Josef Vala

Über den zum Kurvenpaar der Regelfläche konjugierten Komplex

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 93 (1968), No. 1, 47--63

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108657

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 93 (1968), Praha

ÜBER DEN ZUM KURVENPAAR DER REGELFLÄCHE KONJUGIERTEN KOMPLEX

JOSEF VALA, Brno

(Eingegangen am 9. September 1966)

Man betrachtet die Eigenschaften des Kurvenpaares auf der Regelfläche, die keine Torse ist. Zur Betrachtung benützt man den zu diesem Paare konjugierten Geradenkomplex. Es wird die allgemeine Theorie der Komplexen angewandt.

a) Betrachten wir eine Regelfläche Φ im projetiven dreidimensionalen Raum P_3. Die Fläche Φ sei keine Torse. Im Raum P_3 betrachten wir weiter ein festes Koordinatensystem. Jeden zum Raume P_3 gehörigen Punkt kann man durch die Koordinaten $\bar{x}_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, bestimmen. Die Gleichung der Fläche Φ sei der Form

$$x = y(u) + v\, z(u)\,. \tag{1}$$

Wir setzen voraus, daß die Koordinaten der Leitkurven y, z analytische Funktionen der Veränderlichen u im offenen Intervall I sind. Weiter werden wir voraussetzen, daß für alle Werte von u aus dem gegebenen Intervall

$$(y, z, y', z') \neq 0 \tag{2}$$

gilt. In dem behandelten Teil der Fläche Φ liegt darum keine Torsalerzeugende.

Die Differentialgleichungen der Leitkurven der Fläche Φ haben die Gestalt:

$$y'' = \alpha_{11}y + \alpha_{12}z + \beta_{11}y' + \beta_{12}z'\,, \quad z'' = \alpha_{21}y + \alpha_{22}z + \beta_{21}y' + \beta_{22}z'\,. \tag{3}$$

α_{ik}, β_{ik}, α'_{ik}, β'_{ik}, α''_{ik}, β''_{ik}, $i, k = 1, 2$, sind bei der Gültigkeit von (2) reelle Funktionen des Parameters u, die im Intervall I definiert sind.

Auf der Fläche Φ betrachten wir *eine Doppelverhältnisschar* (*R-Schar*)

$$v' + \alpha(u) + 2\,\beta(u)\,v + \gamma(u)\,v^2 = 0\,. \tag{4}$$

Wir setzen voraus, daß $\alpha(u) + 2\,\beta(u)\,v + \gamma(u)\,v^2$, $\alpha'(u) + 2\,\beta'(u)\,v + \gamma'(u)\,v^2$ für $u \in I$ und für alle reelle Werte von v definierte Funktionen der Parameter u, v sind. Dann sind auch die Funktionen $\alpha(u)$, $\beta(u)$, $\gamma(u)$, $\alpha'(u)$, $\beta'(u)$, $\gamma'(u)$ im Intervall I definiert.

Die Tangenten der Kurven der gebenen R-Schar längs der Erzeugenden p der Fläche Φ bilden eine Schar Γ_1 der Erzeugenden der Fläche Ψ zweiter Ordnung (MAYER [3]). Wie bezeichnen Γ_2 die zweite Schar der Erzeugenden der Fläche Ψ.

Die Flächen Ψ, die zur gegebenen R-Schar und zu allen Erzeugenden $p(u \in I)$ der Fläche Φ gehören, bilden eine Quadrikschar Ψ_u. Diese einparametrische Schar von Berührquadriken der Fläche Φ hüllt außer der Regelfläche Φ noch die von den Raumkurven k dritter Ordnung gebildete Fläche Ω ein. Wenn die Kurven k für alle Werte des Parameters $u \in I$ immer in eine Gerade und in einen Kegelschnitt zerfallen, dann ist die betrachtete R-Schar im Intervall I *quadratisch*. Die R-Schar nennen wir im Intervall I *schichtbildend*, wenn die Kurven k für alle Werte des Parameters $u \in I$ in drei Geraden zerfallen.

Der geometrische Ort aller Punkte, in den die Kurven der gegebenen R-Schar die Kurven der asymptotischen R-Schar

$$2v' + \beta_{12} + (\beta_{22} - \beta_{11})\, v - \beta_{21} v^2 = 0 \tag{5}$$

berühren, besteht aus zwei Kurven, den sogenannten *Grundkurven* der gegebenen R-Schar. Wir werden voraussetzen, daß diese Kurven für alle Werte von $u \in I$ reell und nicht zusammenfallend sind. Dann kann man voraussetzen, daß die Grundkurven der gegebenen R-Schar gerade die Kurven y, z sind.

Alle R-Scharen mit y, z als Grundkurven nennen wir $R(y, z)$-Scharen. Die Differentialgleichung der $R(y, z)$-Scharen ist nach (4), (5)

$$v' = \tfrac{1}{2}\beta_{21} v^2 - 2\beta v - \tfrac{1}{2}\beta_{12}\,; \tag{6}$$

β ist eine beliebige, im Intervall I definierte Funktion des Parameters u. Wir werden voraussetzen, daß β' auch für alle $u \in I$ definiert ist.

Unter Voraussetzung, daß keine der Kurven y, z die asymptotischen Kurven der Fläche Φ berührt und die Kurven y, z durch keinen Fleknodalpunkt der Fläche Φ gehen, dann existieren allgemein zwei quadratische $R(y, z)$-Scharen; für diese Scharen gilt dann:

$$\beta\beta_{12} = -\alpha_{12} + \tfrac{1}{2}\beta'_{12} - \tfrac{1}{2}\beta_{11}\beta_{12}\,, \tag{7a}$$

$$\beta\beta_{21} = \alpha_{21} - \tfrac{1}{2}\beta'_{21} + \tfrac{1}{2}\beta_{21}\beta_{22}\,. \tag{7b}$$

Im Intervall I nennen wir die Kurven y, z *im Sinne von Terracini konjugiert*, wenn sie für alle Werte von $u \in I$ die asymptotischen Kurven der Fläche Φ nicht berühren, $\beta_{12} \neq 0$, $\beta_{21} \neq 0$, und wenn für alle Werte von $u \in I$

$$\frac{1}{\beta_{12}}\left[-\alpha_{12} + \tfrac{1}{2}\beta'_{12} - \tfrac{1}{2}\beta_{11}\beta_{12}\right] = \frac{1}{\beta_{21}}\left[\alpha_{21} - \tfrac{1}{2}\beta'_{21} + \tfrac{1}{2}\beta_{21}\beta_{22}\right] \tag{8}$$

gilt.

Wenn die Kurven y, z im Intervall I im Sinne von Terracini konjugiert sind, dann fallen beide quadratischen $R(y, z)$-Scharen (7a), (7b) in eine schichtbildende $R(y, z)$-Schar zusammen. In [5] werden solche spezielle Fälle behandelt, wo eine der Kurven y, z oder beide Kurven y, z fleknodal oder asymptotisch sind.

b) Die asymptotischen Tangenten $(y, -\beta_{12}z + 2y')$, $(z, \beta_{21}y - 2z')$ der Fläche Φ bilden zwei Regelflächen. Die erste Regelfläche $F(y)$ berührt die Fläche Φ längs der Kurve y, die zweite $F(z)$ längs der Kurve z. Die Erzeugenden der Γ_2-Scharen der Flächen Ψ, die zu allen $R(y, z)$-Scharen für $u = u_0$ gehören, schneiden die Flächen $F(y)$, $F(z)$ in den Punkten ihrer Erzeugenden $u = u_0$.

Wir bezeichnen $T(y, z)$ alle Erzeugenden der Γ_2-Scharen, die zu allen $R(y, z)$-Scharen im Intervall I gehören. Nur die Erzeugenden der Fläche Φ zählen wir nicht zur $T(y, z)$-Schar.

Das System $T(y, z)$ gehört zur Schar der Geraden, die die Flächen $F(y)$, $F(z)$ immer in den Punkten der Erzeugenden mit demselben Werte des Parameters u durchschneiden.

