Jiří Brabec

O jednom důkazu Paley-Wienerovy věty

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 93 (1968), No. 1, 64--68

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108662`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 93 (1968), Praha

O JEDNOM DŮKAZU PALEY-WIENEROVY VĚTY

JIŘÍ BRABEC, Praha

(Došlo dne 27. září 1966)

V tomto článku bude značit W_σ třídu celistvých funkcí $f(z)$, které jsou exponenciálního typu $\leqq \sigma$ a pro něž $f(x) \in L^2(-\infty, +\infty)$. Dále označíme znakem B_σ třídu celistvých funkcí exponenciálního typu $\leqq \sigma$, které jsou omezené na reálné ose. Pro funkci $f \in B_\sigma$ platí

$$|f(z)| \leqq A e^{\sigma|y|} \tag{1}$$

pro všechna $z = x + iy$, přičemž $A > 0$ je jistá konstanta. Fourierovým-Plancherelovým obrazem funkce $f \in L^2(-\infty, +\infty)$ budeme rozumět funkci $F \in L^2(-\infty, +\infty)$:

$$F(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \operatorname*{l.i.m.}_{N \to \infty} \int_{-N}^{N} f(x)\, e^{-iux}\, dx\,,$$

která podle Plancherelovy věty existuje.

Věta Paley-Wienerova, jak známo, zní:

Nutná a postačující podmínka, aby $f \in W_\sigma$, je, aby existovala funkce $F \in L^2(-\sigma, \sigma)$ tak, že

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sigma}^{\sigma} F(u)\, e^{iux}\, du\,. \tag{2}$$

Důkaz, že každá funkce tvaru (2) patří do W_σ, je jednoduchý a není třeba jej uvádět. K důkazu druhé části uvedeme nejdříve některé jednoduché pomocné věty; tyto věty jinak vyplývají z věty Paley-Wienerovy, byla-li již ovšem dokázána. Následující lemma plyne též z Bernštejnovy nerovnosti pro funkce z B_σ, dokážeme však lemma raději přímo.

Lemma 1. *Jestliže $f(z) \in B_\sigma$, potom $f'(z) \in B_\sigma$.*

Důkaz. Nechť platí (1). Buď nejdříve $z = x + iy$ libovolné číslo takové, že $y > 0$. Nechť $C = C_1 + C_2$ je orientovaný součet křivek:

$$C_1 : z = t\,, \quad t \in \langle -R, R \rangle\,, \quad C_2 : z = Re^{it}\,, \quad t \in \langle 0, \pi \rangle\,,$$

kde $R > |z|$. Potom jest podle Cauchyho vzorce

$$f'(z)\,e^{i\sigma z} + i\sigma f(z)\,e^{i\sigma z} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)\,e^{i\sigma\zeta}}{(\zeta - z)^2}\,d\zeta\,.$$

Tedy

(3) $$|f'(z)\,e^{i\sigma z} + i\sigma f(z)\,e^{i\sigma z}| \leqq \frac{1}{2\pi}(|J_1| + |J_2|)\,,$$

kde

(4) $$|J_1| = \left|\int_{-R}^{R} \frac{f(t)\,e^{i\sigma t}}{(t - z)^2}\,dt\right| \leqq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A\,dt}{t^2 + y^2} = \frac{\pi A}{y}\,,$$

$$\lim_{R\to\infty} J_2 = \lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi} \frac{f(Re^{it})\exp(i\sigma Re^{it})\,iRe^{it}}{(Re^{it} - z)^2}\,dt = 0\,,$$

neboť

$$|J_2| \leqq \frac{AR\pi}{(R - |z|)^2}\,.$$

Odtud a z (3), (4) plyne, že platí

(5) $$|f'(z) + i\sigma f(z)| \leqq \frac{A}{2y}\,e^{\sigma y}\,.$$

Analogicky dostaneme pro $y < 0$ (použijeme-li téže metody na funkci $f(z)\,e^{-i\sigma z}$ a dolní polorovinu), že platí

(6) $$|f'(z) - i\sigma f(z)| \leqq \frac{A}{2|y|}\,e^{\sigma|y|}\,.$$

Z (5), (6) okamžitě dostaneme, že pro $y \neq 0$ platí

$$|f'(z)| \leqq \left(\sigma + \frac{1}{2|y|}\right) A e^{\sigma|y|}\,.$$

Odtud plyne, že $f'(z)$ je omezená na hranici libovolného pásu $-y_0 \leqq \operatorname{Im} z \leqq y_0$ a podle principu Phragmena-Lindelöfa pro polopás je omezená i uvnitř pásu, je tedy omezená na reálné ose.

