Časopis pro pěstování matematiky, roč. 90 (1965), Praha

# МОДЕЛИ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ ОБРАЗОВАННЫЕ СОВЕРШЕННЫМ ОТНОШЕНИЕМ

БОГУСЛАВ БАЛЦАР (Bohuslav Balcar), ТОМАШ ЕХ (Tomáš Jech), Прага

(Поступило в редакцию 14/III 1964 г.)

## ВВЕДЕНИЕ

Теорией множеств разумеется в дальнейшем аксиоматическая теория множеств Бернайса-Геделя. Первоначальные понятия $\mathfrak{Cls}$, $\mathfrak{M}$, $\in$, аксиомы групп $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ такие же, как в известной работе [3]. Если для теоремы или определения нужна аксиома выбора, то номер этой теоремы или этого определения обозначается звездочкой.

В этой работе изучаются специальные модели теории множеств, $\in$ — отношение которых определено между всеми классами модели некоторым отношением. В работе показано следующее:

1. из предположения существования таких моделей вытекает существование счетных моделей,

2. если существование эксорбитантного числа не противоречит аксиомам теории множеств, то не противоречит также существование модели теории множеств в теории конечных множеств,

3. при предположению существования двух эксорбитантных чисел можно построить стандартную нерегулярную модель.

## 1. МНОЖЕСТВА $p_\alpha$, ТИП МНОЖЕСТВА, ЭКСОРБИТАНТНЫЕ ЧИСЛА

**1.1.** Ординальные числа, обладающие предшественником, называют ординальными числами *первого рода*. Остальные числа называют числами *второго рода* или *предельными* числами.

**Определение.** $x \in K_1 \equiv x \in On \,\&\, (\exists y)\, [y \in On \,\&\, x = y + 1]$, $K_2 = On - K_1$. Нуль — это предельное число.

**1.2.** Определим множества $p_\alpha$ для всякого ординального числа методом трансфинитной индукции.

**Определение.** $\mathfrak{D}(x) \in K_2 \to G`x = \mathfrak{S}(\mathfrak{W}(x))$, $\mathfrak{D}(x) \in V - K_2 \to G`x = \mathfrak{P}(\mathfrak{S}(\mathfrak{W}(x)))$; $G\mathfrak{Fn}\,V$. Существование функции $G$ гарантировано метаопределением 6 [3]. Тогда существует однозначно определенная функция $F$ над $On$ так, что $F`\alpha = G`(F \upharpoonright \alpha)$; $F\mathfrak{Fn}On$. Обозначим $p_\alpha = F`\alpha$; тогда, очевидно, имеют место равенства

(и) $\quad p_0 = 0\,,$

(ии) $\quad p_{\alpha+1} = \mathfrak{P}(p_\alpha)\,,$

(иии) $\quad p_\alpha = \bigcup_{\beta\in\alpha} p_\beta$ для $\alpha \in K_2\,.$

**1.3. Лемма.** $\alpha \neq 0 \to p_\alpha \neq 0$, $\beta < \alpha \to p_\alpha \subset p_\beta$, $p_\alpha \in p_{\alpha+1}$ *для всякого* $\alpha$.

**1.4. Лемма.** *Для всякого* $\alpha$ $\mathfrak{Comp}(p_\alpha)$.

Доказательство. Пусть $\alpha \in K_1$; тогда $p_\alpha = \mathfrak{P}(p_{\alpha-1})$. Пусть $x \in p_\alpha$. Потому что $p_{\alpha-1} \subseteq p_\alpha$ и $x \subseteq p_{\alpha-1}$, то $x \subseteq p_\alpha$. Пусть $\alpha \in K_2$. Утверждение очевидно, когда $\alpha = 0$. Пусть $\alpha \neq 0$ и $x \in p_\alpha$. Так как $p_\alpha = \bigcup_{\beta\in\alpha} p_\beta$, то существует $\gamma < \alpha$ такое, что $x \in p_\gamma$. Можно предполагать, что $\gamma$ первого рода. Следовательно, $x \subseteq p_\gamma \subseteq p_\alpha$.

В качестве следствия предшествующей леммы получаем утверждение $\mathfrak{S}(p_\alpha) \subseteq p_\alpha$.

**1.5. Лемма.** $\mathfrak{S}(p_\alpha) = p_\alpha$ *тогда и только тогда, когда* $\alpha$ *является предельным числом. Если* $\alpha$ *первого рода, то* $\mathfrak{S}(p_\alpha) = p_{\alpha-1}$.

Доказательство. Пусть $\alpha \in K_1$. Тогда $p_\alpha = \mathfrak{P}(p_{\alpha-1})$. Так как $p_{\alpha-1} \in p_\alpha$, следовательно, $p_{\alpha-1} \subseteq \mathfrak{S}(p_\alpha)$. Пусть теперь $x \in \mathfrak{S}(p_\alpha)$. Это значит, что существует $z \in p_\alpha$ такое, что $x \in z$. Но $z \subseteq p_{\alpha-1}$ и тогда $x \in p_{\alpha-1}$. Пусть $\alpha \in K_2$. Для $\alpha = 0$ утверждение тривиально. Пусть $\alpha > 0$. Тогда $p_\alpha = \bigcup_{\beta\in\alpha} p_\beta$ и $\mathfrak{S}(p_\alpha) \supseteq \bigcup_{\beta\in\alpha} p_\beta$.

**1.6. Лемма.** *Длх всех* $\alpha$ *имеет место* $\alpha \in p_{\alpha+1}$.

Доказательство. Утверждение очевидно для $\alpha = 0$. Пусть $\beta$ – первое число, для которого утверждение не имеет места. Пусть $\beta \in K_1$. По предположению $\beta - 1 \in p_\beta$. Следовательно, $\beta = \beta - 1 \cup \{\beta - 1\} \subseteq p_\beta$. Из этого вытекает $\beta \in p_{\beta+1}$, но это противоречие. Пусть $\beta \in K_2$. Тогда $\beta \neq 0$ и для всякого $\gamma < \beta$ по предположению $\gamma \in p_{\gamma+1}$. Следовательно, $\beta = \bigcup_{\gamma\in\beta} \gamma \subseteq \bigcup_{\gamma\in\beta} p_\gamma = p_\beta$. Это влечет за собой $\beta \in p_{\beta+1}$, но это тоже противоречие.

**1.8. Лемма.** $V = \bigcup_{\alpha\in On} p_\alpha$.

Доказательство. См. [1].

Определим тип множества. *Типом* множества $x$ называется первое ординальное число $\alpha$ такое, что $x \in p_\alpha$, и обозначается $\tau(x)$. По лемме 1.8. $\tau(x)$ определено для всякого $x$.

**1.9. Определение.** $\tau(x) = \alpha \equiv x \in p_\alpha \,\&\, (\beta)\,[x \in p_\beta \to \beta \geqq \alpha]$, $\bar{\tau}(X) = \bigcup_{y \in X} \tau(y)$.

**1.10. Лемма.** $\tau(x) = \bar{\tau}(x) + 1$ *для всякого множества* $x$, $\mathfrak{Pr}(X) \equiv \bar{\tau}(X) = On$.

Доказательство. Пусть $\tau(x) = \alpha$. Так как $\alpha \in K_1$ для всякого множества $x$, то $x \subseteq p_{\alpha-1}$ и $\bar{\tau}(x) \leqq \alpha - 1$. Пусть теперь существует $x$ такое, что $\bar{\tau}(x) < \alpha - 1$. Если $\alpha - 1 \in K_1$, то $x \subseteq p_{\alpha-2}$ и $x \in p_{\alpha-1}$. Но это противоречит предположению $\tau(x) = \alpha$. Если $0 \neq \alpha - 1 \in K_2$, то существует $\beta < \alpha - 1$ такое, что $\bar{\tau}(x) = \beta$. Из этого следует $x \subseteq p_\beta$, $x \in p_{\beta+1}$. Это противоречие, потому что $\beta + 1 < \alpha - 1$. Второе утверждение очевидно.

**Следствие.** $x \in p_\alpha \equiv x \subseteq p_\alpha \,\&\, \bar{\tau}(x) < \alpha$, $\bar{\tau}(\alpha) = \bar{\tau}(p_\alpha) = \alpha$.

**1.11. Определение.** Через $\mathfrak{Reg}(x)$ обозначим *регулярное число.*

$$\mathfrak{Reg}(x) \equiv x \in On \,\&\, (y)\,[(y \subseteq x \,\&\, \mathrm{card}\, y < x) \to \mathfrak{S}(y) + 1 < x]\,.$$

Очевидно, всякое регулярное число является бесконечным кардинальным числом.

**1.12. Определение.** Кардинальное число $\omega_\alpha$ называют *эксорбитантным*, если оно регулярно, предельно и если $\alpha \neq 0$. Класс всех эксорбитантных чисел обозначим через $In_1$.

$$x \in In_1 \equiv \mathfrak{Reg}(x) \,\&\, (\exists \alpha)\,[\alpha \in K_2 \,\&\, x = \omega_\alpha] \,\&\, x > \omega_0\,.$$

***1.13. Определение.** Кардинальное число $\alpha$ называют *сильно эксорбитантным*, если оно регулярно и если имеет место

$$(\beta)\,[\beta \in \alpha \to \mathrm{card}\, \mathfrak{P}(\beta) \in \alpha] \,\&\, \alpha > \omega_0\,.$$

Класс сильно эксорбитантных чисел обозначим через $In_2$.

***1.14. Лемма.** $In_2 \subseteq In_1$.

Доказательство. Пусть $x \in In_2$ и $x = \omega_{\alpha+1}$. Тогда $\omega_\alpha \in x$ и $\mathrm{card}\, \mathfrak{P}(\omega_\alpha) \geqq \geqq \omega_{\alpha+1} = x$, но это противоречие.

***1.15. Лемма.** *Из континуум-гипотезы вытекает, что* $In_1 = In_2$.

Доказательство. Пусть $x \in In_1$, $x = \omega_\alpha$, $\alpha \neq 0$. Пусть $y \in x$. Очевидно, существует $\beta \in \alpha$ такое, что $\mathrm{card}\, y \leqq \omega_\beta$. Следовательно, $\mathrm{card}\, \mathfrak{P}(y) \leqq \mathrm{card}\, \mathfrak{P}(\omega_\beta) = = \omega_{\beta+1} < \omega_\alpha$, потому что $\alpha \in K_2$.

***1.16. Лемма** $\alpha \in In_2 \equiv \mathfrak{Reg}(\alpha) \,\&\, (\beta)\,[\beta < \alpha \to \mathrm{card}\, p_\beta < \alpha] \,\&\, \alpha > \omega_0$.

