{A}\,,\quad \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2} = \frac{\frac{1}{k_1} - [2h + \Delta_2(h)]\cos\gamma}{A}\,.$$

Aus (1,4) und erster Gleichung (1,6) folgt unmittelbar, dass die Gesamtkrümmung der Fläche S verschwindet. S ist also eine Fläche vom Zusammenhang der Ringfläche. Aus beiden Gleichungen (1,6) gewinnt man die verallgemeinerte (natürlich nur in nichtparabolischen Punkten geltende) Formel von WEINGARTEN

$$(1{,}7)\qquad R_1 + R_2 = -\frac{1}{k_1\cos\gamma} + 2h + \Delta_2(h)\,,$$

welche die geometrische Bedeutung des Operators $\Delta_2(h)$ liefert. Der Operator $\Delta_1(h, h)$ ist nach (6) und (1,2) das Quadrat des Abstandes der Punkte mit den Ortsvektoren $\mathbf{Q}(\alpha, \gamma)$ und $\mathbf{r}(\alpha) + h(\alpha, \gamma)\,\{\mathbf{n}(\alpha)\cos\gamma + \mathbf{b}(\alpha)\sin\gamma\}$; die Bedeutung dieser Punkte in der Stützebene $\tau(\alpha, \gamma)$ ist augensichtlich.

2. Wir skizzieren jetzt die Definition des Volumens des Körpers K mit der Randfläche S.

Auf der Grundkurve C wählen wir zwei Punkte P und $P^{(\alpha)}$ mit den Ortsvektoren $\mathbf{r}(\alpha)$ und $\mathbf{r}(\alpha + \Delta\alpha)$ und mit den Bogenlängen s und $s + \Delta s$. Auf der Charakteristik der Zylinderfläche $\Lambda(\alpha)$ nehmen wir zwei Punkte Q und $Q^{(\gamma)}$ mit den Ortsvektoren $\mathbf{Q}(\alpha, \gamma)$ und $\mathbf{Q}(\alpha, \gamma + \Delta\gamma)$ und auf der Charakteristik der Zylinderfläche $\Lambda(\alpha + \Delta\alpha)$ den Punkt $Q^{(\alpha)}$ mit dem Ortsvektor $\mathbf{Q}(\alpha + \Delta\alpha, \gamma)$. Endlich wählen wir den Punkt Q^* so, dass Q, $Q^{(\gamma)}$, Q^* und $Q^{(\alpha)}$ die Ecken eines Parallelogramms sind.

Wir berechnen das Volumen des Vielflaches mit den Ecken P, $P^{(\alpha)}$, Q, $Q^{(\gamma)}$, Q^* und $Q^{(\alpha)}$, das aus dem Vierflache mit den Eckpunkten P, $P^{(\alpha)}$, $Q^{(\alpha)}$, Q^* und aus der Pyramide mit dem Scheitel P und mit der Basis in dem Parallelogramm $QQ^{(\gamma)}Q^*Q^{(\alpha)}$ besteht. Der Rauminhalt $v_1(\alpha, \gamma)$ dieser Pyramide ist bekanntlich

$$(2{,}1)\qquad v_1(\alpha, \gamma) = \tfrac{1}{3}|h(\alpha, \gamma)|\, A(h)\,\Delta\gamma\,\Delta\alpha + (3)\,;$$

das Symbol (3) hat den üblichen Sinn. Der Rauminhalt $v_2(\alpha, \gamma)$ des oben definierten Vierflaches ist

$$(2{,}2)\qquad v_2(\alpha, \gamma) = \tfrac{1}{6}|[\mathbf{r}(\alpha + \Delta\alpha) - \mathbf{r}(\alpha), \mathbf{Q}(\alpha + \Delta\alpha, \gamma) - \mathbf{r}(\alpha), \mathbf{Q}^* - \mathbf{r}(\alpha)]|\,,$$

wo $\mathbf{Q}^* = \mathbf{Q}(\alpha + \Delta\alpha, \gamma) + \mathbf{Q}(\alpha, \gamma + \Delta\gamma) - \mathbf{Q}(\alpha, \gamma)$ der Ortsvektor des Punktes Q^* ist. Nach (1,2) folgt aus (2,2)

$$(2{,}3)\qquad v_2(\alpha, \gamma) = \frac{1}{6k_1(\alpha)}\left\{h(\alpha, \gamma) + \frac{\partial^2 h(\alpha, \gamma)}{\partial\gamma^2}\right\}|h(\alpha, \gamma)|\,\Delta\gamma\,\Delta\alpha + (3)\,.$$