Die Tangenten der $R(y, z)$-Schar sind durch die Punkte

$$y + vz\,, \quad y' + vz' + v'z \tag{9}$$

bestimmt; für v' setzen wir nach (6) ein.

Auf der Fläche $F(y)$ liegt für $u = u_0$ der Punkt

$$\varepsilon_1 y + \varepsilon_2(-\beta_{12}z + 2y')\,, \tag{10a}$$

ähnlich auf der Fläche $F(z)$ liegt für $u = u_0$ der Punkt

$$\bar{\varepsilon}_1 z + \bar{\varepsilon}_2(\beta_{21}y - 2z')\,; \tag{10b}$$

ε_1, ε_2, $\bar{\varepsilon}_1$, $\bar{\varepsilon}_2$ sind Konstanten. Wir werden den Fall betrachten, daß die Verbindungsgerade der Punkte (10a), (10b) die Erzeugende der zu einer $R(y, z)$-Schar gehörigen Γ_2-Schar ist. Nach (9) gilt dann unbedingt für alle Werte von v:

$$(y + vz,\, y' + vz' + v'z,\, \varepsilon_1 y + \varepsilon_2[-\beta_{12}z + 2y'],\, \bar{\varepsilon}_1 z + \bar{\varepsilon}_2[\beta_{21}y - 2z']) = 0. \tag{11}$$

In der Gleichung (11) setzen wir für v' nach (6) ein. Aus dieser Gleichung bekommen wir wegen Gültigkeit von (2)

$$-4\beta\varepsilon_2\bar{\varepsilon}_2 + \varepsilon_2\bar{\varepsilon}_1 + \varepsilon_1\bar{\varepsilon}_2 = 0\,.$$

Wenn wir $\varepsilon_2 = \bar{\varepsilon}_2 = 1$, $\varepsilon_1 = 2\beta - \varrho$ voraussetzen, dann bekommen wir $\bar{\varepsilon}_1 = 2\beta + \varrho$.

Betrachten wir die Geradenschar

$$q = ([2\beta - \varrho]\,y - \beta_{12}z + 2y',\; [2\beta + \varrho]\,z + \beta_{21}y - 2z')\,, \tag{12}$$

u, β, ϱ sind die Parameter der Gleichung (12). Wir werden voraussetzen, daß die Parameter β, ϱ alle reelle Werte annehmen, und daß der Parameter u alle Werte aus dem Intervall I annimmt. Zu der Schar (12) gehört für $\beta = \beta(u)$, $u = u_0$ eine einparametrische Schar. Die Erzeugenden dieser Schar schneiden die Tangenten der Kurven der $R(y, z)$-Schar mit $\beta = \beta(u)$, für die $u = u_0$ gilt.

Wir betrachten die Quergeraden der Erzeugenden der Flächen $F(y)$, $F(z)$, für die $u = u_0$ gilt. Durch den gegebenen Punkt $\sigma_1 y + \sigma_2 z + \sigma_3 y' + \sigma_4 z'$ des Raumes P_3 geht dann allgemein eine Gerade der Schar (12); für die Parameter β, ϱ gilt dann:

$$\sigma_3(2\beta - \varrho) = 2\sigma_1 + \sigma_4\beta_{21}\,, \quad \sigma_4(2\beta + \varrho) = -2\sigma_2 - \sigma_3\beta_{12}\,.$$

Diese Gleichungen haben im Falle $\sigma_3 = \sigma_4 = 0$, d. h. für die Punkte auf der Geraden p $(u = u_0)$ der Fläche Φ, keine Lösung. Für die nicht auf y, bzw. z, liegenden Punkte der Flächen $F(y)$, $F(z)$ haben die angeführten Gleichungen unendlich viele Lösungen. Es ist klar, daß (11) die Gleichung der $T(y, z)$-Schar ist.

Die $T(y, z)$-Schar ist dreiparametrisch. Sie gehört allgemein zu den Quergeraden der entsprechenden Erzeugenden der Flächen $F(y)$, $F(z)$.

Satz 1. *Die $T(y, z)$-Schar gehört dann und nur dann zur Kongruenz, wenn y, z geradlinig sind.*

Beweis. Wenn die $T(y, z)$-Schar zur Kongruenz gehört, dann sind die Punkte q, $\partial q/\partial u$, $\partial q/\partial \beta$, $\partial q/\partial \varrho$ des Kleinschen Raumes P_5 linear abhängig. Aus (12), (3) folgt dann, daß die Existenz dieser Abhängigkeit nur im Falle $\alpha_{12} = \alpha_{21} = \beta_{12} = \beta_{21} = 0$ möglich ist. Bei der Gültigkeit dieser Gleichungen sind nach (3) beide Linien y, z geradlinig. Wenn umgekehrt y, z geradlinig sind, dann gehört die $T(y, z)$-Schar zur linearen Kongruenz.

Im folgenden schließen wir diesen Fall aus.

Die $T(y, z)$-Schar der Geraden q ist ein Komplexstück. Die Erzeugenden der $T(y, z)$-Schar kann man auf zwei Arten in eine zweiparametrische Menge von Geradenbüscheln zerlegen. Die Scheitel der Büschel liegen auf der Fläche $F(y)$, bzw. $F(z)$. Ein Inflexmittelpunkt der gegebenen Erzeugenden der $T(y, z)$-Schar liegt auf der Fläche $F(y)$ und der zweite Inflexmittelpunkt auf der Fläche $F(z)$.

Wir betrachten ein bewegliches Tetraeder mit den Ecken:

$$A_1 = (2\beta - \varrho)\, y - \beta_{12} z + 2y'\,, \quad A_2 = \beta_{21} y + (2\beta + \varrho)\, z - 2z'\,, \quad A_3 = z\,, \quad A_4 = y\,. \tag{13}$$

Der Punkt A_1 liegt auf der Fläche $F(y)$, der Punkt A_2 auf der Fläche $F(z)$.

Wenn

$$\mathrm{d}A_i = \omega_i^k A_k\,, \quad i, k = 1, 2, 3, 4\,, \tag{14}$$

gilt, dann bekommen wir aus den Gleichungen (13), (3) für ω_i^k folgende Werte:

$$(15)\quad \begin{aligned} &\omega_1^1 = du[\tfrac{1}{2}(2\beta - \varrho) + \beta_{11}], && \omega_2^1 = -\tfrac{1}{2}\beta_{21}\, du, \\ &\omega_1^2 = -\tfrac{1}{2}\beta_{12}\, du, && \omega_2^2 = du[-\tfrac{1}{2}(2\beta + \varrho) + \beta_{22}], \\ &\omega_1^3 = \Omega_{12}\, du, && \omega_2^3 = 2\, d\beta + d\varrho + a_{23}\, du, \\ &\omega_1^4 = 2\, d\beta - d\varrho + a_{14}\, du, && \omega_2^4 = \Omega_{21}\, du, \\ &\omega_3^1 = 0, \quad \omega_3^2 = -\tfrac{1}{2}\, du, && \omega_3^3 = \tfrac{1}{2}\, du(2\beta + \varrho), \quad \omega_3^4 = \tfrac{1}{2}\beta_{21}\, du, \\ &\omega_4^1 = \tfrac{1}{2}\, du, \quad \omega_4^2 = 0, && \omega_4^3 = \tfrac{1}{2}\beta_{12}\, du, \quad \omega_4^4 = -\tfrac{1}{2}\, du(2\beta - \varrho); \end{aligned}$$

$$(16)\quad \begin{aligned} \Omega_{12} &= 2\beta\beta_{12} + \beta_{11}\beta_{12} + 2\alpha_{12} - \beta'_{12}, \\ \Omega_{21} &= 2\beta\beta_{21} - \beta_{22}\beta_{21} - 2\alpha_{21} + \beta'_{21}, \\ a_{14} &= 2\alpha_{11} - \tfrac{1}{2}(2\beta - \varrho)^2 - \beta_{11}(2\beta - \varrho) + \tfrac{1}{2}\beta_{12}\beta_{21}, \\ a_{23} &= -2\alpha_{22} - \tfrac{1}{2}\beta_{12}\beta_{21} + \tfrac{1}{2}(2\beta + \varrho)^2 - \beta_{22}(2\beta + \varrho). \end{aligned}$$

c) Wir werden jetzt den Fall betrachten, daß $T(y, z)$ zum linearen Komplex gehört. Wenn die Kurve y, bzw. z, geradlinig ist, dann gehört $T(y, z)$-Schar zum speziellen linearen Komplex mit der Achse y, bzw. z. Die Fälle, daß y oder z geradlinig ist, schließen wir im folgenden aus.