Доказательство. Пусть $\alpha \in In_2$ и $\beta$ – первое ординальное число, для которого $\beta < \alpha$ и $\mathrm{card}\, p_\beta \geqq \alpha$. Пусть $\beta \in K_1$. Это значит, что существует $\delta \in On$ такое, что $\beta = \delta + 1$ и $p_\beta = \mathfrak{P}(p_\delta)$. Положим $\mathrm{card}\, p_\delta = \gamma$. Из предположения следует $\gamma \in \alpha$ и $\operatorname{card} p_\beta = \operatorname{card} \mathfrak{P}(\gamma) \in \alpha$, но это противоречие. Пусть $\beta \in K_2$; очевидно, $\beta \neq 0$. Так как $p_\beta = \bigcup_{\gamma\in\beta} p_\gamma$ и для всякого $\gamma \in \beta$ имеет место $\operatorname{card} p_\gamma \in \alpha$, то вследствие регулярности $\alpha$ $\operatorname{card} p_\beta = \bigcup_{\gamma\in\beta} \operatorname{card} p_\gamma \in \alpha$. Но это тоже противоречие.

Пусть верна правая часть рассматриваемой эквивалентности. Очевидно, что $\alpha$ предельно и несчетно. Пусть $\beta \in \alpha$. Так как $\beta \subseteq p_\beta$, то $\mathfrak{P}(\beta) \subseteq \mathfrak{P}(p_\beta) = p_{\beta+1}$. В качестве следствия получим $\operatorname{card} \mathfrak{P}(\beta) \leqq \operatorname{card} p_{\beta+1} < \alpha$. Это значит, что $\alpha$ — сильно эксорбитантное число.

## 2. МОДЕЛИ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ, СПЕЦИАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ $\mathscr{E}_S(XУ)$, НОРМАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ

Для определения модели теории множеств нужно определить множества ($\mathfrak{M}^*$), классы ($\mathfrak{Cls}^*$) и отношение $\in^*$ модели.

**2.1. Определение.** Пусть $\mathscr{E}(XY)$ — пропозициональная функция двух переменных. Определим

$$\mathfrak{Cls}^*(X) \equiv (\exists Y)\,[\mathscr{E}(XY) \vee \mathscr{E}(YX)]\,, \quad \mathfrak{M}^*(X) \equiv (\exists Y)\,[\mathscr{E}(XY)]\,, \quad X \in^* Y \equiv \mathscr{E}(XY)\,.$$

Пусть для первоначальных понятий $\mathfrak{Cls}^*$, $\mathfrak{M}^*$, $\in^*$ можно доказать все аксиомы теории множеств групп $A$, $B$, $C$, $D$. Тогда пропозициональную функцию $\mathscr{E}(XY)$ называют *моделей теории множеств.*

**2.2. Изоморфизм пропозициональных функций.** Пусть $\varphi(XY)$ — некоторая пропозициональная функция двух переменных. Обозначим

$$\varphi_{(1)}(X) \equiv (\exists Y)\,[\varphi(XY)]\,, \quad \varphi_{(2)}(Y) \equiv (\exists X)\,[\varphi(XY)]\,.$$

**Определение.** Пропозициональную функцию $J(RS)$ называют изоморфизмом функций $\varphi(XY)$, $\psi(UW)$, когда имеют место соотношения

$$(R)\,[J_{(1)}(R) \equiv \varphi_{(1)}(R) \vee \varphi_{(2)}(R)]\,, \quad (S)\,[J_{(2)}(S) \equiv \psi_{(1)}(S) \vee \psi_{(2)}(S)]\,,$$

$$(X, Y, U, W)\,[(J(XU)\,\&\,J(YW)) \rightarrow (\varphi(XY) \equiv \psi(UW)]\,,$$

$$(X, Y, U, W)\,[(J(XU)\,\&\,J(YW)) \rightarrow (X = Y \equiv U = W)]\,.$$

**2.3. Определение.** Модели $\mathscr{E}^1(XY)$, $\mathscr{E}^2(XY)$ называются изоморфными, если существует изоморфизм пропозициональных функций $\mathscr{E}^1(XY)$ и $\mathscr{E}^2(XY)$.

**2.4. Лемма.** *Пусть пропозициональные функции $\mathscr{E}^1(XУ)$ и $\mathscr{E}^2(XУ)$ изоморфны. Пусть функция $\mathscr{E}^1(XУ)$ — модель теории множеств. Тогда тоже функция $\mathscr{E}^2(XУ)$ есть модель теории множеств.*

**2.5. Определение.** Модели теории множеств называются идентичными, когда пропозициональные функции эквивалентны.

**2.6. Лемма.** *Пусть* $\mathscr{E}^1(XY)$ *– модель,* $\varphi(X)$ *– пропозициональная функция, для которой* $(U, X)\,[(\varphi(X)\ \&\ \mathscr{E}^1(UX)) \to \varphi(U)]$. *Пусть* $\mathfrak{Cls}^1(S)$ *и* $\varphi(S)$. *Если* $\mathscr{E}^2(XY) \equiv$ $\equiv \mathscr{E}^1(XS)\ \&\ \varphi(Y)\ \&\ \mathscr{E}^1(XY)$ *– модель, то*

1. *следующие операции, понятия и специальные классы абсолютны в отношении* $\mathscr{E}^1 \to \mathscr{E}^2$ *(это значит, если* $\mathfrak{A}^1(XY)$, $\mathfrak{A}^2(XY)$, $\mathfrak{B}^1(XY)$, $\mathfrak{B}^2(XY)$, $A^1$, $A^2$ *относительны к операции* $\mathfrak{A}$, *понятию* $\mathfrak{B}$ *и специальному классу* $A$ *в моделях* $\mathscr{E}^1$, $\mathscr{E}^2$, *то имеет место* $\mathfrak{A}^1(X^2Y^2) = \mathfrak{A}^2(X^2Y^2)$, $\mathfrak{B}^1(X^2Y^2) \equiv \mathfrak{B}^2(X^2Y^2)$, $A^1 = A^2$):

$$\{xy\}, \langle xy\rangle, \mathfrak{F}_2(XY), \ldots, \mathfrak{F}_9(XY), X \cap Y, X \cup Y, \mathfrak{W}(X), X \bigwedge Y, X``Y, X`Y, \alpha + 1\ ;$$

$$X \in Y,\ X \subseteq Y,\ X \subset Y,\ \mathfrak{Un}(X),\ \mathfrak{Un}_2(X),\ \mathfrak{Rel}(X),\ \mathfrak{Fnc}(X),\ X\mathfrak{Fn}Y,$$

$$\mathfrak{Comp}(X),\ E\mathfrak{Con}X,\ \mathfrak{Ord}(X),\ \mathfrak{D}(X),\ \alpha < \beta,\ \alpha \leqq \beta\ ;\quad 0, 1, 2, \ldots, \omega\,,$$

2. *имеют место соотношения*:

$$-^2X^2 = S - {}^1X^2,\ \mathfrak{P}^2(X^2) = \mathfrak{P}^1(X^2) \cap {}^1S,\ E^2 = E^1 \cap {}^1S,\ On^2 = On^1 \cap {}^1S\,,$$
$$K_1^2 = K_1^1 \cap {}^1S,\ K_2^2 = K_2^1 \cap {}^1S\,.$$

Доказательство можно произвести аналогично, как доказательство абсолютности в полных моделях (см. [4]).

***2.7. Теорема.** *Пропозициональная функция* $\mathscr{E}_S(XY) \equiv X \in S\ \&\ Y \subseteq S\ \&\ X \in Y$ *является моделью теории множеств тогда и только тогда, когда или* $S = V$ *или существует* $\vartheta \in In_2$ *такое, что* $S = p_\vartheta$.

Доказательство. 1. Условие достаточно.

а) Если $S = V$, то модель $\mathscr{E}_V(XY)$ является всей теорией множеств.

б) Пусть $S = p_\vartheta$, $\vartheta \in In_2$. Тогда, очевидно,

$$\mathfrak{Cls}^*(x) \equiv \bar{\tau}(x) \leqq \vartheta\,,\quad \mathfrak{M}^*(x) \equiv \bar{\tau}(x) < \vartheta \equiv \tau(x) < \vartheta\,.$$

Проверим аксиомы:

$A1$: следует из $\mathfrak{Comp}(p_\vartheta)$,

$A2$, $A3$: очевидны,

$A4$: $\{x^*y^*\}^* = \{x^*y^*\}$ и $\bar{\tau}(\{x^*y^*\}) = \mathfrak{Max}(\tau(x), \tau(y)) < \vartheta$,

$B1$: $E^* = E \cap p_\vartheta$,

$B2$: $X^* \cap {}^*Y^* = X^* \cap Y^*$ и $\bar{\tau}(X^* \cap Y^*) \leqq \bar{\tau}(X^*)$,

$B3$: $-^*X^* = p_\vartheta - X^*$,

$B4$: $\mathfrak{D}^*(X^*) = \mathfrak{D}(X^*)$,

$B5$: $V^* \times^* X^* = p_\vartheta \times X^*$,

$B6$: $\mathfrak{Cnv}^*(X^*) = \mathfrak{Cnv}(X^*)$,

$B7$, $B8$: аналогично,

$C1$: $\omega_0 \in p_\vartheta$,

$C2$: $\tau(\mathfrak{S}(x)) \leqq \tau(x)$,

$C3$: $\tau(\mathfrak{P}(x)) \leqq \tau(x) + 1$,

$C4$: Пусть $f$ — множество, для которого имеет место $f \subseteq p_\vartheta$, $\mathfrak{Un}(f)$, $\mathfrak{D}(f) = x \in p_\vartheta$. Пусть $\mathfrak{W}(f) = y$. Очевидно, $y \subseteq p_\vartheta$ и из леммы 1.16 следует card $y < \vartheta$. Покажем, что $y \in p_\vartheta$. Определим $\beta \in a \equiv (\exists z)\,[z \in y\,\&\,\tau(z) = \beta]$. Пусть $y \notin p_\vartheta$. Тогда $\bar{\tau}(y) = \vartheta$ и вследствие соотношений card $a \leqq$ card $y < \vartheta$ и $\mathfrak{S}(a) = \vartheta$ получим противоречие с условием регулярности числа $\vartheta$.

$D$: очевидно.

2. Условие необходимо. Пусть $\mathscr{E}_S(XY)$ — модель теории множеств. Тогда из аксиомы $A1$ необходимо следует $\mathfrak{Comp}(S)$. Определим $\varphi(X) \equiv X \subseteq S$. Пропозициональная функция $\varphi(X)$ удовлетворяет условию леммы 2.6. По этому предложению имеет место или $On^* = On$ или $On^* \in On$.

Пусть $\alpha \in On^*$; тогда множества $p_\alpha$ абсолютны, что значит $p_\alpha^* = p_\alpha$. Пустое множество $O$ и операция $\mathfrak{S}$ являются абсолютными. Надо показать, что и операция $\mathfrak{P}$ абсолютна. Но это очевидно вследствие $y^* \subseteq^* x^* \equiv y \subseteq x \subseteq S$, $y \in S$.