Gemäss (2,1) und (2,3) erklären wir das Volumen des Körpers K mittels des Integrals

$$V = \int_0^a\int_0^{2\pi}\left\{\frac{1}{6k_1}\left(h + \frac{\partial^2 h}{\partial\gamma^2}\right)h + \frac{1}{3}\,hA\right\}d\gamma\,d\alpha\,,$$

also

(2,4) $$V = \frac{1}{3}\int_C F(s)\,\mathrm{d}s + \frac{1}{3}\int_S h\,\mathrm{d}S\,.$$

3. Ist f eine auf der Einheitsfläche Ω definierte und einmal stetig differenzierbare Funktion, so gilt die Greensche Formel

(3,1) $$\int_\Omega f\,\Delta_2(h)\,\mathrm{d}\omega = -\int_\Omega \Delta_1(f, h)\,\mathrm{d}\omega\,,$$

die man übrigens wegen (1) durch elementare partielle Integrationen bestätigen kann.

Nach (1,4), (5) und (1) ist

(3,2) $$\int_S h\,\mathrm{d}S = 2\int_C F\,\mathrm{d}s + \int_\Omega h\left\{h^2 + \left(h + \frac{\partial^2 h}{\partial\gamma^2}\right)\Delta_2(h) - \left(\frac{\partial^2 h}{\partial\gamma^2}\right)^2 - \left(\frac{\partial w}{\partial\gamma}\right)^2\right\}\mathrm{d}\omega\,;$$

darin ist gemäss (3,1)

(3,3)
$$\int_\Omega h\left(h + \frac{\partial^2 h}{\partial\gamma^2}\right)\Delta_2(h)\,\mathrm{d}\omega = -\int_\Omega h\Delta_1\left(h, \frac{\partial^2 h}{\partial\gamma^2}\right)\mathrm{d}\omega - \int_\Omega\left(2h + \frac{\partial^2 h}{\partial\gamma^2}\right)\Delta_1(h, h)\,\mathrm{d}\omega\,.$$

Aus (8) und (1) folgt durch partielle Integrationen

$$\int_\Omega h\Delta_1\left(h, \frac{\partial^2 h}{\partial\gamma^2}\right)\mathrm{d}\omega = \int_0^a\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial h}{\partial\gamma}w + h\frac{\partial w}{\partial\gamma}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial\gamma}\cos\gamma - w\sin\gamma\right)\mathrm{d}\gamma\,\mathrm{d}\alpha\,+$$
$$+\int_0^a\int_0^{2\pi}\frac{\partial^2 h}{\partial\gamma^2}\left[\left(\frac{\partial h}{\partial\gamma}\right)^2\cos\gamma + h\frac{\partial^2 h}{\partial\gamma^2}\cos\gamma - h\frac{\partial h}{\partial\gamma}\sin\gamma\right]\mathrm{d}\gamma\,\mathrm{d}\alpha\,,$$

wo weiter

$$\int_0^a\int_0^{2\pi}\frac{\partial h}{\partial\gamma}w\frac{\partial w}{\partial\gamma}\cos\gamma\,\mathrm{d}\gamma\,\mathrm{d}\alpha = -\frac{1}{2}\int_0^a\int_0^{2\pi}w^2\left(\frac{\partial^2 h}{\partial\gamma^2}\cos\gamma - \frac{\partial h}{\partial\gamma}\sin\gamma\right)\mathrm{d}\gamma\,\mathrm{d}\alpha\,,$$

$$\int_0^a\int_0^{2\pi}hw\frac{\partial w}{\partial\gamma}\sin\gamma\,\mathrm{d}\gamma\,\mathrm{d}\alpha = -\frac{1}{2}\int_0^a\int_0^{2\pi}w^2\left(\frac{\partial h}{\partial\gamma}\sin\gamma + h\cos\gamma\right)\mathrm{d}\gamma\,\mathrm{d}\alpha\,,$$

$$\int_0^a\int_0^{2\pi}h\frac{\partial h}{\partial\gamma}\frac{\partial^2 h}{\partial\gamma^2}\sin\gamma\,\mathrm{d}\gamma\,\mathrm{d}\alpha = -\frac{1}{2}\int_0^a\int_0^{2\pi}\left[\left(\frac{\partial h}{\partial\gamma}\right)^3\sin\gamma + h\left(\frac{\partial h}{\partial\gamma}\right)^2\cos\gamma\right]\mathrm{d}\gamma\,\mathrm{d}\alpha =$$
$$= -\frac{1}{2}\int_0^a\int_0^{2\pi}\left[3\left(\frac{\partial h}{\partial\gamma}\right)^2\frac{\partial^2 h}{\partial\gamma^2} + h\left(\frac{\partial h}{\partial\gamma}\right)^2\right]\cos\gamma\,\mathrm{d}\gamma\,\mathrm{d}\alpha$$