Im Kleinschen Raum P_5 betrachten wir ein bewegliches Koordinatensystem mit den Ecken $(A_1, A_2), (A_1, A_3), (A_1, A_4), (A_2, A_3), (A_2, A_4), (A_3, A_4)$.

Wenn $T(y, z)$-Schar zum linearen Komplex gehört, dann liegen die Kleinschen Bilder der Geraden q in einer Hyperebene. Wenn

$$(17)\quad \begin{aligned} r = \lambda_1(A_1, A_2) + \lambda_2(A_1, A_3) + \lambda_3(A_1, A_4) + \lambda_4(A_2, A_3) + \\ + \lambda_5(A_2, A_4) + \lambda_6(A_3, A_4) \end{aligned}$$

der Pol dieser Hyperebene im Bezug zur Kleinschen Quadrik ist, dann gilt $\lambda_6 = 0$ und

$$(18)\quad dr = \Theta r, \quad \Theta = \Theta(u, \beta, \varrho, du, d\varrho, d\beta).$$

Aus dieser Gleichung bekommen wir nach (17), (15), (16)

$$(19)\quad \begin{aligned} &(A_1, A_2)\{d\lambda_1 + du[\lambda_1(-\varrho + \beta_{11} + \beta_{22}) + \tfrac{1}{2}\lambda_2 - \tfrac{1}{2}\lambda_5] - \Theta\lambda_1\} + \\ &+ (A_1, A_3)\{d\lambda_2 + 2\lambda_1\, d\beta + \lambda_1\, d\varrho + du[a_{23}\lambda_1 + \lambda_2(2\beta + \beta_{11}) + \\ &+ \tfrac{1}{2}\lambda_3\beta_{12} - \tfrac{1}{2}\lambda_4\beta_{21} - \Theta\lambda_2\} + \\ &+ (A_1, A_4)\{d\lambda_3 + du[\lambda_1\Omega_{21} + \tfrac{1}{2}\beta_{21}\lambda_2 + \beta_{11}\lambda_3 - \tfrac{1}{2}\beta_{21}\lambda_5] - \Theta\lambda_3\} + \\ &+ (A_2, A_3)\{d\lambda_4 + du[-\lambda_1\Omega_{12} - \tfrac{1}{2}\beta_{12}\lambda_2 + \beta_{22}\lambda_4 + \tfrac{1}{2}\beta_{12}\lambda_5] - \Theta\lambda_4\} + \\ &+ (A_2, A_4)\{d\lambda_5 - 2\lambda_1\, d\beta + \lambda_1\, d\varrho + du[-a_{14}\lambda_1 - \tfrac{1}{2}\lambda_3\beta_{12} + \tfrac{1}{2}\lambda_4\beta_{21} + \\ &+ \lambda_5(-2\beta + \beta_{22})] - \Theta\lambda_5\} + \\ &+ (A_3, A_4)\{d\beta(-2\lambda_2 + 2\lambda_5) + d\varrho(\lambda_2 + \lambda_5) + du(-a_{14}\lambda_2 + \lambda_3\Omega_{12} - \\ &- \lambda_4\Omega_{21} + a_{23}\lambda_5)\} = 0. \end{aligned}$$

Die Ecken des Koordinatensystems sind linear unabhängig, die Relation (19) gilt für alle Werte von u nur in dem Falle, daß die Koeffizienten bei $(A_1, A_2), (A_1, A_3), (A_1, A_4), (A_2, A_3), (A_2, A_4), (A_3, A_4)$ gleich Null sind.

Es gilt besonders:

$$\begin{aligned} (20) \qquad & d\beta(-2\lambda_2 + 2\lambda_5) + d\varrho(\lambda_2 + \lambda_5) + \\ & + du(-a_{14}\lambda_2 + \lambda_3\Omega_{12} - \lambda_4\Omega_{21} + a_{23}\lambda_5) = 0\,. \end{aligned}$$

u, β, ϱ sind die unabhängigen Parameter; aus der Gleichung (20) folgt dann:

$$\lambda_2 = \lambda_5 = 0\,, \quad \lambda_3\Omega_{12} - \lambda_4\Omega_{21} = 0\,.$$

Wenn die übrigen Koeffizienten gleich Null sind, dann bekommen wir:

$$(21a) \qquad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_5 = \lambda_6 = 0\,,$$

$$(21b) \qquad \lambda_3\tau_{12} - \lambda_4\tau_{21} = 0\,, \quad \lambda_3\beta_{12} - \lambda_4\beta_{21} = 0\,,$$

$$(21c) \qquad d\lambda_3 + \lambda_3\beta_{11}\,du - \Theta\lambda_3 = 0\,, \quad d\lambda_4 + \lambda_4\beta_{22}\,du - \Theta\lambda_4 = 0\,,$$

wo

$$(22) \qquad \tau_{12} = \beta_{11}\beta_{12} + 2\alpha_{12} - \beta'_{12}\,, \quad \tau_{21} = -\beta_{22}\beta_{21} - 2\alpha_{21} + \beta'_{21}\,.$$

Aus den Gleichungen (21a), (17) folgt, daß der Punkt r die lineare Kombination der Punkte $(A_1, A_4), (A_2, A_3)$ ist. Wenn der Punkt r auf der Kleinschen Quadrik liegt, dann gilt $\lambda_3 \,.\, \lambda_4 = 0$ für alle Werte von $u \in I$.

Setzen wir im folgenden voraus, daß für $u = u_0$, $u_0 \in I$, $\lambda_3 = 0$ gilt und daß $T(y, z)$-Schar zum linearen Komplex gehört. r ist ein fester Punkt, $T(y, z)$-Schar gehört zum speziellen linearen Komplex. Für jeden Wert u_1 des Parameters u, $u_1 \in I$, $u_1 \neq u_0$, liegt der Punkt r der Kleinschen Quadrik auf der Verbindungsgeraden der Punkte $(A_1(u_1), A_4(u_1)), (A_2(u_1), A_3(u_1))$ der Kleinschen Quadrik. Nach der Voraussetzung sind die Kurven y, z nicht geradlinig, darum zerfällt das Kleinsche Bild der Fläche $F(z)$ nicht in den geometrischen Punkt $(A_2(u_0), A_3(u_0))$. Es gilt also allgemein, daß $(A_2(u_1), A_3(u_1))$, r nicht zusammenfallen. Dann aber schneidet die Verbindungsgerade der Punkte $A_1(u_1)$, $A_4(u_1)$ die Verbindungsgerade der Punkte $A_2(u_1)$, $A_3(u_1)$. Das ist aber unmöglich, da wir voraussetzten, daß im Intervall I keine Torsalerzeugende der Fläche Φ liegt. Es gilt also $\lambda_3 \neq 0$ und ähnlich $\lambda_4 \neq 0$ für alle Werte des Parameters $u \in I$.

Im folgenden werden wieder die Bedingungen der Gehörigheit der $T(y, z)$-Schar zum linearen Komplex betrachtet. Aus den Gleichungen (21b), (21c) bekommen wir:

$$(23a) \qquad \lambda_3\tau_{12} - \lambda_4\tau_{21} = 0\,, \quad \lambda_3\beta_{12} - \lambda_4\beta_{21} = 0\,,$$

$$(23b) \qquad -d\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_4}\right) + \frac{\lambda_3}{\lambda_4}(\beta_{22} - \beta_{11})\,du = 0\,.$$

Wenn also die Lösung λ_3/λ_4 der Gleichungen (23) existiert, dann gehört $T(y, z)$ zum linearen Komplex.