Lemma 2. *Je-li $f \in W_\sigma$, potom platí*

1. $f \in B_\sigma$,
2. *pro libovolné $z = x + iy$ takové, že $y \neq 0$, je*

(7) $$|f(z)| \leqq Q\,\frac{e^{\sigma|y|}}{\sqrt{|y|}}\,, \quad \text{kde} \quad Q = \frac{\|f\|}{2\sqrt{\pi}}$$

($\|f\|$ je norma v $L^2(-\infty, +\infty)$).

Důkaz. 1. Funkce $G(z) = \int_0^z f^2(z)\,dz$ je zřejmě celistvá funkce exponenciálního typu a je omezená na reálné ose, podle lemmatu 1 je též $G'(z) = f^2(z)$ omezená na reálné ose, tedy i funkce $f(z)$.

2. Dokážeme (7) pouze pro $y > 0$. Nechť $f \in W_\sigma$, f je podle 1) omezená na reálné ose, tedy platí (1). Zvolme libovolně $z = x + iy$, $y > 0$. Zvolme dále libovolně $\varepsilon > 0$. Platí

$$f(z)\,e^{i(\sigma+\varepsilon)z} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)\,e^{i(\sigma+\varepsilon)\zeta}}{\zeta - z}\,d\zeta\,,$$

kde $C = C_1 + C_2$ má význam jako předešle. Je pak

$$|f(z)\,e^{i(\sigma+\varepsilon)z}| \leqq \frac{1}{2\pi}(|I_1| + |I_2|)\,, \tag{8}$$

kde

$$|I_1|^2 = \left|\int_{-R}^{R} \frac{f(t)\,e^{i(\sigma+\varepsilon)t}}{t - (x + iy)}\,dt\right|^2 \leqq \tag{9}$$

$$\leqq \int_{-R}^{R} |f(t)|^2\,dt \int_{-R}^{R} \frac{dt}{(t - x)^2 + y^2} \leqq \|f\|^2\,\frac{\pi}{y}\,.$$

Dále je

$$\lim_{R\to\infty} I_2 = 0\,, \quad \text{neboť} \quad |I_2| \leqq \frac{AR}{R - |z|}\int_0^\pi e^{-\varepsilon R \sin t}\,dt$$

a pravá strana konverguje k nule pro $R \to \infty$.

Odtud a z (8), (9) plyne platnost nerovnosti

$$|f(z)|\,e^{-(\sigma+\varepsilon)y} \leqq \frac{\|f\|}{2\sqrt{(\pi y)}}$$

pro každé $\varepsilon > 0$, platí tedy (7).

Lemma 3. *Je-li $f \in W_\sigma$, potom platí pro každé $x \in (-\infty, +\infty)$*

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t + x)\,\frac{\sin \sigma t}{t}\,dt\,. \tag{10}$$

Důkaz. Především integrál v (10) existuje, neboť $f \in L^2(-\infty, +\infty)$. Označme pro dané x $f(x + z) = g(z)$.

Nechť $C = \sum_{k=1}^{4} C_k$ je orientovaný součet křivek:

$$C_1 : z = t\,, \quad t \in \langle r, R\rangle\,, \qquad C_2 : z = Re^{it}\,, \quad t \in \langle 0, \pi\rangle\,,$$
$$C_3 : z = t\,, \quad t \in \langle -R, -r\rangle\,, \quad C_4 : z = re^{-it}\,, \quad t \in \langle -\pi, 0\rangle\,,$$

kde $0 < r < R$. Potom podle Cauchyho věty je

$$\int_C g(z) \frac{e^{i\sigma z}}{z} dz = 0 .$$

Odtud plyne

$$\int_{r \leq |t| \leq R} g(t) \frac{e^{i\sigma t}}{t} dt = i(J(r) - J(R)) ,$$

kde

$$J(\varrho) = \int_0^\pi g(\varrho e^{it}) \exp(i\sigma\varrho e^{it}) dt .$$

Jest podle (7)

$$|J(R)| \leq \frac{Q}{\sqrt{R}} \int_0^\pi \frac{dt}{\sqrt{(\sin t)}} , \quad \text{takže} \quad \lim_{R \to \infty} J(R) = 0 .$$