gilt. Aus den vier letzten Relationen folgt wegen (1) und $w^2 = \Delta_1(h, h) - (\partial h/\partial\gamma)^2$ nach (6):

$$\int_\Omega h\Delta_1\left(h, \frac{\partial^2 h}{\partial\gamma^2}\right) d\omega = -\int_\Omega h\left[\left(\frac{\partial^2 h}{\partial\gamma^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial\gamma}\right)^2\right] d\omega + \tag{3,4}$$

$$+ \frac{1}{2}\int_\Omega\left(\frac{\partial^2 h}{\partial\gamma^2} - h\right)\Delta_1(h, h)\, d\omega - 3\int_\Omega\left(\frac{\partial h}{\partial\gamma}\right)^2 \frac{\partial^2 h}{\partial\gamma^2}\, d\omega\,.$$

Nach (3,2)–(3,4) ist

$$\int_S h\, dS = 2\int_C F\, ds + \tag{3,5}$$

$$+ \int_\Omega\left\{\frac{3}{2}h^3 - \frac{1}{2}h^3 - \frac{3}{2}\left(h + \frac{\partial^2 h}{\partial\gamma^2}\right)\Delta_1(h, h) + 3\left(\frac{\partial h}{\partial\gamma}\right)^2 \frac{\partial^2 h}{\partial\gamma^2}\right\} d\omega\,.$$

Nun ist aber nach (1)

$$-\frac{1}{2}\int_\Omega h^3\, d\omega = \frac{1}{2}\int_0^a\int_0^{2\pi} h^3 \cos\gamma\, d\gamma\, d\alpha = \tag{3,6}$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^a\int_0^{2\pi}\left[6h\left(\frac{\partial h}{\partial\gamma}\right)^2 + 3h^2\frac{\partial^2 h}{\partial\gamma^2}\right]\cos\gamma\, d\gamma\, d\alpha = \frac{1}{2}\int_\Omega\left[6h\left(\frac{\partial h}{\partial\gamma}\right)^2 + 3h^2\frac{\partial^2 h}{\partial\gamma^2}\right] d\omega\,.$$

Aus (2,4), (3,5) und (3,6) folgt die dritte Formel (*).

4. Für den Rauminhalt $V^{(v)}$ des zum Körper K parallelen Körpers $K^{(v)}$ (s. Abschn. 1) gilt wegen der verschwindenden Gesamtkrümmung der Randfläche S des Körpers K die STEINERsche Formel

$$V^{(v)} = V + vO + v^2M\,. \tag{4,1}$$

Anders bekommt man aus der dritten Relation (*), in der wir $h + v$ statt h schreiben, wegen (1) nach einfachen partiellen Integrationen für das Volumen $V^{(v)}$ folgende Formel:

$$V^{(v)} = V + v\left\{\int_C L\, ds + \int_\Omega\left[h^2 - \tfrac{1}{2}\Delta_1(h, h)\right] d\omega\right\} + v^2\left\{\pi\int_C ds + \int_\Omega h\, d\omega\right\}. \tag{4,2}$$

Durch den Vergleich der Beziehungen (4,1) und (4,2) folgen die zwei ersten Formeln (*).

Die erste Formel (*) ist wegen (1), (1,4) und (3,1) auch eine unmittelbare Folge der zweiten Relation (1,6) und aus (1,4), (1), (5), (8) und (3,1) kann man ebenso direkt durch partielle Integrationen die zweite Formel (*) ableiten.

Man kann aber auch das wohlbekannte Verfahren von MINKOWSKI benutzen. Nach (2,4), (1,4), erster Relation (1,6) und (1) ist $V = \frac{1}{3}\int_C F\, ds + \frac{1}{3}\int_\Omega hR_1R_2\, d\omega$. Für den Rauminhalt $V^{(v)}$ des Parallelkörpers $K^{(v)}$ gilt demnach

$$(4,3)\quad V^{(v)} = \frac{1}{3}\int_C (F + vL + \pi v^2)\,\mathrm{d}s + \frac{1}{3}\int_\Omega (h + v)(R_1 + v)(R_2 + v)\,\mathrm{d}\omega =$$

$$= V + v\left\{\frac{1}{3}\int_C L\,\mathrm{d}s + \frac{1}{3}\int_\Omega [R_1R_2 + h(R_1 + R_2)]\,\mathrm{d}\omega\right\} +$$

$$+ v^2\left\{\frac{1}{3}\int_C \pi\,\mathrm{d}s + \frac{1}{3}\int_\Omega (R_1 + R_2 + h)\,\mathrm{d}\omega\right\}.$$