Satz 2. *Wenn die $T(y, z)$-Schar zum nichtspeziellen linearen Komplex gehört, dann haben jede zwei Paare der entsprechenden Geraden der Flächen $F(y)$, $F(z)$ eine hyperboloidische Lage.*

Beweis. Die Verbindungsgeraden der Bilder der entsprechenden Geraden der Flächen $F(y)$, $F(z)$ gehen durch den Punkt r. Für alle zwei Werte $u_1, u_2 \in I$ des Parameters u liegen die Kleinschen Bilder der Erzeugenden der Flächen $F(y)$, $F(z)$ immer in einer Ebene.

d) Für die weitere Berechnung brauchen wir die Gleichung der Fleknodalkurven der Fläche Φ:

$$(24)\qquad \begin{aligned}&\alpha_{12} - \tfrac{1}{2}\beta'_{12} + \tfrac{1}{4}\beta_{12}(\beta_{22} + \beta_{11}) + v[(\alpha_{22} - \alpha_{11}) - \tfrac{1}{2}(\beta'_{22} - \beta'_{11}) + \\ &\quad + \tfrac{1}{4}(\beta^2_{22} - \beta^2_{11})] + v^2[-\alpha_{21} + \tfrac{1}{2}\beta'_{21} - \tfrac{1}{4}\beta_{21}(\beta_{22} + \beta_{11})] = 0\end{aligned}$$

und die Gleichung der Komplexkurven der Fläche Φ:

$$(25)\qquad \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} + 2v \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} - v^2 \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0\,,$$

$$\begin{aligned}
A_1 &= \tau_{21} + \beta_{11}\beta_{21} + 2\beta_{21}\beta_{22} - \tfrac{3}{2}\beta_{21}(\beta_{11} + \beta_{22})\,,\\
B_1 &= 2\alpha_{11} - 2\alpha_{22} + \beta'_{22} + \beta^2_{22} - \beta'_{11} - \beta^2_{11} - \tfrac{3}{2}(\beta^2_{22} - \beta^2_{11})\,,\\
C_1 &= -\tau_{12} + 2\beta_{11}\beta_{12} + \beta_{12}\beta_{22} - \tfrac{3}{2}\beta_{12}(\beta_{11} + \beta_{22})\,,\\
A_2 &= M_2 - \tfrac{1}{2}\beta_{21}M_6\,, \quad B_2 = M_3 + M_4 - \tfrac{1}{2}(\beta_{22} - \beta_{11})\,M_6\,,\\
C_2 &= -M_5 - \tfrac{1}{2}\beta_{12}M_6\,,\\
M_2 &= \tau'_{21} + (\beta_{11}\beta_{21} + 2\beta_{21}\beta_{22})' + \beta_{11}(\tau_{21} + \beta_{11}\beta_{21} + 2\beta_{21}\beta_{22}) + \\
&\quad + \beta_{21}(2\alpha_{11} + \beta'_{22} + \beta^2_{22}) - 3\alpha_{21}(\beta_{11} + \beta_{22})\,,\\
M_3 &= (2\alpha_{11} + \beta'_{22} + \beta^2_{22})' + \beta_{12}(\tau_{21} + \beta_{11}\beta_{21} + 2\beta_{21}\beta_{22}) + \\
&\quad + \beta_{22}(2\alpha_{11} + \beta'_{22} + \beta^2_{22}) + 3\alpha_{11}(\beta_{11} + \beta_{22})\,,\\
M_4 &= (-2\alpha_{22} - \beta'_{11} - \beta^2_{11})' + \beta_{11}(-2\alpha_{22} - \beta'_{11} - \beta^2_{11}) + \\
&\quad + \beta_{21}(\tau_{12} - 2\beta_{11}\beta_{12} - \beta_{12}\beta_{22}) - 3\alpha_{22}(\beta_{11} + \beta_{22})\,,\\
M_5 &= \tau'_{12} + (-2\beta_{11}\beta_{12} - \beta_{12}\beta_{22})' + \beta_{12}(-2\alpha_{22} - \beta'_{11} - \beta^2_{11}) + \\
&\quad + \beta_{22}(\tau_{12} - 2\beta_{11}\beta_{12} - \beta_{12}\beta_{22}) + 3\alpha_{12}(\beta_{11} + \beta_{22})\,,\\
M_6 &= 3(\beta_{11} + \beta_{22})' + (2\alpha_{11} + \beta'_{22} + \beta^2_{22}) - (-2\alpha_{22} - \beta'_{11} - \beta^2_{11}) + \\
&\quad + 3\beta_{11}(\beta_{11} + \beta_{22}) + 3\beta_{22}(\beta_{11} + \beta_{22})\,.
\end{aligned}$$

Satz 3. *Wenn die Kurven y, z im Intervall I im Sinne von Terracini konjugiert sind, dann ist die Existenz von zwei asymptotischen, zum Paare y, z apolaren Kurven der Fläche Φ die notwendige und hinreichende Bedingung der Gehörigkeit von $T(y, z)$ zum linearen Komplex.*

Beweis. Wenn die Kurven y, z für alle Werte des Parameters $u \in I$ im Sinne von Terracini konjugiert sind, dann gilt $\beta_{12} \neq 0$, $\beta_{21} \neq 0$ und die Relation (8). Wir berechnen λ_3/λ_4 aus der zweiten Gleichung (23a) und setzen in die erste Gleichung (23a) und in die Gleichung (23b). Dann bekommen wir:

$$\beta_{21}\tau_{12} - \beta_{12}\tau_{21} = 0\,, \tag{26a}$$

$$\beta_{12}\beta_{21}(\beta_{22} - \beta_{11}) - \beta'_{21}\beta_{12} + \beta'_{12}\beta_{21} = 0\,. \tag{26b}$$

Die Gleichung (26a) ist bei der Gültigkeit von $\beta_{12} \neq 0$, $\beta_{21} \neq 0$ die Relation der Konjugiertheit der Kurven y, z im Sinne von Terracini. Die Gleichung (26b) werden wir im folgenden symbolisch in der Form $\varkappa = 0$ schreiben.

Wir bestimmen jetzt die Bedingungen zur Existenz von zwei asymptotischen Kurven auf der Fläche Φ, die apolar zum Kurvenpaare y, z sind. Die Gleichung dieser Kurven ist $v = \pm\lambda(u)$. Nach (5) bekommen wir dann:

$$2\lambda' + \beta_{12} + \lambda(\beta_{22} - \beta_{11}) - \lambda^2\beta_{21} = 0\,,$$
$$-2\lambda' + \beta_{12} - \lambda(\beta_{22} - \beta_{11}) - \lambda^2\beta_{21} = 0\,.$$

Aus diesen Gleichungen bekommen wir:

$$2\lambda' + \lambda(\beta_{22} - \beta_{11}) = 0\,, \quad \lambda^2 = \frac{\beta_{12}}{\beta_{21}}\,. \tag{27}$$

$\lambda = \pm\sqrt{(\beta_{12}/\beta_{21})}$ ist nur dann die Lösung der angeführten Gleichungen, wenn die Relation (26b) erfüllt ist, das folgt aus der ersten Gleichung (27).

Im folgenden (bis zum Satze 6) setzen wir voraus, daß die Fläche Φ nicht zur linearen Kongruenz gehört und keine Quadrik ist. Weiter setzen wir voraus, daß für alle Werte von $u \in I$ die Komplexpunkte (endliche Zahl) der Fläche Φ definiert sind.