а) Пусть $On^* = On$. Так как $S$ — универсальный класс модели $\mathscr{E}_S(XY)$ и так как в этой модели имеет место аксиома $D$, то $S = \bigcup\limits_{\alpha \in^* On}^* p_\alpha^*$. Вследствие абсолютности $p_\alpha$ получаем $S = \bigcup\limits_{\alpha \in On} p_\alpha = V$.

б) Пусть $On^* = \vartheta \in On$. Мы покажем, что $S = p_\vartheta$ и $\vartheta \in In_2$. Очевидно, $S = \bigcup\limits_{\alpha \in \vartheta} p_\alpha$. Ординальное число $\vartheta$ предельно, потому что в противном случае $\vartheta = \beta + 1$ и $S = p_\beta$. Это значит, что $\beta \in S$ и $\vartheta \in S$, но это противоречие, потому что $\vartheta$ — собственный класс модели $\mathscr{E}_S(XY)$. Поэтому $S = p_\vartheta$ и $\vartheta$ — кардинальное число. В модели имеет место аксиома $C1$, и это значит, что $\omega_0 \in \vartheta$. В дальнейшем покажем, что из действительности аксиомы $C4$ в модели следует $\vartheta \in In_2$.

Пусть $\vartheta \notin In_2$.

б1) Пусть $\vartheta$ — нерегулярное число. Тогда существует множество $a \subseteq \vartheta$ такое, что card $a = \beta < \vartheta$ и $\mathfrak{S}(a) = \vartheta$. Обозначим через $f$ взаимно однозначное отображение множества $a$ на кардинальное число $\beta$. Очевидно, $f \subseteq a \times \beta \subseteq p_\vartheta$, $\mathfrak{M}^*(\beta)$ и $\mathfrak{Pr}^*(a)$, но это противоречит аксиоме $C4$.

б2) Пусть существует $\beta < \vartheta$ и card $p_\beta \geqq \vartheta$. Так как $p_\beta \in p_\vartheta$, то $\mathfrak{M}^*(p_\beta)$. Пусть card $p_\beta = \delta \geqq \vartheta$. Существует функция $f$ такая, что $f\mathfrak{Fn}\delta$ и $\mathfrak{W}(f) = p_\beta$ и $\mathfrak{Un}_2(f)$.

Пусть $g = \mathfrak{Cnv}(f \bigwedge \vartheta)$. Очевидно, $\mathfrak{D}(g) \subseteq p_\beta$ и $\mathfrak{W}(g) = \vartheta$. Из этого следует, что $\mathfrak{M}^*(\mathfrak{D}(g))$ и $\mathfrak{Pr}^*(\mathfrak{W}(g))$. Так как $g \subseteq p_\vartheta$, то получаем противоречие аксиоме $C4$.

**Следствие.** Для существования класса $S \neq V$ такого, что $\mathscr{E}_S(XY)$ – модель теории множеств, необходимо и достаточно, чтобы $In_2 \neq 0$.

**Замечание.** $\mathscr{E}_S(XY)$ является моделью теории конечных множеств тогда и только тогда, когда $S = p_{\omega_0}$.

**2.8. Нормальные модели.** Пусть $\mathscr{E}(XY)$ – модель. Определим $\mathscr{E}_m(XY) \equiv \equiv \mathscr{E}_{(1)}(X) \,\&\, \mathscr{E}_{(1)}(Y) \,\&\, \mathscr{E}(XY)$.

**Определение.** Модель $\mathscr{E}(XY)$ называют нормальной, если существует отношение $\tilde{E}_m$ так, что можно доказать, что пропозициональные функции

$$(1) \quad \mathscr{E}_m(XY) \qquad (2) \quad \langle XY \rangle \in \tilde{E}_m$$

изоморфны.

Пусть $\mathscr{E}(XY)$ – нормальная модель. Пусть $J_m(XY)$ – изомофизм функций (1), (2).

Определим

$$\varphi(X) \equiv \mathfrak{Cls}^*(X) \,\&\, (\exists \bar{X})\,(U, u)\,[(\bar{X} \subseteq \mathfrak{W}(\tilde{E}_m) \,\&\, J_m(U, u)) \to (\mathscr{E}(UX) \equiv u \in \bar{X})]\,.$$

(Если имеет место $\varphi(X)$, то существует только один класс $\bar{X}$, удовлетворяющий требованию функции; обозначим его через $X^0$.)

$$\tilde{\varphi}(X) \equiv X \subseteq \mathfrak{W}(\tilde{E}_m) \,\&\, (\exists \bar{X})\,(U, u)\,[(\mathfrak{Cls}^*(\bar{X}) \,\&\, J_m(Uu)) \to (\mathscr{E}(U\bar{X}) \equiv u \in X)]\,.$$

Далее определим

$$\mathscr{E}^1(XY) \equiv \mathscr{E}(XY) \,\&\, \varphi(Y)$$

$$\mathscr{E}^2(XY) \equiv (\exists y)\,[y \in \mathfrak{W}(\tilde{E}_m) \,\&\, X = \tilde{E}_m''\{y\} \,\&\, y \in Y] \,\&\, Y \subseteq \mathfrak{W}(\tilde{E}_m) \,\&\, \tilde{\varphi}(Y)\,.$$

**2.9. Теорема.** *Пропозициональные функции $\mathscr{E}^1(XY)$, $\mathscr{E}^2(XY)$ суть изоморфные модели, для которых изоморфизм можно определить следующим образом:*

$$J(XY) \equiv \mathfrak{Cls}^*(X) \,\&\, \varphi(X) \,\&\, Y = X^0\,.$$

Доказательство. Пропозициональная функция $\varphi(X)$ в модели $\mathscr{E}(XY)$ удовлетворяет условиям:

(1) $\varphi(V^*)$, где $V^*$ – универсальный класс модели $\mathscr{E}(XY)$,
(2) $\mathfrak{M}^*(X) \to \varphi(X)$,
(3) $(\varphi(X) \,\&\, \varphi(Y)) \to \varphi(\mathfrak{F}_i^*(XY))$ для $i = 1, \ldots, 8$.

Так как из (2) следует

$$(X)\,[(\mathfrak{Cls}^*(X) \,\&\, X \neq 0^* \,\&\, \varphi(X)) \to (\exists Y)\,[\mathscr{E}(YX) \,\&\, \varphi(Y)]]\,,$$

то $\mathscr{E}^1(XY)$ – модель (см. [2]). Очевидно, что $J(XY)$ наверно является изоморфизмом функций $\mathscr{E}^1(XY)$ и $\mathscr{E}^2(XY)$. Вследствие леммы 2.4. $\mathscr{E}^2(XY)$ – модель теории множеств.

**2.10. Определение.** Если модель $\mathscr{E}^2(XY)$ стандартна, слабо или сильно регулярна, то нормальную модель $\mathscr{E}(XY)$ называем *стандартной*, слабо или *сильно регулярной.* (См. [1]).

## 3. СОВЕРШЕННОЕ ОТНОШЕНИЕ

Пусть $R$ обозначает некоторое отношение. Определим $\mathfrak{C}(R) = \mathfrak{W}(R) \cup \mathfrak{D}(R)$.

**3.1. Определение.** Пусть $R$ – отношение.

$$y \in \Phi(x) \equiv x \in \mathfrak{C}(R) \,\&\, \langle yx \rangle \in R\,, \quad \text{или} \quad \Phi(x) = R``\{x\}\,.$$

Очевидно, для всякого $x \in \mathfrak{C}(R)$ существует класс $\Phi(x)$. $\Phi(x)$ называется *экстензией* множества $x$ в отношении $R$.

Отношение $R$ называют *интернальным*, когда

$$(x)\,(y)\,[x, y \in \mathfrak{C}(R) \to (\Phi(x) = \Phi(y) \equiv x = y)]\,.$$

**3.2. Определение.** Отношение $R$ называется *слабо регулярным*, когда

$$(x)\,[x \in \mathfrak{C}(R) \to \mathfrak{M}(\Phi(x))] \,\&\, \mathfrak{Pr}(R)\,.$$

**3.3. Определение.** Отношение $R$ называется *сильно регулярным,* когда $\mathfrak{M}(R)$.

Под регулярным отношением понимаем или сильно или слабо регулярное отношение.

**3.4. Определение.** Отношение $R$, для которого имеет место соотношение

$$(x)\,(\exists y)\,[0 \neq x \subseteq \mathfrak{W}(R) \to (y \in x \,\&\, x \cap \Phi(y) = 0)]\,,$$

называют *стандартным.*

**3.5. Определение.** Отношение $\bar{E}$ называется *совершенным отношением*, если пропозициональная функция $\mathscr{E}(XY) \equiv \langle XY \rangle \in \bar{E}$ есть модель теории множеств.

Модель, определенную совершенным отношением $\bar{E}$, обозначим через $(\bar{E})$. Совершенное отношение $\bar{E}$, очевидно, интернально и

$$\mathfrak{W}(\bar{E}) \subseteq \mathfrak{D}(\bar{E}) \cup \{0^*\}\,.$$

**3.6. Лемма.** *Модель* $(\bar{E})$ *нормальна.*

Как в определении 2.10, модель $(\bar{E})$ называется слабо (сильно) регулярной или стандартной, когда отношение $\bar{E}_m = \bar{E} \bigwedge \mathfrak{W}(\bar{E})$ слабо (сильно) регулярно или стандартно.

**3.7. Лемма.** *Модель $(\bar{E})$ сильно регулярна тогда и только тогда, когда отношение $\bar{E}$ сильно регулярно.*

Доказательство. 1) Пусть отношение $\bar{E}$ сильно регулярно, тогда, очевидно, и $\bar{E}_m$ сильно регулярно. 2) Пусть $\bar{E}_m$ сильно регулярно. Обозначим через $V^*$ универсальный класс модели $(\bar{E})$. Так как $\Phi(V^*) = \mathfrak{W}(\bar{E}) = \mathfrak{W}(\bar{E}_m)$, то $\mathfrak{M}(\Phi(V^*))$. Из этого утверждения и потому что $\bar{E}$ интернально, следует $\mathfrak{M}(\bar{E})$.

Пусть $\bar{E}$ — регулярное совершенное отношение. Определим

$$\langle xy\rangle \in \bar{E}_1 \equiv (\exists u, v)\,[\langle uv\rangle \in \bar{E}\,\&\, x = \Phi(u)\,\&\, y = \Phi(v)]\,.$$

Тогда отношение $\bar{E}_1$ является совершенным отношением.