Weil

$$M = \frac{1}{2}\int_S\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\mathrm{d}S = \frac{1}{2}\int_\Omega (R_1 + R_2)\,\mathrm{d}\omega \quad \text{und} \quad O = \int_S \mathrm{d}S = \int_\Omega R_1R_2\,\mathrm{d}\omega\,,$$

folgt aus (4,1) und (4,3) erstens wieder die erste Formel (*) und zweitens

$$(4,4)\qquad O = \frac{1}{2}\left\{\int_C L\,\mathrm{d}s + \int_\Omega h(R_1 + R_2)\,\mathrm{d}\omega\right\}.$$

Dies ist eine Analogie der Formel von Minkowski für die Oberfläche des konvexen Körpers. Aus (4,4), (1,7) und (3,1) folgt wieder die zweite Formel (*). Über die meisten hier auftretenden Integrale gilt freilich die schon in der Einleitung gemachte Bemerkung.

Výtah

O OBJEMU TĚLESA OHRANIČENÉHO OBÁLKOU JEDNOPARAMETROVÉHO SYSTÉMU KONVEXNÍCH VÁLCOVÝCH PLOCH

ZBYNĚK NÁDENÍK, Praha

V trojrozměrném eukleidovském prostoru budiž dána uzavřená křivka C bez inflexních bodů. Označme Ω sférický obraz obálky kulových ploch poloměru 1, jejichž středy vyplní křivku C a $\mathrm{d}\omega$ nechť značí plošný element (resp. záporně vzatý plošný element) sférického obrazu eliptické (resp. hyperbolické) části obálky. První resp. druhý BELTRAMIho operátor vzhledem k Ω označíme Δ_1 resp. Δ_2. Každé tečně t křivky C přiřaďme konvexní válcovou plochu Λ s površkami rovnoběžnými s t, jejíž normální řez má délku L a omezuje oblast o obsahu F; opěrnou funkci této oblasti — vztaženou k průsečíku tečny t s rovinou normálního řezu válcové plochy Λ jako počátku — označme h. Je-li obálka jednoparametrového systému konvexních válcových ploch Λ uzavřená plocha S bez singulárních bodů a homeomorfní s torem, jsou integrál střední křivosti M a povrch O obálky S a objem V tělesa omezeného plochou S dány vzorci (*). Mění-li se křivka C stále s týmž sférickým obrazem svých tečen, až přejde ve střed

jednotkové kulové plochy, je opěrná funkce h definována přímo na Ω, v pravých stranách v (*) vymizí křivkové integrály a první dva vzorce pro M a O jsou pak formálně identické s MINKOWSKIho vzorci pro integrál střední křivosti a povrch konvexní plochy.

Резюме

ОБ ОБЪЕМЕ ТЕЛА, ОГРАНИЧЕННОГО ОГИБАЮЩЕЙ ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ВЫПУКЛЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

ЗБЫНЕК НАДЕНИК (Zbyněk Nádeník), Прага

Пусть C — замкнутая кривая без точек перегиба в трехмерном евклидовом пространстве. Далее, пусть Ω — сферический образ огибающей шаровых поверхностей радиуса 1, середины которых заполнят кривую C, и $d\omega$ — элемент площади (соотв. отрицательный элемент площади) сферического образа эллиптической (соотв. гиперболической) части огибающей. Первый, соотв. второй Бельтрамиев оператор относительно Ω обозначим Δ_1, соотв. Δ_2. Каждой касательной t кривой C отнесем выпуклую цилиндрическую поверхность Λ с прямыми параллельными t, нормальное сечение которой имеет длину L и ограничает область площадью F; опорную функцию этой области — отнесенную к точке пересечения касательной t с плоскостью нормального сечения цилиндрической поверхности Λ как к началу — обозначим h. Если огибающая однопараметрической системы выпуклых цилиндрических поверхностей Λ есть замкнутая поверхность S без сингулярных точек, гомеоморфная тору, то интеграл средней кривизны M и площадь O огибающей S и объем V тела, ограниченного поверхностью S, даны формулами (*). Если кривая C все время изменяется с тем же самым сферическим образом касательных и если она сокращается до середины единичной шаровой поверхности, то опорная функция h определена прямо на Ω, то в правых частях (*) криволинейные интегралы обращаются в нуль, и первые две формулы для M и O формально идентичны с формулами Минковского для интеграла средней кривизны и площади выпуклой поверхности.