Časopis pro pěstování matematiky, roč. 93 (1968), Praha

EINE BEMERKUNG ZUM AUSWAHLAXIOM

TOMÁŠ JECH, Praha

(Eingengangen am 1. August 1966)

In der Theorie der metrischen Räume wird oft das Auswahlaxiom verwendet. In dieser Bemerkung will der Verfasser mit Hilfe einiger einfachen Beispiele zeigen, dass das Auswahlaxiom eine grundsätzliche Rolle spielt.

In [1] wird gezeigt, dass das folgende Axiom mit den Axiomen der Mengenlehre Σ (ohne Auswahlaxiom) widerspruchsfrei ist:*) (Siehe auch [2].)

(R) $\left\{\begin{array}{l}\text{Es gibt eine unendliche Menge reeller Zahlen, die keine}\\ \text{abzählbare Untermenge enthält.}\end{array}\right.$

In der Theorie $\Sigma + R$ gilt folgendes:

1. *Die Definitionen der Stetigkeit von* CAUCHY *und* HEINE *sind nicht äquivalent. Es gibt eine Menge A reeller Zahlen und einen Häufungspunkt a dieser Menge, der kein Grenzwert einer Punktfolge aus A ist. Die reellen Funktionen auf $A \cup \{a\}$, die im Punkte a im Sinne der $\varepsilon - \delta$-Definition nicht stetig sind, sind im Sinne der Folgen-Definition stetig.*

2. *Nicht jede vollständige Menge reeller Zahlen ist notwendig abgeschlossen.*

3. *Es gibt eine kompakte Menge reeller Zahlen (d.h. jede Punktfolge enthält eine konvergente Teilfolge), die weder beschränkt, noch abgeschlossen, noch separabel ist. Es gibt eine fallende Folge $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$ kompakter, nicht leerer Mengen reeller Zahlen, deren Durchschnitt leer ist. Der Heine-Borel-Lebesguesche Satz gilt nicht. Es gibt eine kompakte Menge A reeller Zahlen und ein System offener Mengen, deren Summe die Menge A enthält, und A ist in keiner endlichen Summe dieser Mengen enthalten.*

4. *Der Lindelöfsche Satz gilt nicht. Es gibt ein System offener Mengen, deren Summe die Menge aller reellen Zahlen ist, wobei keine höchstens abzählbare Summe dieser Mengen alle reellen Zahlen enthält.*

5. *Es gibt eine Menge reeller Zahlen, die nicht separabel ist, trotzdem ist sie Untermenge des separablen Raumes aller reellen Zahlen und hat eine abzählbare offene Basis.*

---

*) Reelle Zahlen können ohne Benutzung des Auswahlaxioms konstruiert werden.

Beweis. M sei eine unendliche Menge reeller Zahlen, und enthalte keine abzählbare Untermenge. Es gibt nur eine endliche Anzahl von isolierten Punkten der Menge M. (Zu jedem isolierten Punkt kann man effektiv – ohne Auswahlaxiom – ein Intervall derart zuordnen, dass die Intervalle paarweise punktfremd sind. Jedes System disjunkter Intervalle reeller Zahlen ist höchstens abzählbar.) M_0 sei M ohne die isolierten Punkte, N das Bild der Menge M_0 bei einer homöomorphen Abbildung des offenen Intervalles $(\inf M_0, \sup M_0)$ auf die ganze reelle Achse. a sei ein Häufungspunkt der Menge N, A sei $N - \{a\}$.

Die Menge A ist unendlich, enthält keine abzählbare Untermenge, ist nicht abgeschlossen und ist nicht beschränkt. Jede Folge aus A kann nur endlich viele Werte durchlaufen. Jede Folge aus A enthält also eine konvergente Teilfolge und jede Fundamentalfolge ist konvergent, d.h. A ist kompakt und vollständig. Der Punkt a ist Häufungspunkt der Menge A und ist kein Grenzwert einer Folge aus A. A ist offensichtlich nicht separabel. Das abzählbare System der Mengen $A \cap (\alpha, \beta)$, wo α, β alle rationale Zahlen durchlaufen, ist eine offene Basis des Raumes A. Der Durchschnitt $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ der kompakten Mengen $A_n = A \cap \langle a - 1/n, a + 1/n \rangle$ ist leer. Die Summe der offenen Intervalle $(-\infty, x)$, $x \in A$, enthält alle reellen Zahlen, es gibt aber kein höchstens abzählbares (bzw. endliches) System dieser Intervalle, dessen Summe alle reellen Zahlen (bzw. die kompakte Menge A) enthält.

Literatur

[1] *P. Hájek, P. Vopěnka:* Some permutation submodels of the model ∇, Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, sér. sci. math. *14* (1966), 1–7.

[2] *P. J. Cohen:* Independence of the axiom of choice, Stanford 1963.

Anschrift des Verfassers: Sokolovská 83, Praha 8-Karlín (Matematicko-fyzikální fakulta UK).