**3.8. Лемма.** *Пусть $\bar{E}$ — регулярное совершенное отношение. Тогда модель $(\bar{E})$ сильно регулхрна и модель*

$$\mathscr{E}^1(XY) \equiv (\exists uv)\,[\langle uv\rangle \in \bar{E}\,\&\, X = \Phi(u)\,\&\, Y = \Phi(v)]$$

*тоже сильно регулярна и определена совершенным отношением $\bar{E}_1$.*

Доказательство. 1) Пусть $\bar{E}$ — совершенное регулярное отношение и $V^*$ — универсальный класс модели $(\bar{E})$. Очевидно, $\mathfrak{W}(\bar{E}_m) = \Phi(V^*)$. Так как $\mathfrak{W}(\bar{E}_m) \supseteq \mathfrak{D}(\bar{E}_m)$ и $\mathfrak{M}(\Phi(V^*))$, то $\bar{E}_m$ сильно регулярно и вследствие леммы 3.7. $\bar{E}$ сильно регулярно. 2) Так как $\bar{E}$ — регулярное отношение, то можно определить функцию $\Theta$ над $\mathfrak{C}(\bar{E})$ следующим образом:

$$\Theta\text{`}x = \Phi(x)\,, \quad \Theta Fn\,\mathfrak{C}(\bar{E})\,.$$

Отношение $\bar{E}_1$ равносильно отношению $\bar{E}$, и пропозициональные функции $\mathscr{E}(xy) \equiv \langle xy\rangle \in \bar{E}$, $\mathscr{E}^1(xy) \equiv \langle xy\rangle \in \bar{E}_1$ суть изоморфные модели. Изоморфизмом является функция $\Theta$.

**Замечание.** 1) Модель $(\bar{E})$ стандартна тогда и только тогда, когда отношение $\bar{E}$ стандартно, потому что $\mathfrak{W}(\bar{E}_m) = \mathfrak{W}(\bar{E})$. 2) Если модель $(\bar{E})$ слабо регулярна, то отношение $\bar{E}$ не является регулярным и модель $\mathscr{E}^1(XY)$ невозможно определить при помощи совершенного отношения.

**3.9. Тип стандартной регулярной модели** $(\bar{E})$. Пусть $\bar{E}$ — совершенное отношение, $\bar{E}_m$ регулярно и стандартно, $On^*$ — класс модели $(\bar{E})$ всех ординальных чисел этой модели. Обозначим $U = \Phi(On^*)$. Очевидно, $U$ — класс теории, элементами которого являются все ординальные числа модели $(\bar{E})$. По предположению он вполне упорядочен отношением $\bar{E}_m$.

**3.10. Лемма,** 1) *Если модель $(\bar{E})$ сильно регулярна, то существует $0 \neq \alpha \in K_2$ такое, что $\mathfrak{Isom}_{E_m,E}(U, \alpha)$.* 2) *Если модель $(\bar{E})$ слабо регулярна, то $\mathfrak{Isom}_{\bar{E}_m,E}(U, On)$.*

Доказательство. 1) $(\bar{E})$ сильно регулярна; это значит, что $\bar{E}$ сильно регулярно и тогда $\mathfrak{M}(U)$. В силу [3] (глава III, 7.7.) существует ординальное число $\alpha$ такое, что $\mathfrak{Isom}_{E_m,E}(U, \alpha)$. Так как множество $U$ непусто и не имеет наибольшего элемента, то $0 \neq \alpha \in K_2$. 2) Если $(\bar{E})$ слабо регулярна, то $\mathfrak{Pr}(U)$. (В противоположном случае получаем $\mathfrak{W}(\bar{E}_m) = \bigcup_{y^* \in^* On^*} \Phi(p^*_{y^*})$, и это значит $\mathfrak{M}(\mathfrak{W}(\bar{E}_m))$, но это противоречит условию слабой регулярности.) Очевидно, всякое собственное сечение класса $U$ есть множество, и в силу [3] наверно имеет место $\mathfrak{Isom}_{E_m,E}(U, On)$.

**3.11. Определение.** $\mathfrak{Typ}(\bar{E}) = X$, где $\mathfrak{Ord}(X)$, тогда и только тогда, когда $\mathfrak{Isom}_{E_m,E}(U, X)$.

**3.12. Теорема существования.** *Если существует сильно регулярная модель $\mathscr{E}(XY)$, то существует совершенное отношение.* (Если $In_2 \neq 0$, то сильно регулярная модель существует, например, $\mathscr{E}_{p_9}(XY)$, см. 2.7.)

Доказательство. а) Пусть $\mathscr{E}(XY)$ – сильно регулярная модель; это значит, что существует отношение $\tilde{E}_m$, которое является множеством. Возьмем модель $\mathscr{E}^2(XY)$ как в 2.8. Обозначим $\mathfrak{W}(\tilde{E}_m) = \bar{v}$, что есть универсальный класс модели $\mathscr{E}^2(XY)$ и, очевидно, $\mathfrak{M}(\bar{v})$.

б) Определим вспомогательные функции в теории. Функция $\Theta$ ставит всякому $x \in \bar{v}$ в соотношение его экстензию в отношении $\tilde{E}_m$

$$\Theta`x = \tilde{E}''_m\{x\}, \quad \Theta\mathfrak{Fn}\bar{v}.$$

Очевидно, для всякого $x \in \bar{v}\, \Theta'x$ является множеством модели $\mathscr{E}^2(XY)$. Так как $\tilde{E}_m$ – интернальное отношение, то можно определить обратную функцию $T$ $(T = \mathfrak{Cnv}\Theta)$. Рассмотрим следующие бинарные и унарные операции: $\mathfrak{F}_2(X) = E \cap X$, $\mathfrak{F}_3(XY) = X - Y$, $\mathfrak{F}_4(X) = V \times X$, $\mathfrak{F}_5(X) = \mathfrak{D}(X)$, $\mathfrak{F}_6(X) = \mathfrak{Cnv}_1(X)$, $\mathfrak{F}_7(X) = \mathfrak{Cnv}_2(X)$, $\mathfrak{F}_8(X) = \mathfrak{Cnv}_3(X)$. Для всякой операции $\mathfrak{F}_i^2$ (т.е. операции в модели $\mathscr{E}^2(XY)$) определим соответствующую функцию $G_i$ $(i = 2, . ., 8)$:

$$\langle yx\rangle \in G_2 \equiv (u^2)\,[T'u^2 \in y \equiv (T'u^2 \in x \,\&\, (\exists v^2, w^2)\,[u^2 = \langle v^2w^2\rangle^2 \,\&\, v^2 \in^2 w^2])]\,\& \,\& \, y \subseteq \bar{v} \,\&\, x \subseteq \bar{v};\ \mathfrak{Rel}(G_2),$$

$$\langle zxy\rangle \in G_3 \equiv (u^2)\,[T'u^2 \in z \equiv (T'u^2 \in y \,\&\, T'u^2 \notin x)]\,\&\, x \subseteq \bar{v} \,\&\, y \subseteq \bar{v} \,\&\, z \subseteq \bar{v};\ \mathfrak{Rel}_3(G_3),$$

$$\langle yx\rangle \in G_4 \equiv (u^2)\,[T'u^2 \in y \equiv (\exists v^2\, w^2)\,[T'w^2 \in x \,\&\, u^2 = \langle v^2w^2\rangle^2]]\,\&\, x \subseteq \bar{v} \,\& \,\& \, y \subseteq \bar{v};\ \mathfrak{Rel}(G_4),$$

$$\langle yx\rangle \in G_5 = (u^2)\,[T'u^2 \in y \equiv (\exists v^2)\,[T'\langle v^2u^2\rangle \in x]]\,\&\, x \subseteq \bar{v} \,\&\, y \subseteq \bar{v};\ \mathfrak{Rel}(G_5),$$

$$\langle yx\rangle \in G_6 \equiv (u^2)\,[T'u^2 \in y \equiv (\exists v^2, w^2)\,[T'\langle v^2w^2\rangle \in x \,\&\, \langle w^2v^2\rangle^2 = u^2]]\,\&\, x \subseteq \bar{v} \,\& \,\& \, y \subseteq \bar{v};\ \mathfrak{Rel}G_6,$$

$G_7$, $G_8$ аналогично.

Эти функции $G_i$ существуют, потому что пропозициональные функции, которыми они определены, являются нормальными. Очевидно,

$$(x, y)\,[\mathfrak{Cls}^2(x) \,\&\, \mathfrak{Cls}^2(y) \rightarrow (\langle yx \rangle \in G_i \equiv y = \mathfrak{F}_i^2(x))] \quad \text{для} \quad i = 2, 4, 5, \ldots, 8$$

$$(x, y, z)\,[\mathfrak{Cls}^2(x) \,\&\, \mathfrak{Cls}^2(y) \,\&\, \mathfrak{Cls}^2(z) \rightarrow (\langle z, y, x \rangle \in G_3 \equiv z = \mathfrak{F}_3^2(xy))]\,.$$

в) Обозначим через $s$ множество, элементы которого суть множества и универсальный класс $\bar{v}$ модели $\mathscr{E}^2(XY)$:

$$u \in s \equiv (\exists w)\,[w \in \bar{v} \,\&\, u = \Phi' w] \vee u = \bar{v}\,.$$

Очевидно, что $s$ бесконечно. Аналогично как в [3] (глава IV, 8.73.) построим замыкание множества $s$ относительно однозначных отношений $G_i$. Это замыкание, которое является тоже множеством, обозначим через $r$.

г) Теперь определим отношение $\bar{E}$, которое совершенно:

$$\langle xy \rangle \in \bar{E} \equiv y \in r \,\&\, (\exists u)\,[u \in \bar{v} \,\&\, x = \Phi' u \,\&\, u \in y]\,.$$

Если положим $\psi(x) \equiv x \in r$, то пропозициональные функции $\langle xy \rangle \in \bar{E}$ и $\mathscr{E}^2(xy) \,\&$ $\& \, \psi(y)$ эквивалентны. Так как функция $\psi(x)$ удовлетворяет условиям (1), (2), (3) из 2.9., то $\mathscr{E}^2(xy) \,\&\, \psi(y)$ является моделью и, следовательно, $\bar{E}$ — совершенное отношение.

**3.13. Лемма.** *Пусть существует эксорбитантное число $\vartheta$. Тогда существует сильно регулярная модель.*

Доказательство. $\mathscr{E}(XY) \stackrel{\mathrm{Df}}{\equiv} X \in L \cap p_\vartheta \,\&\, Y \in L \cap p_{\vartheta+1} \,\&\, X \in Y$ является моделью, которую построим так, что в модели $\Delta$ [3] построим модель $\mathscr{E}_{p_\vartheta}(XY)$. В модели $\Delta$ верна континуум-гипотеза, и поэтому $\vartheta$ — сильно эксорбитантное число модели $\Delta$.