Satz 4. *Unter der Voraussetzung, daß die Kurven y, z im Sinne von Terracini konjugiert sind und daß sie durch keinen Fleknodalpunkt der Fläche Φ gehen, gehört die $T(y, z)$-Schar genau dann zum linearen Komplex, wenn die Komplexkurven der Fläche Φ zum Kurvenpaare y, z apolar sind.*

Beweis. Nach (25) bekommen wir die Bedingung, daß das Paar y, z von den im Sinne von Terracini konjugierten Kurven zum Paare der Komplexkurven apolar ist.

$$\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} = 0\,. \tag{28}$$

Bei der Benützung $\beta_{12} \neq 0$, $\beta_{21} \neq 0$ und der Gleichung (26a) bekommen wir:

(29) $$\left[\frac{\tau_{12}}{\beta_{12}} + \tfrac{1}{2}(\beta_{22} - \beta_{11})\right]^2 \varkappa = 0\,.$$

Setzen wir voraus, daß für $u = u_0 \in I$

(30a) $$\tau_{12} = -\tfrac{1}{2}\beta_{12}(\beta_{22} - \beta_{11})$$

gilt, dann gilt gleichzeitig nach (26a)

(30b) $$\tau_{21} = -\tfrac{1}{2}\beta_{21}(\beta_{22} - \beta_{11})\,.$$

Die Relationen (30) sind die Bedingungen, daß die Punkte $y(u_0)$, $z(u_0)$ der Fläche Φ fleknodal sind. Im folgenden schließen wir diese Fälle aus.

Wenn $\varkappa = 0$ gilt, dann sind die Komplexkurven der Fläche Φ nach (29) zum Kurvenpaare y, z apolar; wenn die Relation (29) nicht erfüllt ist, dann gilt $\varkappa \neq 0$, die $T(y, z)$-Schar gehört nicht zu dem linearen Komplex.

Wir setzen im folgenden voraus, daß die Komplexkurven der Fläche Φ apolar zu den nicht durch die Fleknodalpunkte der Fläche Φ gehenden Kurven y, z sind. Die Kurven y, z seien im Intervall I im Sinne von Terracini konjugiert.

Wir werden betrachten, ob es möglich wäre, daß die Komplexkurven bei der Erfüllung dieser Voraussetzungen asymptotisch sind. Die notwendige und hinreichende Bedingung, daß die Fläche Φ zum linearen Komplex gehört, ist gerade die Bedingung, daß die Komplexkurven der Fläche Φ asymptotisch sind.

In diesem Falle ist nach (27) $v = \pm\lambda$ die Lösung der Gleichung der erwähnten Komplexkurven. Die Gleichung der Komplexkurven der Fläche Φ betrachten wir nach (25) in der Form:

(31) $$M - v^2 N = 0\,,$$

$$M = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \quad N = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}.$$

Wenn wir für $\lambda = v$ aus der zweiten Gleichung (27) in die Gleichung (31) einsetzen, dann bekommen wir

(32) $$\begin{vmatrix} \beta_{12}A_1 + \beta_{21}C_1 & B_1 \\ \beta_{12}A_2 + \beta_{21}C_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Aus den Gleichungen (25), (26a), (22) folgt die Relation

$$\beta_{12}A_1 + \beta_{21}C_1 = 0\,;$$

die Bedingung (32) hat dann folgende Form:

$$-B_1[\beta_{12}A_2 + \beta_{21}C_2] = 0\,,$$

oder nach (25)

$$(33) \qquad B_1\varkappa\left[\frac{\tau_{12}}{\beta_{12}} + \tfrac{1}{2}(\beta_{22} - \beta_{11})\right] = 0 .$$

Nach den Voraussetzungen und nach dem Satze 3 gilt $\varkappa = 0$, die Relation (33) ist erfüllt. Die erste Gleichung (27) ist auch bei $\varkappa = 0$ erfüllt.

Satz 5. *Unter der Voraussetzung, daß y, z im Intervall I die Asymptotenkurven nicht berühren und daß y, z im Intervall I die Fleknodalkurven der Fläche Φ sind, gehört die $T(y, z)$-Schar genau dann zum linearen Komplex, wenn die Fläche Φ zum linearen Komplex gehört.*

Beweis. Unter den angeführten Voraussetzungen gelten nach (24) die Relationen (30), weiter ist die Relation der Konjugiertheit (26a) erfüllt. Es ist gut bekannt, daß die Komplexkurven apolar zu den Fleknodalkurven sind. Die Relation (29) ist also erfüllt. Nach (26) genügt nur eine Bedingung dazu, daß die $T(y, z)$-Schar zum linearen Komplex gehört und zwar $\varkappa = 0$. Bei der Erfüllung dieser Bedingung gibt es aber nach (27) auf der Fläche Φ zwei Asymptotenkurven, die apolar zum Kurvenpaare y, z sind. Aus der Gleichung der Komplexkurven der Fläche Φ folgt, daß diese Asymptotenkurven Komplexkurven der Fläche Φ sind, die Fläche Φ gehört zum linearen Komplex. Wenn $\varkappa \neq 0$ gilt, dann sind die Komplexkurven nicht asymptotisch, es existiert nicht die Lösung der Gleichungen (27).

Satz 6. *Setzen wir voraus, daß die Kurven y, z im Intervall I im Sinne von Terracini konjugiert sind und auf der Fläche Φ der linearen Kongruenz liegen. Weiter setzen wir voraus, daß y, z im Intervall I die Achsen der Kongruenz nicht durchschneiden und die Fläche Φ im Intervall I keine hyperboloidische Erzeugende hat. Dann gehört die $T(y, z)$-Schar zum linearen Komplex.*

Beweis. In diesem Falle sind alle Koeffizienten in der Gleichung der Komplexkurven gleich Null, die Bedingung (28), die man auch in der Form $\varkappa = 0$ schreiben kann, ist erfüllt. (Die Kurven y, z sind keine Fleknodalkurven, die bestehen aus den Achsen der Kongruenz.) Die Bedingungen der Gehörigkeit der $T(y, z)$-Schar zum linearen Komplex sind also erfüllt.

Satz 7. *Unter der Voraussetzung, daß die Kurven y, z auf der Fläche Φ zweiter Ordnung liegen und die Erzeugenden der Fläche Φ im Intervall I nicht berühren, gehört die $T(y, z)$-Schar zum linearen Komplex dann, wenn die Kurven y, z zum Erzeugendenpaar der Fläche Φ apolar sind.*

Beweis. Die Bedingung, daß die Kurven y, z auf der Quadrik liegen, bekommen wir nach (24) in der Form

$$\begin{aligned} \alpha_{12} - \tfrac{1}{2}\beta'_{12} + \tfrac{1}{4}\beta_{12}(\beta_{11} + \beta_{22}) &= 0 , \\ \alpha_{22} - \alpha_{11} - \tfrac{1}{2}(\beta'_{22} - \beta'_{11}) + \tfrac{1}{4}(\beta_{22} - \beta_{11})(\beta_{22} + \beta_{11}) &= 0 , \\ -\alpha_{21} + \tfrac{1}{2}\beta'_{21} - \tfrac{1}{4}\beta_{21}(\beta_{11} + \beta_{22}) &= 0 . \end{aligned}$$

Wenn wir aus diesen Gleichungen für $\alpha_{12} - \frac{1}{2}\beta'_{12}$, $-\alpha_{21} + \frac{1}{2}\beta'_{21}$ in die Gleichung $\tau_{12}\beta_{21} - \tau_{21}\beta_{12} = 0$ einsetzen, dann ist diese Gleichung für alle Werte von $u \in I$ erfüllt. Jede zwei Kurven auf der Quadrik, die nicht die Asymptotenkurven im Intervall I berühren, sind im Intervall I im Sinne von Terracini konjugiert. Die Existenz von zwei zum Kurvenpaare y, z apolaren Asymptotenkurven ist also nach (26) und nach dem Satze 3 die einzige Bedingung, daß die $T(y, z)$-Schar zum linearen Komplex gehört.