Dále $\lim_{r \to 0} J(r) = \pi\, g(0)$ (limitní přechod za integrační symbol je zřejmě dovolen). Tedy

$$\lim_{\substack{R \to \infty \\ r \to 0}} \int_{r \leq |t| \leq R} g(t) \frac{e^{i\sigma t}}{t} dt = i\pi\, g(0) . \tag{11}$$

Zcela analogicky dokážeme (přechodem k dolní polorovině)

$$\lim_{\substack{R \to \infty \\ r \to 0}} \int_{r \leq |t| \leq R} g(t) \frac{e^{-i\sigma t}}{t} dt = -i\pi\, g(0) . \tag{12}$$

Z (11), (12) dostaneme ihned (10).

D ů k a z 2. části Paley-Wienerovy věty je nyní jednoduchý. Nechť F je Fourierův-Plancherelův obraz funkce f. Potom, jak známo platí

$$\frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} \int_{-\sigma}^{\sigma} F(u)\, e^{iux} du = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t + x) \frac{\sin \sigma t}{t} dt . \tag{13}$$

Je-li $f \in W_\sigma$, pak pravá strana v (13) je rovna $f(x)$ a tím je důkaz proveden.

Z předchozího mimo jiné vyplývá, že pro funkci $f \in W_\sigma$ se její Fourierův-Plancherelův obraz F rovná nule skoro všude v $E_1 - (-\sigma, \sigma)$. Tato skutečnost se v jiných důkazech dokazuje přímo.

Uvedený důkaz umožňuje rovněž velmi snadno zobecnit Paley-Wienerovu větu na n-rozměrný prostor.

Označme dále $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$, $\sigma_k > 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$, $z_k = x_k + iy_k$, $(u, x) = \sum_{k=1}^{n} u_k x_k$, $K_\sigma = \{x \in E_n : |x_k| \leq \sigma_k,\ k = 1, 2, \ldots, n\}$.

Řekneme, že $f \in W_\sigma^{(n)}$, jestliže

1) *$f(z)$ je celistvá funkce taková, že k libovolným číslům $\varepsilon_k > 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ existuje konstanta $A = A(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ tak, že pro všechna z platí*

$$|f(z)| \leqq A e^{(\sigma_1 + \varepsilon_1)|z_1| + \ldots + (\sigma_n + \varepsilon_n)|z_n|},$$

2) $f(x) \in L^2(E_n)$.

Je nyní zřejmé, jak lze zobecnit pomocí Fubiniovy věty lemma 3 pro n-rozměrný prostor. Odtud a z Plancherelovy věty pro $L^2(E_n)$ plyne věta:

Nutná a postačující podmínka, aby $f \in W_\sigma^{(n)}$, je, aby existovala funkce $F \in L^2(K_\sigma)$ tak, že

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{K_\sigma} F(u)\, e^{i(u,x)}\, du\,.$$

Literatura

[1] *Н. И. Ахиезер:* Лекции по теории аппроксимации, Москва 1965.

Adresa autora: Technická 2, Praha 6 - Dejvice, (elektrotechnická fakulta ČVUT).

Summary

ON A PROOF OF PALEY–WIENER THEOREM

JIŘÍ BRABEC, Praha

The proof of the well-known Paley-Wiener theorem requires, as a rule, a verification of the following statement: The Fourier transform of a function $f \in W_\sigma$ (for notation see [1]) vanishes a.e. outside of the interval $(-\sigma, \sigma)$.

The alternative proof of the Paley-Wiener theorem, given in this paper, is based on a fact of uniqueness of Fourier transform and of lemma 3. This lemma asserts that every function $f \in W_\sigma$ is a fixed point of the operator $\mathscr{S}_\sigma$, defined by the equation

$$\mathscr{S}_\sigma f = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t + x) \frac{\sin \sigma t}{t}\, dt\,.$$

The proof of the preceding lemma follows from important estimate (7). The proofs of the present article are rather simple and they essentially use both the Cauchy integral theorem and the Cauchy integral formula.