**3.14. Теорема.** *Пусть существует нормальная модель $\mathscr{E}(XY)$, в которой существует эксорбитантное число. Тогда существует совершенное отношение $\bar{E}$.*

Доказательство. Пусть $\varphi(X)$ есть пропозициональная функция, определенная в 2.8. Обозначим

$$\mathscr{E}^1(XY) \equiv \mathscr{E}(XY) \,\&\, \varphi(X) \,\&\, \varphi(Y)\,,$$

$\mathscr{E}^1(XY)$ — нормальная модель, в которой существует эксорбитантное число, потому что $\alpha \in In_1$ есть нормальное понятие. Это значит, что в этой модели существует совершенное отношение $\bar{E}^1$ (относительно модели). Отношение $\bar{E} \equiv (\bar{E}^1)^0$ совершенно.

**3.15. Теорема.** 1) *Пусть $\bar{E}$-стандартное, сильно регулярное, совершенное отношение и $\mathfrak{Typ}(\bar{E}) = \alpha$. Тогда существует однозначно определенное мно-*

*жество с такое, что* $(\bar{E})$, $(\bar{e})$ — *изоморфные модели, где* $\bar{e} = E \bigwedge c$. *Далее имеет место* $\bar{\tau}(\mathfrak{C}(\bar{e})) = \bar{\tau}(c) = \alpha + 1$ *и* $\bar{\tau}(\mathfrak{W}(\bar{e})) = \bar{\tau}(\mathfrak{S}(c)) = \alpha$.

2) *Пусть* $(\bar{E})$ — *стандартная, слабо регулярная модель. Тогда существуют собственный класс* $S$, $\mathfrak{Comp}(S)$, *и пропозициональная функция* $\bar{\psi}$ *такие, что функции* $\langle XY\rangle \in \bar{E}$ *и* $X \in S \,\&\, (Y \in S \vee (Y \subseteq S \,\&\, \bar{\psi}(Y))) \,\&\, X \in Y$ *изоморфны.*

Доказательство. 1) Обозначим $z\ \mathfrak{Isom}_{E,\bar{E}_m}(\alpha, \Phi(On^*))$, где $\alpha = \mathfrak{Typ}(\bar{E})$. Очевидно, $z\mathfrak{Fn}\alpha$, $\mathfrak{W}(z) = \Phi(On^*)$, $\mathfrak{Un}_2(z)$. Построим функцию $J$, для которой $J\mathfrak{Fn}\,\mathfrak{C}(\bar{E})$ и $J'x = J''\Phi(x)$. Чтобы построить функцию $J$, нужно сначала определить функцию $H$ трансфинитной индукцией:

$$HFn\alpha$$

$$\gamma \in K_1:\ z \in H'\gamma \equiv (\exists uv)\left[z = \langle uv\rangle \,\&\, u = (H'\gamma - 1)''\ \Phi(v) \,\&\, v \in \Phi(p^*_{z'\gamma})\right]$$

$$\gamma \in K_2:\ H'\gamma = \bigcup_{\beta\in\gamma} H'\beta$$

Функция $H$ обладает следующими свойствами:

(а) $H'\gamma\mathfrak{Fn}\ \Phi(p^*_{z'\gamma})$ для всякого $\gamma \in \alpha$, потому что для $\gamma \in K_1$ имеет место $v \in \Phi(p^*_{z'\gamma}) \equiv \Phi(v) \subseteq \Phi(p^*_{z'(\gamma-1)})$ и для $\gamma \in K_2$ это очевидно.

(аа) $\mathfrak{W}(H'\gamma) \subseteq p_\gamma$ для всякого $\gamma \in \alpha$. (Если $\gamma = 0$, то утверждение очевидно. Пусть $\mathfrak{W}(H'\gamma) \subseteq p_\gamma$. Из определения функции $H$ для $x \in \Phi(p^*_{z'(\gamma+1)})$ получаем $(H'(\gamma + 1))'x = (H'\gamma)''\Phi(x)$. Так как $\Phi(x) \subseteq \Phi(p^*_{z'\gamma})$, то из предположения вытекает $(H'(\gamma + 1))'x \in p_{\gamma+1}$. Пусть $\gamma \in K_2$, тогда $\mathfrak{W}(H'\gamma) = \mathfrak{W}(\bigcup_{\beta\in\gamma} H'\beta) = \bigcup_{\beta\in\gamma} \mathfrak{W}(H'\beta) \subseteq \bigcup_{\beta\in\gamma} p_\beta \subseteq p_\gamma$.)

(ааа) $H'\gamma_1 \subset H'\gamma_2$ для $\gamma_1 < \gamma_2$ и $\gamma_1, \gamma_2 \in \alpha$. Определим для всякого $\gamma \in \alpha$ функцию $J_\gamma$:

$$J_\gamma\mathfrak{Fn}\ \mathfrak{C}(\bar{E}), \quad J'_\gamma x = (H'\gamma)''\ \Phi(x \cap^* p^*_{z'\gamma}).$$

Теперь можно определить функцию $J$: $J\mathfrak{Fn}\,\mathfrak{C}(\bar{E})$, $J'x = \bigcup_{\gamma\in\alpha} J'_\gamma x$. Для функций $J_\gamma$ и $J$ имеет место:

(б) $$J'x = J_\gamma x \quad \text{для} \quad x \in \Phi(p^*_{z'\gamma}),$$

(бб) $$J'_{\gamma_1} p^*_{z'\gamma_1} \in J'_{\gamma_2} p^*_{z'\gamma_2} \quad \text{для} \quad \gamma_1 < \gamma_2,$$

(ббб) $$\langle xy\rangle \in \bar{E} \to J'x \in J'y.$$

Очевидно, $\Phi(x) \neq 0 \equiv J'x \neq 0$. Из этого следует $\mathfrak{Un}_2(J)$. Пусть $u \in J'x$. Тогда существует первое $\gamma \in \alpha$ такое, что $u \in J_\gamma'x$. Очевидно, $\gamma \in K_1$; это значит, что $u \in (H'\gamma)''\ \Phi(x \cap^* p^*_{z'\gamma})$, или существует $y \in \Phi(x)$ и $y \in \Phi(p^*_{z'\gamma})$ такое, что $u = (H'\gamma)'\ y$. Очевидно, $u = J'y$. Вследствие изоморфизма $J$ такое $y$ существует одно и только одно. Обозначим $c = J''\ \mathfrak{C}(\bar{E})$. В силу предшествующего $\mathfrak{Comp}(c)$. Множество $e = E \bigwedge c$ есть искомое совершенное отношение.

2) Определим аналогично функцию $H\mathfrak{Fn}On$. Функцию $J$ определим выражением $J = \bigcup_{\gamma \in On} H'\gamma$. Очевидно, $J\mathfrak{Fn}\,\mathfrak{W}(\bar{E})$ и $J'x = J''\,\Phi(x)$. Обозначим $S = \mathfrak{W}(J)$. Изоморфизм $\mathscr{J}$ можно определить следующим способом:

$$\mathscr{J}(X, Y) \equiv X \in \mathfrak{C}(\bar{E}) \,\&\, Y = J''\,\Phi(X)\,.$$

Если обозначим $\bar{\psi}(X) \equiv \mathscr{J}_{(2)}(Y)$, то функция

$$\mathscr{E}(X, Y) \equiv X \in S \,\&\, Y \subseteq S \,\&\, \bar{\psi}(Y) \,\&\, X \in Y$$

будет искомой моделью.

## 4. СВОЙСТВА СОВЕРШЕННЫХ ОТНОШЕНИЙ

**4.1.** Пропозициональная функция $\varphi(x_1, \ldots, x_n, X_1, \ldots, X_m)$ называется *сильно нормальной*, если существует первоначальная пропозициональная функция $\psi(x_1, \ldots, x_n, X_1, \ldots, X_m)$, несодержащая свободных переменных, отличных от $x_1, \ldots, x_n, X_1, \ldots, X_m$, и несодержащая символов для специальных классов, такая, что

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n, X_1, \ldots, X_m) \equiv \psi(x_1, \ldots, x_n, X_1, \ldots, X_m)\,.$$

Понятие называется сильно нормальным, если эквивалентно сильно нормальной пропозициональной функции. Операция и специальный класс называются сильно нормальными, если они определены сильно нормальной пропозициональной функцией.

**Замечание.** Класс $E$ есть сильно нормальный специальный класс.

**4.2. Теорема.** *Пусть $\bar{E}_1$ — совершенное отношение. Пусть $\bar{E}_2$ — отношение, удовлетворяющее следующим требованиям*:

(0) $$\bar{E}_2 = \bar{E}_1 \cap (\mathfrak{W}(\bar{E}_2) \times \mathfrak{D}(\bar{E}_2))$$

(1) $$V^1 \in \mathfrak{C}(\bar{E}_2)$$

(2) $$(x, y)\,(x, y \in \mathfrak{C}(\bar{E}_2) \to \mathfrak{F}_i^1(xy) \in \mathfrak{C}(\bar{E}_2) \quad \text{для} \quad i = 1, \ldots, 8$$

(3) $$\mathfrak{C}(\bar{E}_2) \cap \mathfrak{D}(\bar{E}_1) \subseteq \mathfrak{D}(\bar{E}_2)$$

*Тогда $\bar{E}_2$ — соверщенное орношение и все сильно нормальные операции, понятия и специальные классы абсолютны (это значит, $\mathfrak{A}^1(X_1^2, \ldots, X_n^2) = \mathfrak{A}^2(X_1^2, \ldots, X_n^2)$, $\mathfrak{B}^1(X_1^2, \ldots, X_n^2) \equiv \mathfrak{B}^2(X_1^2, \ldots, X_n^2)$, $A^1 = A^2$). В модели $(\bar{E}_2)$ верна аксиома выбора тогда и только тогда, если существует класс $a \in \mathfrak{C}(\bar{E}_2)$ такой, что он является выборовым клссом в модели $(\bar{E}_1)$.*

Доказательство. а) Сначала докажем, что в $(\bar{E}_2)$ имеет место аксиома экстензиональности, это значит $(X^2, Y^2)[\Phi^2(X^2) = \Phi^2(Y^2) \to X^2 = Y^2]$. Пусть существуют $X^2 \neq Y^2$ такие, что их экстензии равны. Так как $X^2, Y^2 \in \mathfrak{C}(\bar{E}_1)$, и в модели $(\bar{E}_1)$ аксиома $A3$ верна, то $\Phi^1(X^2) \neq \Phi^1(Y^2)$ (напр., $\Phi^1(X^2) - \Phi^1(Y^2) \neq 0$). Но $\Phi^1(X^2) - \Phi^1(Y^2) = \Phi^1(\mathfrak{F}_3^1(X^2, Y^2))$. В силу (2) имеет место $Z = \mathfrak{F}_3^1(X^2 Y^2) \in \mathfrak{C}(\bar{E}_2)$. Очевидно, что $\Phi^2(Z) = \Phi^2(X^2) - \Phi^2(Y^2) \neq 0$ (потому что в силу (0) $u \in \Phi^2(Z) \equiv u \in \mathfrak{W}(\bar{E}_2) \& \langle uZ\rangle \in \bar{E}_1 \equiv u \in \mathfrak{W}(\bar{E}_2) \& \langle uX^2\rangle \in \bar{E}_1 \& \langle uY^2\rangle \notin \bar{E}_1 \equiv \langle uX^2\rangle \in \bar{E}_2 \& \langle uY^2\rangle \notin \bar{E}_2$). Это значит, что $Z \notin \mathfrak{D}(\bar{E}_2)$. Так как $\Phi^1(Z) \neq 0$, то $Z \in \mathfrak{D}(\bar{E}_1)$, что противоречит предположению (3).