Satz 8. *Setzen wir voraus, daß die Kurven y, z im Intervall I Asymptotenkurven der Fläche Φ sind und daß sie im Intervall I nicht durch die Fleknodalpunkte der Fläche Φ gehen. Weiter werden wir voraussetzen, daß für alle Werte von $u \in I$ die Komplexpunkte (endliche Zahl) der Fläche Φ definiert sind. Dann ist die Apolarität der Komplexkurven der Fläche Φ zum Kurvenpaar y, z die notwendige und hinreichende Bedingung dazu, daß die $T(y, z)$-Schar zum linearen Komplex gehört.*

Beweis. Aus der ersten Gleichung (23a) kann man λ_3/λ_4 berechnen und in die Relation (23b) einsetzen. Wir bekommen dann:

$$\tau_{12}\tau_{21}(\beta_{22} - \beta_{11}) - \tau_{12}\tau'_{21} + \tau_{21}\tau'_{12} = 0\,. \tag{34}$$

Unter den im Satze 8 angeführten Voraussetzungen gilt $\beta_{12} = 0$, $\beta_{21} = 0$ und nach (24) $\alpha_{12} \neq 0$, $\alpha_{21} \neq 0$ für alle Werte des Parameters $u \in I$. Die zweite Relation (23a) ist also erfüllt. Die einzige Bedingung dazu, daß die $T(y, z)$-Schar zum linearen Komplex gehört, ist nach (23) die Relation (34).

Ohne die Allgemeinheit der Lösungen zu beschränken, kann man voraussetzen, daß die parametrische Schar der Fläche Φ die asymptotische Schar ist und die Umnormung so durchgeführt ist, daß $\beta_{11} = \beta_{12} = \beta_{21} = \beta_{22} = 0$ gilt. Die Gleichung (34) hat dann die Form:

$$-\alpha_{12}\alpha'_{21} + \alpha'_{12}\alpha_{21} = 0\,. \tag{35}$$

Nach der Voraussetzung gehen die Kurven y, z im Intervall I nicht durch die Fleknodalpunkte der Fläche Φ, es gilt nach (24) $\alpha_{12} \neq 0$, $\alpha_{21} \neq 0$ und aus der Gleichung (35) bekommen wir dann:

$$\alpha_{12} = c\alpha_{21}\,, \quad c = \text{konst.} \neq 0\,. \tag{35a}$$

Der Koeffizient bei dem linearen Gliede in der Gleichung (25) ist unter Voraussetzung $\beta_{11} = \beta_{12} = \beta_{21} = \beta_{22} = 0$, $\alpha_{12} \neq 0$, $\alpha_{21} \neq 0$ genau dann Null gleich, wenn die Relation (35) gilt. Bei ihrer Gültigkeit und nur dann ist das Kurvenpaar y, z zum Komplexkurvenpaar apolar.

Nach (25) sind die Komplexkurven bei der Gültigkeit $\beta_{11} = \beta_{12} = \beta_{21} = \beta_{22} = 0$, (35a) asymptotisch, die Fläche Φ gehört zum linearen Komplex. Das folgt auch aus der Bedingung der Gehörigkeit der Fläche Φ zum linearen Komplex:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{12} & \alpha_{22} - \alpha_{11} & -\alpha_{21} \\ \alpha'_{12} & \alpha'_{22} - \alpha'_{11} & -\alpha'_{21} \\ \alpha''_{12} & \alpha''_{22} - \alpha''_{11} & -\alpha''_{21} \end{vmatrix} = 0\,. \tag{36}$$

Satz 9. *Setzen wir voraus, daß die Kurven y, z im Intervall I Asymptotenkurven der Fläche Φ sind und daß sie im Intervall I nicht durch die Fleknodalpunkte der Fläche Φ gehen. Weiter werden wir voraussetzen, daß die Fläche Φ zur linearen Kongruenz gehört. Dann gehört die $T(y, z)$-Schar zum linearen Komplex.*

Beweis. Die Bedingung der Gehörigkeit der Fläche Φ zur linearen Kongruenz ist bei $\beta_{12} = \beta_{21} = \beta_{11} = \beta_{22} = 0$ die lineare Abhängigkeit der ersten zwei Zeilen in der Determinante (36). Die Relation (35) ist also immer erfüllt.

Im folgenden (bis zum Ende des Abschnittes **d**)) werden wir voraussetzen, daß die Komplexpunkte auf allen Geraden $p \in I$ der Fläche Φ durch (25) definiert sind. Weiter wird vorausgesetzt, daß die Komplexkurven im Intervall I entweder beide reell, oder imaginär, oder zusammenfallend sind. Auf der Fläche Φ betrachten wir alle *Kurven C*, die im Intervall I der Differentialklasse C^2 sind und jede Erzeugende $p \in I$ in einem Punkt durschneiden.

Satz 10. *Setzen wir voraus, daß die Fläche Φ zum linearen Komplex gehört. Dann sind jede zwei zu den Komplexkurven der Fläche Φ apolaren und die Asymptotenlinien der Fläche Φ im I nicht berührenden Kurven C, im Intervall I im Sinne von Terracini konjugiert.*

Beweis. Die parametrischen Kurven der Fläche Φ seien die Asymptotenlinien, die Umnormung sei so durchgeführt, daß $\beta_{11} = \beta_{12} = \beta_{21} = \beta_{22} = 0$ gilt.

Auf der Fläche Φ betrachten wir zwei Kurven $\bar{y} = y + \lambda(u)\, z$, $\bar{z} = y + \mu(u)\, z$. Wir setzen voraus, daß diese Kurven im Intervall I die Asymptotenkurven nicht berühren. Wir transformieren nun die Leitkurven der Fläche Φ so, daß die Kurven $\bar{y}$, $\bar{z}$ neue Leitkurven sind. Ihre Differentialgleichung hat die Form:

$$\bar{y}'' = \bar{\alpha}_{11}\bar{y} + \bar{\alpha}_{12}\bar{z} + \bar{\beta}_{11}\bar{y}' + \bar{\beta}_{12}\bar{z}'\,, \quad \bar{z}'' = \bar{\alpha}_{21}\bar{y} + \bar{\alpha}_{22}\bar{z} + \bar{\beta}_{21}\bar{y}' + \bar{\beta}_{22}\bar{z}'\,.$$

Leicht bekommen wir:

$$\bar{\beta}_{11} = \frac{-2\lambda'}{\mu - \lambda}\,, \quad \bar{\beta}_{12} = \frac{2\lambda'}{\mu - \lambda}\,, \quad \bar{\beta}_{21} = \frac{-2\mu'}{\mu - \lambda}\,, \quad \bar{\beta}_{22} = \frac{2\mu'}{\mu - \lambda}\,, \tag{37}$$

$$\bar{\alpha}_{12}(\mu - \lambda) = \alpha_{12} + \lambda(\alpha_{22} - \alpha_{11}) - \lambda^2\alpha_{21} + \lambda'' + \frac{2\lambda'^2}{\mu - \lambda} - \frac{2\lambda'\mu'}{\mu - \lambda}\,,$$

$$\bar{\alpha}_{21}(\mu - \lambda) = -\alpha_{12} - \mu(\alpha_{22} - \alpha_{11}) + \mu^2\alpha_{21} - \mu'' - \frac{2\lambda'\mu'}{\mu - \lambda} + \frac{2\mu'^2}{\mu - \lambda}\,.$$

Aus den Gleichungen (37), (8) bekommen wir die Bedingung der Konjugiertheit der Kurven $\bar{y}$, $\bar{z}$ im Sinne von Terracini:

$$\mu'[\alpha_{12} + \lambda(\alpha_{22} - \alpha_{11}) - \lambda^2\alpha_{21}] + \lambda'[\alpha_{12} + \mu(\alpha_{22} - \alpha_{11}) - \mu^2\alpha_{21}] = 0\,. \tag{38}$$

Setzen wir voraus, daß die Komplexkurven der Fläche Φ im Intervall I reell, nicht zusammenfallend sind. Wenn die Fläche Φ zum linearen Komplex gehört, dann sind diese Kurven asymptotisch und man kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, daß die Komplexkurven die Kurven y, z sind. Die Bedingung hat nach (25) folgende Form:

$$(39) \qquad (\alpha_{22} - \alpha_{11})\,\alpha'_{12} - \alpha_{12}(\alpha'_{22} - \alpha'_{11}) = 0\,,$$
$$(\alpha_{22} - \alpha_{11})\,\alpha'_{21} - \alpha_{21}(\alpha'_{22} - \alpha'_{11}) = 0\,.$$

Wenn (39) gilt, dann gilt gleichzeitig

$$\begin{vmatrix} \alpha_{12} & -\alpha_{21} \\ \alpha'_{12} & -\alpha'_{21} \end{vmatrix} \neq 0$$

für alle Werte des Parameters $u \in I$. Wir haben vorausgesetzt, daß die Komplexpunkte für alle Werte von $u \in I$ definiert sind. Aus den Gleichungen (39) folgt dann:

$$\alpha_{22} - \alpha_{11} = 0\,.$$

Wenn die Kurven y, z apolar zu den Kurven $\bar{y}$, $\bar{z}$ sind, dann gilt $\lambda = -\mu$. Wenn wir in die Gleichung (38) $\alpha_{22} - \alpha_{11} = 0$, $\lambda = -\mu$ einsetzen, dann ist diese Gleichung für alle Werte von λ erfüllt.