б) Если $\varphi(X_1, \ldots, X_n)$ – первоначальная пропозициональная функция, не содержащая символов для специальных классов, то $(X_1^2, \ldots, X_n^2)[\varphi^1(X_1^2, \ldots, X_n^2) \equiv \varphi^2(X_1^2, \ldots, X_n^2)$. Докажем индуктивно (индукция ведется по числу логических операторов в $\varphi$):

I. $\varphi$ не имеет логических операторов, это значит $\varphi(X, Y) \equiv X \in Y$. Утверждение $X^2 \in^2 Y^2 \equiv X^2 \in^1 Y^2$ следует из (0).

II. Если утверждение верно для функций $\vartheta$, $\chi$ и если $\varphi \overset{\mathrm{Df}}{\equiv} \sim \vartheta$ или $\varphi \overset{\mathrm{Df}}{\equiv} \vartheta \& \chi$, то оно, очевидно, верно и для $\varphi$.

III. Пусть $\varphi$ имеет вид $(\exists y)\, \psi(y, X_1, \ldots, X_n)$ и пусть для $\psi$ утверждение верно; это значит, что

$$\psi^2(y^2, X_1^2, \ldots, X_n^2) \equiv \psi^1(y^2, X_1^2, \ldots, X_n^2)\,.$$

Нужно доказать, что утверждение имеет место тоже для $\varphi$, это значит, что

$$(\exists y^2)\, \psi^2(y^2, X_1^2, \ldots, X_n^2) \equiv (\exists y_1^1)\, \psi^1(y^1, X_1^2, \ldots, X_n^2)\,.$$

По индуктивному предположению достаточно доказать

$$(\exists y^2)\, \psi^1(y^2, X_1^2, \ldots, X_n^2) \equiv (\exists y^1)\, \psi^1(y^1, X_1^2, \ldots, X_n^2)\,,$$

и потому что из (0) вытекает $\mathfrak{M}^2(X^2) \to \mathfrak{M}^1(X^2)$ то, очевидно, левая часть влечет за собой правую, и достаточно доказать

$$(\exists y^1)\, \psi^1(y^1, X_1^2, \ldots, X_n^2) \to (\exists y^2)\, \psi^1(y^2, X_1^2, \ldots, X_n^2)\,.$$

Пропозициональная функция $\psi$ первоначальна и в следствие метатеоремы 1 [3] существует такой класс $A$, что $y \in A \equiv \psi(y, X_1, \ldots, X_n)$, и класс $A$ получится применением конечного числа фундаментальных операций на классы $X_1, \ldots, X_n$, $V$. Обозначим через $A^1$ соответствующий относительный к $A$ класс модели $(\bar{E}_1)$. В силу (1), (2) $A^1 \in \mathfrak{C}(\bar{E}_2)$. Пусть существует $y^1$ такое, что $\psi^1(y^1, X_1^2, \ldots, X_n^2)$. Это значит $\Phi^1(A^1) \neq 0$, и в силу (3) необходимо тоже $\Phi^2(A^1) \neq 0$. Из этого следует существование $y^2$ такого, что $y^2 \in^2 A^1$; значит, $\psi^1(y^2, X_1^2, \ldots, X_n^2)$.

в) Сильно нормальные понятия абсолютны, потому что соответствующие первоначальные пропозициональные функции абсолютны.

г) Сильно нормальные операции абсолютны. Пусть операция $\mathfrak{A}(X_1, \ldots, X_n)$ определена первоначальной функцией без символов для специальных классов $\varphi(Y, X_1, \ldots, X_n)$. Нужно доказать, что

$$(X_1^2, \ldots, X_n^2)\,[\varphi^2(\mathfrak{A}^1(X_1^2, \ldots, X_n^2), X_1^2, \ldots, X_n^2)]\,,$$
$$(X_1^2, \ldots, X_n^2)\,(\exists!\, Y^2)\,[\varphi^2(Y^2, X_1^2, \ldots, X_n^2)]\,.$$

Операция $\mathfrak{A}(X_1, \ldots, X_n)$ получится применением конечного числа фундаментальных операций на классы $V, X_1, \ldots, X_n$; это значит, что в силу (2), (3) имеет место $\mathfrak{A}^1(X_1^2, \ldots, X_n^2) \in \mathfrak{C}(\bar{E}_2)$. Из а) следует $\varphi^2(Y^2, X_1^2, \ldots, X_n^2) \equiv \varphi^1(Y^2, X_1^2, \ldots, X_n^2)$, и существует один и только один класс $Y^2 = \mathfrak{A}^1(X_1^2, \ldots, X_n^2)$.

д) Сильно нормальный специальный класс получится применением конечного числа фундаментальных операций на универсальный класс, значит, он абсолютен.

е) Остается доказать, что $(\bar{E}_2)$ – модель., $A1, A2$ – очевины, $A3$ – см. а), $A4$, $C1$, $C2$, $C3$ – сильно нормальны, $B1$ – класс $E$ сильно нормален, $B2$, $B3$ – соответствующие операции сильно нормальны, $C4$ – пропозициональная функция $(u)\,[\mathfrak{Un}(X) \to \mathfrak{M}(X''u)$ – силньно нормальна, потому что из аксиом группы $A$ следует $\mathfrak{M}(X) \equiv (\exists y)\,(X \in y)$, $D$ – относительная сильно нормальная функция к функции $\sim \mathfrak{Em}(X) \to (\exists u)\,(u \in X\ \&\ \mathfrak{Ex}(uX))$ имеет место для всякого $X^1$ и поэтому для всякого $X^2$, $E$ – „является выборовым классом“ – сильно нормальное понятие, то класс выбора существует в $(\bar{E}_2)$ тогда и только тогда, когда в $(\bar{E}_2)$ существует класс, являющийся классом выбора в $(\bar{E}_1)$.

**4.3.** Пусть $\bar{E}$ – совершенное отношение. Через $\mathfrak{F}_1^*(X^*Y^*), \ldots, \mathfrak{F}_{10}^*(X^*Y^*)$ обозначим относительные фундаментальные операции (в модели $(\bar{E})$). Эти операции определены для $x, y \in \mathfrak{C}(\bar{E})$, и всякой упорядоченной паре $\langle xy \rangle$ ставят в соответствие однозначно определенное множество $z \in \mathfrak{C}(\bar{E})$ (потому что в $(\bar{E})$ верны аксиомы $A, B, C, D$). Мы покажем, что операции $\mathfrak{F}_1^*, \ldots, \mathfrak{F}_{10}^*$ нормальны:

$$\Phi(x) = \bar{E}''\{x\}\,, \quad \Phi(\{xy\}^*) = \{xy\} \cap \mathfrak{W}(\bar{E})\,,$$
$$\Phi(x - {}^*y) = \Phi(x) - \Phi(y)\,, \quad x \cap {}^*y = x - {}^*(x - {}^*y)\,,$$
$$E^* \in \mathfrak{C}(\bar{E})\,, \quad u \in \Phi(x \times^* y) \equiv (\exists v, w)\,(v \in \Phi(x)\ \&\ w \in \Phi(y)\ \&$$
$$\&\ u = \langle vw \rangle^*)\,, \quad u \in \Phi(\mathfrak{D}^*(x)) \equiv (\exists v)\,(\langle vu \rangle^* \in \Phi(x))\,,$$
$$u \in \Phi(\mathfrak{Cnv}^*(x)) \equiv (\exists v, w)\,(u = \langle vw \rangle^*\ \&\ \langle wv \rangle^* \in \Phi(x))\,,$$
$$u \in \Phi(\mathfrak{S}^*x) \equiv (\exists v)\,(v \in \Phi(x)\ \&\ u \in \Phi(v))\,,$$
$$u \in \Phi(\mathfrak{P}^*(x)) \equiv \Phi(u) \subseteq \Phi(x)\,.$$

В силу метатеоремы 5 [3] существуют функции $F_1, \ldots, F_{10}$ такие, что $F_i \mathfrak{F}_n\, \mathfrak{C}(\bar{E}) \times \mathfrak{C}(\bar{E})$ и $F_i'\langle xy \rangle = \mathfrak{F}_i^*(xy)$ для $i = 1, \ldots, 10$.

**4,4,** Обозначим через $F_0$ функцию, которая всякому $x \in \mathfrak{W}(\bar{E}) - \{O^*\}$ ставит в соответствие $y \in \mathfrak{W}(\bar{E})$ такое, что $\langle yx \rangle \in \bar{E}$. Такая функция существует, например, если в модели $(\bar{E})$ верна аксиома выбора, но может существовать и тогда, если аксиома выбора в $(\bar{E})$ не имеет места. Функцию $F_0$ можно расширить на все $\mathfrak{C}(\bar{E})$ следующим образом: а) $F'_0 0^* = 0^*$. 2) Если $x \in \mathfrak{D}(E) - \mathfrak{W}(\bar{E})$, то $F'_0 x = F'_0(x \cap p^*_{\alpha^*(x)})$, где $\alpha^*(x)$ — первое ординальное число модели такое, что $x \cap^* p^*_{\alpha^*(x)} \neq 0$.

***4.5. Теорема.** *Пусть $\bar{E}$ — совершенное отношение. Пусть существует функция $F_0$. Пусть $\mathfrak{m}$ — бесконечное кардинальное число такое, что из $\mathfrak{M}(\bar{E})$ следует* $\mathfrak{m} \leqq \operatorname{card} \mathfrak{W}(\bar{E})$ *и $\alpha^*$ — ординальное число модели $(\bar{E})$ такое, что* $\operatorname{card} \Phi(\alpha^*) \leqq \mathfrak{m}$. *Тогда существует совершенное отношение $\bar{E}_1 \subseteq \bar{E}$ такое, что* $\operatorname{card} \bar{E}_1 = \mathfrak{m}$, $\operatorname{card} \mathfrak{W}(\bar{E}_1) = \mathfrak{m}$ *и всякое ординальное число $\beta^*$ модели $(\bar{E})$ меньше чем $\alpha^*$ (значит, $\beta^* \in \Phi(\alpha^*)$) является ординальным числом модели $(\bar{E}_1)$.*

Доказательство. Пусть $m_0$ — множество мощности $\mathfrak{m}$, для которого имеет место а) $V^* \in m_0$, б) $m_0 - \{V^*\} \subseteq \mathfrak{W}(\bar{E})$, в) $\Phi(\alpha^*) \subseteq m_0$. Обозначим через $m$ замыкание множества $m_0$ относительно функций $F_0, \ldots, F_8$ ([Г], 8.72) и определим $\bar{E}_1 = \bar{E} \cap (m \times m)$. Совершенность отношения $\bar{E}_1$ докажется при помощи теоремы 4.2.