Wir werden im folgenden voraussetzen, daß die Komplexkurven im Intervall I imaginär sind. Unter der Voraussetzung, daß die Fläche Φ zum linearen Komplex gehört, kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, daß die Komplexkurven die Kurven $v^2 + 1 = 0$ sind.

Bei den angeführten Voraussetzungen gilt dann: $\alpha_{12} - \alpha_{21} = 0$. Wenn die Kurven $\bar{y}$, $\bar{z}$ zum Kurvenpaare $v^2 + 1 = 0$ apolar sind, dann gilt $\lambda\mu = -1$. Wenn wir $\alpha_{12} - \alpha_{21} = 0$, $\lambda\mu = -1$ in die Gleichung (38) einsetzen, dann ist diese Gleichung für alle Werte von λ erfüllt.

Setzen wir voraus, daß die Fläche Φ zum linearen Komplex gehört und ihre Komplexkurven zusammenfallend sind. Dann hat die Fläche Φ eine einzige asymptotische Komplexkurve. Das Paar der Kurven, die apolar zur zweimal gerechneten Komplexkurve sind, besteht aus dieser Komplexkurve und aus einer weiteren Kurve. Wir haben aber vorausgesetzt, daß die Kurven des erwähnten Paares die Asymptotenkurven der Fläche Φ nicht berühren.

Bemerkung. Den Fall, daß die Komplexpunkte der Fläche Φ nur für einige Werte von $u \in I$ zusammenfallen, müssen wir auch nach den Voraussetzungen des Satzes 10 ausschließen.

e) Die $T(y, z)$-Schar der Geraden q ist ein Komplexstück. Wir werden voraussetzen, daß die $T(y, z)$-Schar nicht zum linearen Komplex gehört. Wir betrachten die Inflexmittelpunkte der Erzeugenden der $T(y, z)$-Schar, die nicht auf den Flächen $F(y)$, $F(z)$ liegen.

Wir betrachten einen Punkt

$$M = A_1 + tA_2 \tag{40}$$

im Raume P_3 und setzen voraus, daß M nicht auf den Flächen $F(y)$, $F(z)$ liegt. Weiter betrachten wir alle durch M gehenden Geraden der $T(y, z)$-Schar. Diese Geraden gehören allgemein zu einem Kegel.

Aus den Gleichungen (14), (40) bekommt man die Bedingung, daß der Punkt M im Raume P_3 fest ist (KOVANCOV [2], S. 74):

$$\omega_1^3 + t\omega_2^3 = 0\,, \quad \omega_1^4 + t\omega_2^4 = 0\,, \quad \mathrm{d}t - t^2\omega_2^1 + t(\omega_2^2 - \omega_1^1) + \omega_1^2 = 0\,. \tag{41}$$

Nach (15) setzen wir für ω_i^k, $i, k = 1, 2, 3, 4$, in diese Gleichungen ein. Wir bekommen leicht:

$$\begin{aligned} 4t\,\mathrm{d}\beta &= \mathrm{d}u[-t^2\Omega_{21} - t(a_{23} + a_{14}) - \Omega_{12}]\,, \\ 2t\,\mathrm{d}\varrho &= \mathrm{d}u[t^2\Omega_{21} - t(a_{23} - a_{14}) - \Omega_{12}]\,, \\ \mathrm{d}t &= \mathrm{d}u[-\tfrac{1}{2}\beta_{21}t^2 + t(2\beta + \beta_{11} - \beta_{22}) + \tfrac{1}{2}\beta_{12}]\,. \end{aligned} \tag{42}$$

Die Berührebene Π des Komplexkegels im Punkte M (40) längs der gegebenen Erzeugenden q ($u = u_0$, $\beta = \beta_0$, $\varrho = \varrho_0$) ist durch die Punkte A_1, A_2, $\mathrm{d}A_1$ bestimmt. Die Differentialrichtung ist durch die Relationen (42) bestimmt. Daraus folgt nach (15), (16), (42):

$$\Pi = (A_1, A_2, A_3)\,\Omega_{12} - t(A_1, A_2, A_4)\,\Omega_{21}\,. \tag{43}$$

Wenn M der Inflexmittelpunkt der gegebenen Geraden q ist, dann gilt für die angeführte Berührebene (Kovancov [2], S. 75):

$$\mathrm{d}\Pi = \vartheta\Pi\,, \quad \vartheta = \vartheta(u, \beta, \varrho, \mathrm{d}u)\,. \tag{44}$$

Aus den Gleichungen (15), (16), (43) bekommen wir:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\Pi = {} & (A_1, A_2, A_3)\,\{\mathrm{d}\Omega_{12} + \Omega_{12}[\omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3] - t\omega_4^3\Omega_{21}\} + \\ & + (A_1, A_2, A_4)\,\{-\mathrm{d}t\,\Omega_{21} - t\,\mathrm{d}\Omega_{21} + \omega_3^4\Omega_{12} - \\ & - t\Omega_{21}[\omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_4^4]\} + (A_1, A_3, A_4)\,\{-\omega_2^4\Omega_{12} - t\omega_2^3\Omega_{21}\} + \\ & + (A_2, A_3, A_4)\,\{\omega_1^4\Omega_{12} + t\omega_1^3\Omega_{21}\}\,. \end{aligned} \tag{45}$$

Die Koeffizienten der Glieder (A_1, A_3, A_4), (A_2, A_3, A_4) in der Gleichung (45) sind bei der Gültigkeit von (15), (42) gleich Null, es genügt nur eine Bedingung zur

Gültigkeit der Relation (44):

$$(46) \qquad t^2[\Omega_{21}(\beta_{21}\Omega_{12} - \beta_{12}\Omega_{21})] +$$
$$+ t[\Omega_{12}\Omega_{21}(\beta_{22} - \beta_{11}) + \tfrac{1}{2}\beta_{21}\Omega_{12}(a_{23} + a_{14}) - \tfrac{1}{2}\beta_{12}\Omega_{21}(a_{23} + a_{14}) -$$
$$- \Omega_{12}(2\beta\beta'_{21} - \beta'_{22}\beta_{21} - \beta_{22}\beta'_{21} - 2\alpha'_{21} + \beta''_{21}) +$$
$$+ \Omega_{21}(2\beta\beta'_{12} + \beta'_{11}\beta_{12} + \beta_{11}\beta'_{12} + 2\alpha'_{12} - \beta''_{12})] +$$
$$+ \Omega_{12}(\beta_{21}\Omega_{12} - \beta_{12}\Omega_{21}) = 0\,.$$

Aus dieser Gleichung folgt, daß auf jeder Erzeugenden der $T(y, z)$-Schar allgemein zwei nicht auf den Flächen $F(y)$, $F(z)$ liegenden Inflexmittelpunkte liegen.

Satz 11. *Wenn die Kurven y, z Asymptotenkurven der Fläche Φ sind und die $T(y, z)$-Schar nicht zum linearen Komplex gehört, dann ist die $T(y, z)$-Schar ein Komplexstück mit den Inflexmittelpunkten nur auf den Flächen $F(y)$, $F(z)$. Die Flächen $F(y)$, $F(z)$ sind die Torsen.*

Beweis. Die Behauptung des Satzes 11 folgt aus der Gleichung (46) für $\beta_{12} = \beta_{21} = 0$. Die Koeffizienten bei dem quadratischen und auch bei dem absoluten Gliede in der Gleichung (46) sind gleich Null. Nach (13) ist $F(y)$ die Tangentenfläche der Kurve y, ähnlich ist $F(z)$ die Tangentenfläche der Kurve z.

Satz 12. *Wenn die Kurven y, z im Intervall I im Sinne von Terracini konjugiert sind und wenn die $T(y, z)$-Schar nicht dem linearen Komplex gehört, dann gehört die $T(y, z)$-Schar zum Komplex der projektiven Bewegung.*

Beweis. Der Komplex der projektiven Bewegung kann man auf zwei Arten in eine zweiparametrische Menge von Geradenbüscheln zerlegen. Die Scheitel dieser Büschel sind immer auf einer Fokalfläche der Kongruenz W von C. Segre und die Ebenen dieser Büschel hüllen immer die zweite Fokalfläche dieser Kongruenz (Kovancov [2]). Der Komplex der projektiven Bewegung hat zwei zweifache Inflexmittelpunkte auf jeder Erzeugenden.

Wir betrachten den Fall, daß die Gerade (A_1, A_2) die Tangente der Fläche $F(y)$ ist. Nach (14) gilt dann $\omega_1^3 = 0$. Bei Ausschließen des Falles $du = 0$ bekommen wir $\Omega_{12} = 0$. Wenn ähnlich $\Omega_{21} = 0$ gilt, dann ist die Gerade (A_1, A_2) die Tangente der Fläche $F(z)$. Wenn die Gerade (A_1, A_2) die Flächen $F(y)$, $F(z)$ gleichzeitig berührt, dann gilt $\Omega_{12} = \Omega_{21} = 0$. Wir setzen voraus, daß im Intervall I $\beta_{12} \neq 0$, $\beta_{21} \neq 0$ gilt. Aus den Gleichungen $\Omega_{12} = 0$, $\Omega_{21} = 0$ bekommen wir durch Ausschließen der Größe β folgende Relation: $\beta_{21}\tau_{12} - \beta_{12}\tau_{21} = 0$. Die notwendige und hinreichende Bedingung zur Existenz der zur $T(y, z)$-Schar gehörigen Geradenschar, deren Erzeugenden die Flächen $F(y)$, $F(z)$ gleichzeitig berühren, ist die Konjugiertheit der Kurven y, z im Intervall I im Sinne von Terracini.

Wir berechnen die Größe β aus den Gleichungen $\Omega_{12} = 0$, $\Omega_{21} = 0$. Aus den Gleichungen (7) folgt, daß diese Erzeugenden die Erzeugenden der Γ_2-Schar der

Flächen Ψ sind. Diese Flächen gehören allgemein zur schichtbildenden Schar $R(y, z)$. Wenn die Kurven y, z Fleknodalkurven der Fläche Φ sind, dann (Vala [5]) sind diese Geraden die Erzeugenden der Γ_2-Schar, die zu der asymptotischen Schar der Fläche Φ gehören.

Setzen wir voraus, daß die Kurven y, z im Sinne von Terracini konjugiert sind. Es genügt zu beweisen, daß die Erzeugenden der $T(y, z)$-Schar, die die Flächen $F(y)$, $F(z)$ berühren, zur Kongruenz W von C. Segre gehören.

Für die asymptotischen Kurven der Fläche $F(y)$ gilt:

$$(A_1, \mathrm{d}A_1, \mathrm{d}^2A_1, A_4) = 0 .$$

Aus dieser Relation bekommen wir durch Einsetzen nach (14), wo $\omega_1^3 = 0$, $(A_1, A_2, A_3, A_4) \neq 0$:

$$\omega_1^2\omega_2^3 + \omega_1^4\omega_4^3 = 0 . \tag{47}$$

Die Bedingung für die Asymptotenkurven der Fläche $F(z)$ lautet:

$$(A_2, \mathrm{d}A_2, \mathrm{d}^2A_2, A_3) = 0 .$$

Aus dieser Relation bekommen wir bei $\omega_2^4 = 0$, $(A_1, A_2, A_3, A_4) \neq 0$:

$$\omega_2^1\omega_1^4 + \omega_2^3\omega_3^4 = 0 . \tag{48}$$

Wenn wir endlich in die Gleichungen (47), (48) nach (15) einsetzen, bekommen wir in den beiden Fällen:

$$\mathrm{d}u = 0 , \quad \mathrm{d}\varrho = \tfrac{1}{2}(a_{14} + a_{23})\, \mathrm{d}u .$$

Die Asymptotenkurven der Flächen $F(y)$, $F(z)$ entsprechen einander, die angeführte Schar gehört zur Kongruenz W von C. Segre.

Satz 13. *Die $T(y, z)$-Schar ist nie das Komplexstück, welches auf jeder Erzeugenden zweifache Inflexmittelpunkte hat, die von den Punkten der Flächen $F(y)$, $F(z)$ verschieden sind.*

Beweis. Wenn alle durch die Gleichung (46) gegebenen Inflexmittelpunkte der $T(y, z)$-Schar zweifach sind, dann ist die Diskriminante der quadratischen Gleichung (46) für alle Werte der Parameter u, β, ϱ in dem gegebenen Bereich (d. h. für alle reelle Werte von β, ϱ und für alle Werte von u aus dem Intervall I) gleich Null. In der Gleichung (46) hängt aber nur ein Teil des Koeffizienten bei dem linearen Gliede

$$\tfrac{1}{2}(-\beta_{12}\Omega_{21} + \beta_{21}\Omega_{12})(a_{23} + a_{14})$$

von dem Parameter ϱ ab. Dieser Ausdruck ist im Falle $-\beta_{12}\Omega_{21} + \beta_{21}\Omega_{12} = 0$ gleich Null, dann aber liegen die zweifachen Inflexmittelpunkte auf den Flächen $F(y)$, $F(z)$. Es genügt nur eine Möglichkeit und zwar $a_{23} + a_{14} = 0$. Dieser Ausdruck ist aber gleichzeitig für alle reelle Werte des Parameters β und für alle Werte des Parameters u aus dem Intervall I nie gleich Null; das folgt aus den Gleichungen (16).

Satz 14. *Setzen wir voraus, daß die Kurven y, z im Intervall I nicht durch die Fleknodalpunkte der Fläche Φ gehen und daß sie im Intervall I die Asymptotenlinien der Fläche Φ nicht berühren. Weiter werden wir vourassetzen, daß sie nicht im I im Sinne von Terracini konjugiert sind. Dann hat jede Erzeugende der Γ_2-Schar, der zu den quadratischen Scharen $R(y, z)$ gehörigen Flächen Ψ, in der $T(y, z)$-Schar höchstens einen Inflexmittelpunkt, der nicht auf den Flächen $F(y)$, $F(z)$ liegt.*

Beweis. Nach (7a) gilt $\Omega_{12} = 0$ für eine quadratische Schar. Die Gleichung (46) hat dann für t allgemein nur eine Wurzel, die nicht gleich Null ist. Die Erzeugenden der Γ_2-Schar der Flächen Ψ, die zu dieser quadratischen Schar gehören, berühren die Fläche $F(y)$. Ähnlich kann man die quadratische Schar (7b) betrachten.

Literaturverzeichnis

[1] *M. Barner:* Doppelverhältnisscharen auf Regelflächen, Math. Zeitschr., Bd. *62*, 1955, S. 50—93.

[2] *П. И. Кованцов:* Теория комплексов, Киев 1963.

[3] *O. Mayer:* Études sur les surfaces réglées, Bull. faç. de ştiinţe din Cernăuti, vol II, 1926, p. 1—33.

[4] *A. Terracini:* Direttrici congiunte di una rigata, Rend. del Sem. Mat, Univ. è Polytecnico di Torino, vol 9°, 1949—50, pp. 325—342.

[5] *J. Vala:* Spezielle Doppelverhältnisscharen auf Regelflächen, Mat.-fyz. časopis Bratislava, *15*, 1965, str. 126—142.

Anschrift des Verfassers: Barvičova 85, Brno (Vysoké učení technické).