(0) $\mathfrak{C}(\bar{E}_1) = m, \rightarrow \bar{E}_1 \doteq \bar{E} \cap (\mathfrak{C}(\bar{E}_1) \times \mathfrak{C}(\bar{E}_1))$.

(1) $V^* \in m_0, \rightarrow V^* \in \mathfrak{C}(\bar{E}_1)$.

(2) $x \in m \,\&\, y \in m \rightarrow \mathfrak{F}^*_i(xy) \in m$ $(i = 1, \ldots, 8)$, потому что $m$ замкнуто относительно функций $F_1, \ldots, F_8$.

(3) Пусть $x \in \mathfrak{C}(\bar{E}_1) \cap \mathfrak{D}(\bar{E})$, $\langle F'_0 x, x \rangle \in \bar{E}$. Так как $\mathfrak{C}(\bar{E}_1) = m$ замкнуто относительно функции $F_0$, то $\langle F'_0 x, x \rangle \in \bar{E}_1$ и $x \in \mathfrak{D}(\bar{E}_1)$. Так как $m \subseteq \mathfrak{C}(\bar{E})$ и $m$ — замыкание множества мощности $\mathfrak{m}$, то $\operatorname{card} \bar{E}_1 = \mathfrak{m}$ (см. [3], *8.73). Так как $m_0 - \{V^*\} \subseteq \mathfrak{W}(\bar{E}_1)$, то $\operatorname{card} \mathfrak{W}(\bar{E}_1) = \mathfrak{m}$. Пусть $\beta^*$ — ординальное число модели $(\bar{E})$, меньшее $\alpha^*$. В силу в) $\beta^* \in m_0$, и $\beta^* \in W(\bar{E}_1)$. Понятие $\mathfrak{Ord}(X)$ сильно нормально и вследствие теоремы 4.2. $\beta^*$ является ординальным числом модели $(\bar{E}_1)$.

***4.6. Теорема.** *Пусть $\bar{E}$ — совершенное отношение. Пусть $\mathfrak{m}$ — бесконечное кардинальное число такое, что из $\mathfrak{M}(\Phi(On^*))$ следует* $\mathfrak{m} \leqq \operatorname{card} \Phi(On^*)$, *и $\alpha^*$ — ординальное число модели $(\bar{E})$ такое, что* $\operatorname{card} \Phi(\alpha^*) \leqq \mathfrak{m}$. *Тогда верно утверждение предшествующей теоремы.*

Доказательство: Внутри модели $(\bar{E})$ построим модель $\Delta^*$ (модель $\Delta$ — см. [3]). Сначала покажем, что эта модель образована совершенным отношением. Определим класс $C$:

$$x \in C \equiv x \in \mathfrak{C}(\bar{E}) \,\&\, \Phi(x) \subseteq \Phi(L^*) \,\&\, (y)\,(y \in \Phi(L^*) \rightarrow y \cap^* x \in \Phi(L^*))\,.$$

Класс $C$ существует, потому что определяющая пропозициональная функция нормальна ($L^* \in \mathfrak{C}(\bar{E})$ – класс всех конструкитвных множеств модели $(\bar{E})$). Далее определим $\bar{E}_2 = \bar{E} \cap (\Phi(L^*) \times C)$. Очевидно, что модель $(\bar{E}_2)$ совпадает именно с $\Delta^*$. В $(\bar{E}_2)$ верна аксиома выбора, и поэтому существует функция $F_0$. Чтобы доказать утверждение теоремы требуется еще показать, что из $\mathfrak{M}(\bar{E}_2)$ следует $\mathfrak{m} \leqq \operatorname{card} \mathfrak{W}(\bar{E}_2)$ и что всякое ординальное число $\beta^*$ модели $(\bar{E})$, меньшее $\alpha^*$, является ординальным числом модели $(\bar{E}_2)$. Но модель $\Delta$ имеет те же самые ординальные числа, как первоначальная теория (см. [3]). Из этого следует $\Phi(On^*) = \Phi^2(On^*) \subseteq \mathfrak{W}(\bar{E}_2)$.

**4.7. Лемма.** *Пусть $\bar{E}_1 \subseteq \bar{E}$ – совершенные отношения. Если $(\bar{E})$ стандартна, или регулярна, или сильно регулярна, то $(\bar{E}_1)$ стандартна, или регулярна, или сильно регулярна.*

Доказательство. Пусть $0 \neq x \subseteq \mathfrak{W}(\bar{E}_1)$. Так как $\bar{E}_1 \subseteq \bar{E}$, то $x \subseteq \mathfrak{W}(\bar{E})$. Модель $(\bar{E})$ стандартна, поэтому существует такое $y \in x$, что $\Phi(y) \cap x = 0$. Для всякого $y \in \mathfrak{W}(\bar{E}_1)$ имеет место $\Phi^1(y) \subseteq \Phi(y)$. Поэтому модель $(\bar{E}_1)$ стандартна. Регулярность модели $(\bar{E}_1)$ вытекает из $\bar{E}_1 \subseteq \bar{E}$.

## 5. СТАНДАРТНАЯ НЕРЕГУЛЯРНАЯ МОДЕЛЬ

**5.1. Замечание.** В дальнейшем будем предполагать, что $In_1 = In_2$. (В противном случае применим следующую конструкцию к модели $\Delta$.

**5.2.** Если предполагать существование эксорбитантного кардинального числа $\vartheta$, то влседствие теорем 4.6. и 3.15. имеет место: Для всякого $\gamma < \vartheta$ и $\alpha$ мощности $\omega_\gamma$ существует совершенное отношение $\bar{E}$ мощности $\omega_\gamma$, которое является ограниченным отношением $E$ и ординальные числа которого упорядочены по типе, большем или равном $\alpha$; это значит, что $On^* \geqq \alpha$. (Построим сначала совершенное отношение $E \cap (m \times m) \subseteq E \bigwedge p_{\vartheta+1}$, где $\operatorname{card} m = \omega_\gamma$, и так как оно вследствие леммы 4.7. стандартно, построим по теореме 3.15. отношение $\bar{E} = E \bigwedge c$ ему изоморфное, $c \subseteq p_{\alpha+1}$, $\operatorname{card} c = \omega_\gamma$.)

**5.3.** Для всякого $\gamma \in \vartheta$ существует $\omega_{\gamma+1}$ взаимно неизоморфных стандартных сильно регулярных совершенных отношений мощности $\omega_\gamma$. (Если $\omega_\gamma \leqq \alpha \leqq$ $= \mathfrak{Typ}(\bar{E}) < \omega_{\gamma+1}$, то в силу 5.2. существует модель $(\bar{E}')$ такая, что $\alpha + 1 \leqq$ $\leqq \mathfrak{Typ}(\bar{E}') < \omega_{\gamma+1}$. Типы этих моделей образуют множество конфинальное числу $\omega_{\gamma+1}$, но это в силу $\gamma + 1 \in K_1$ регулярно и поэтому число этих моделей равно $\omega_{\gamma+1}$.)

**5.4. Нерегулярная стандартная модель.** Эту модель построим при предположении существования двух эксорбитантных кардинальных чисел $\vartheta_1 < \vartheta_2$ в модели $(\bar{E}_1) = (E \bigwedge p_{\vartheta_1+1})$. Очевидно, $\operatorname{card} \mathfrak{W}(E_1) = \vartheta_1$ и $\mathfrak{M}^1(x) \equiv \mathfrak{Cls}^1(x)\,\&$

& card $x < \vartheta_1$. Пусть $\vartheta_1 < \alpha < \omega_{\vartheta_1+1}$. Пуст ьотношение $\bar{E}_2 = E \bigwedge c$ совершено ($c$ – множество мощности $\vartheta_1$ из 5.2. для $\alpha < \vartheta_2$). Имеет место $\alpha \leqq On^2 < \omega_{\vartheta_1+1}$. Пусть $j$ – взаимно однозначное отображение $c$ в $\mathfrak{W}(\bar{E}_1)$, т.е. $\mathfrak{Un}_2(j)$ & & $j\mathfrak{Fnc}$ & $\mathfrak{W}(j) \subseteq \mathfrak{W}(\bar{E}_1)$. Обозначим через $\bar{E}_3$ отношение:

$$\langle xy \rangle \in \bar{E}_3 \equiv \langle j^{-1}x, j^{-1\prime}y \rangle \in \bar{E}_2 .$$

Отношение $\bar{E}_3$ совершенно, модель $(\bar{E}_3)$ изоморфна модели $(\bar{E}_2)$. Очевидно, что $\bar{E}_3 \subseteq p_{\vartheta_1} = \mathfrak{W}(E_1)$, и поэтому $\bar{E}_3 \in p_{\vartheta_1+1} = \mathfrak{C}(\bar{E}_1)$. Это значит, что $\bar{E}_3$ – совершенное отношение в смысле модели $(\bar{E}_1)$. Очевидно, оно стандартно. Покажем, что оно неявляется регулярным. Множество $j'\vartheta_1$ является множеством в смысле модели $(\bar{E}_3)$, но его элементы (в смысле модели $(\bar{E}_3)$) образуют собственный класс в смысле модели $(\bar{E}_1)$. $\mathfrak{M}^3(j'\vartheta_1)$ вытекает из $\vartheta_1 < \alpha \leqq On^2$. $\mathfrak{Pr}(\Phi^3(j'\vartheta_1))$ вытекает из $\Phi^3(j'\vartheta_1) = j''\vartheta_1$, card $j''\vartheta_1 = \vartheta_1$.

**5.5.** В силу замечания в конце 2.7. отношение $E \bigwedge p_{\omega_0+1}$ определяет модель теории конечных множеств. Если существует эксорбитантное кардинальное число, можно в этой модели построить модель теории (бесконечных) множеств. Число таких взаимно неизоморфных моделей даже несчетно. Пстроение сделаем аналогично как в 5.4.; в этой модели теории конечных множеств существует совершенное отношение, изоморфное некоторому счетному совершенному отношению.

*Литература*


[1] *Вопенка П.:* Модели Теории множеств. [1] Zeitschrift für math. Logic. *8* (1962), 281–292.
[2] *Vopěnka P.:* Axiomy numerace.
[3] *Gödel K.:* Consistency of the continuum hypothesis. Annals of math. studies *3* (1940), 1–69.
[4] *Shepherdson J. C.:* Inner models for set theory I, J. Symb. Logic *16* (1951), 161–190.


## Výtah

# MODELY TEORIE MNOŽIN TVOŘENÉ DOKONALOU RELACÍ


Bohuslav Balcar a Tomas Jech, Praha


V práci jsou studovány valstnosti určitých modelů axiomatické teorie množin. Základem je Gödelův systém axiomů $\Sigma$.

**Definice 2.1.** (viz též [2]): *Modelem* rozumíme formuli $\mathscr{E}(XY)$, pro kterou platí; definujeme-li

$$\mathfrak{Cls}^*(X) \equiv (\exists Y)[\mathscr{E}(XY) \vee \mathscr{E}(YX)], \quad \mathfrak{M}^*(X) \equiv (\exists Y)[\mathscr{E}(XY)], \quad X \in {}^*Y \equiv \mathscr{E}(XY),$$

pak predikáty $\mathfrak{Cls}_1^*$, $\mathfrak{M}_1^*$, $\in^*$ splňují axiomy $A$, $B$, $C$, $D$ teorie množin.

**Definice 2.8.** Model $\mathscr{E}(XY)$ se nazývá *normální*, existuje-li relace $\tilde{E}_m$ taková, že formule $\mathscr{E}_m(XY) \equiv \mathfrak{M}^*(X) \,\&\, \mathfrak{M}^*(Y) \,\&\, \mathscr{E}(XY)$ a $\langle XY \rangle \in \tilde{E}_m$ jsou isomorfní.

**Definice 2.10.** Normální model $\mathscr{E}(XY)$ se nazývá *standardní*, resp. *silně* (*slabě*) *regulární*, je-li standardní, resp. silně (slabě) regulární příslušná relace $\tilde{E}_m$.

V § 3 a 4 jsou vyšetřovány vlastnosti dokonalých relací.

**Definice 3.5.** Relace $\bar{E}$ se nazývá *dokonalá*, je-li formule $\langle XY \rangle \in \bar{E}$ modelem teorie množin. Tento model označíme $(\bar{E})$; je zřejmě normální, ale není nutně standardní nebo regulární.

*Extensí* $\Phi(x)$ množiny $x \in \mathfrak{S}(\bar{E}) = \mathfrak{W}(\bar{E}) \cup \mathfrak{D}(\bar{E})$ rozumíme třídu $\bar{E}''\{x\}$.

**Definice 3.9.** *Typem* standardního regulárního modelu $(\bar{E})$ rozumíme typ uspořádání všech ordinálních čísel tohoto modelu.

**3.12. Existenční věta.** *Existuje-li silně regulární model, potom existuje dokonalá relace.* (Předpoklad je splněn např. tehdy, existuje-li nedosažitelné kardinální číslo.)

**Definice 4.1.** Formuli $\varphi(x_1, \ldots, x_n, X_1, \ldots, X_m)$ nazýváme *silně normální*, je-li ekvivalentní takové primitivní formuli $\psi(x_1, \ldots, x_n, X_1, \ldots, X_m)$, která neobsahuje jiné volné proměnné kromě $x_1, \ldots, x_n, X_1, \ldots, X_m$ a žádné symboly pro speciální třídy. Predikát nazýváme silně normální, je-li ekvivalentní nějaké silně normální formuli. Operaci nebo speciální třídu nazýváme silně normální, jsou-li definovány silně normální formulí.

**4.2.** Nechť $\bar{E}_1$ je dokonalá relace, nechť relace $\bar{E}_2$ splňuje

$$\bar{E}_2 = \bar{E}_1 \cap (\mathfrak{W}(\bar{E}_2) \times \mathfrak{D}(\bar{E}_2)) \tag{0}$$

$$V^1 \in \mathfrak{S}(\bar{E}_2) \tag{1}$$

$$(x, y)\,[x, y \in \mathfrak{S}(\bar{E}_2) \rightarrow \mathfrak{F}^1_i(xy) \in \mathfrak{S}(\bar{E}_2)]\,, \quad i \leqq 1, \ldots, 8 \tag{2}$$

$$\mathfrak{S}(\bar{E}_2) \cap \mathfrak{D}(\bar{E}_1) \subseteq \mathfrak{D}(\bar{E}_2) \tag{3}$$

Potom je $\bar{E}_2$ dokonalá a všechny silně normální operace, predikáty a speciální třídy jsou absolutní. V modelu $(\bar{E}_2)$ platí axiom výběru právě tehdy, existuje-li nějaká množina $a \in \mathfrak{S}(\bar{E}_2)$ taková, že je výběrovou funkcí v modelu $(\bar{E}_1)$.

**4.6.** Buď $\bar{E}$ dokonalá relace. Buď $\mathfrak{m}$ nekonečné kardinální číslo takové, že je-li $\Phi(On^*)$ množina, potom $\mathfrak{m} \leqq \operatorname{card} \Phi(On^*)$. Buď $\alpha^*$ takové ordinální číslo modelu $(\bar{E})$, že $\operatorname{card} \Phi(\alpha^*) \leqq \mathfrak{m}$. Potom existuje dokonalá relace $\bar{E}_1 \subseteq \bar{E}$ taková, že $\operatorname{card} \bar{E}_1 = \mathfrak{m}$, $\operatorname{card} \mathfrak{W}(\bar{E}_1) = \mathfrak{m}$ a každé ordinální číslo $\beta^*$ modelu $(\bar{E})$, které je menší než $\alpha^*$ (tj. $\beta^* \in \Phi(\alpha^*)$), je ordinálním číslem modelu $(\bar{E}_1)$.

**Lemma 4.7.** Buďte $\bar{E}_1 \subseteq \bar{E}_2$ dokonalé relace. Je-li $(\bar{E}_2)$ standardní, je standardní i $(\bar{E}_1)$.

§ 5 obsahuje důsledky výše uvedených vět.

1. Za předpokladu existence nedosažitelného kardinálního čísla $\vartheta$ platí: Pro každé $\gamma < \vartheta$ a každé $\alpha$ mohutnosti $\aleph_\gamma$ existuje dokonalá relace $\bar{E}$ mohutnosti $\aleph_\gamma$, která je parcializací obyčejné $\in$-relace $E$ a jejíž ordinální čísla jsou uspořádána podle typu alespoň $\alpha$, tj. $On^* \geqq \alpha$.

2. Pro každé $\gamma < \vartheta$ existuje $\aleph_{\gamma+1}$ navzájem neisomorfních dokonalých relací mohutnosti $\aleph_\gamma$.

3. Je-li konsistentní existence dvou nedosažitelných alefů, pak je konsistentní i existence standardního neregulárního modelu.

4. Je-li bezesporný předpoklad, existence nedosažitelného čísla, pak je bezesporný i předpoklad, že v teorii konečných množin lze sestrojit model teorie $\Sigma$. Takových modelů je potom možno sestrojit dokonce nespočetně mnoho.

## Zusammenfassung

## MODELLE DER MENGENLEHRE, DIE DURCH PERFEKTE RELATIONEN GESCHAFFEN WERDEN

BOHUSLAV BALCAR und TOMÁŠ JECH, Praha

In der vorliegenden Arbeit werden Eigenschaften gewisser Modelle der axiomatischen Mengenlehre untersucht. Als Grund nehmen wir das Axiomensystem $\Sigma$ von Gödel.

**Definition 2.1.** (siehe auch [2]): Unter dem *Modell* vestehen wir solche Aussagenfunktion $\mathscr{E}(XY)$ zweier Veränderlichen, für welche folgendes gilt: definieren wir

$$\begin{aligned} \mathfrak{Cls}^*(X) &\equiv (\exists Y)\,[\mathscr{E}(XY) \vee \mathscr{E}(YX)] \\ \mathfrak{M}^*(X) &\equiv (\exists Y)\,[\mathscr{E}(XY)] \\ X \in {}^*Y &\equiv \mathscr{E}(XY), \end{aligned}$$

dann sind für $\mathfrak{Cls}^*$, $\mathfrak{M}^*$, $\in^*$ alle Axiome der Mengenlehre der Gruppen A, B, C, D erfüllt.

**Definition 2.8.** Das Modell $\mathscr{E}(XY)$ nennen wir *normal*, wenn es eine solche Relation $\tilde{E}_m$ gibt, dass die Aussagenfunktionen $\mathscr{E}_m(XY) \overset{\mathrm{Df}}{\equiv} \mathfrak{M}^*(X) \,\&\, \mathfrak{M}^*(Y) \,\&\, \mathscr{E}(XY)$ und $\langle XY \rangle \in \tilde{E}_m$ isomorph sind.

**Definition 2.10.** Das normale Modell $\mathscr{E}(XY)$ nennen wir *standard* bzw. *stark* (*schwach*) *regulär*, wenn die betreffende Relation $\tilde{E}_m$ standard bzw. stark (schwach) regulär ist.

In § 3 und 4 werden Eigenschaften der perfekten Relationen untersucht.

**Definition 3.5.** Die Relation $\bar{E}$ wird *perfekt* genannt, wenn die Aussagenfunktion $\langle XY \rangle \in \bar{E}$ ein Modell der Mengenlehre ist. Dieses Modell bezeichnen wir $(\bar{E})$; es ist offensichtlich normal, aber nicht notwendig standard oder regulär.

Unter der *Extension* $\Phi(x)$ der Menge $x \in \mathfrak{S}(\bar{E}) = \mathfrak{W}(\bar{E}) \cup \mathfrak{D}(\bar{E})$ verstehen wir die Klasse $\bar{F}''\{x\}$.

**Definition 3.9.** Unter dem *Typ* des standarden regulären Modells $(\bar{E})$ verstehen wir den Ordnungstyp der Klasse aller Ordnungszahlen dieses Modells.

**3.12.** *Existenztheorem. Wenn ein stark reguläres Modell existiert, dann gibt es eine perfekte Relation.* (Die Voraussetzung ist z.B. dann erfüllt, wenn es eine unerreichbare Kardinalzahl gibt.)

**Definition 4.1.** Die Aussagenfunktion $\varphi(x_1, \ldots, x_n, X_1, \ldots, X_m)$ nennen wir *stark normal*, wenn sie mit einer solchen primitiven Aussagenfunktion $\psi(x_1, \ldots, x_n, X_1, \ldots \ldots, X_m)$ äquivalent ist, in der keine anderen Veränderlichen als $x_1, \ldots, x_n, X_1, \ldots, X_m$ und keine Symbole für spezielle Klassen auftreten. Das Prädikat nennen wir stark normal, wenn es mit einer stark normalen Aussagenfunktion äquivalent ist. Die Operation oder die spezielle Klasse nennen wir stark normal, wenn sie durch eine stark normale Aussagenfunktion definiert ist.

**4.2.** Die Relation $\bar{E}_1$ sei perfekt. Die Relation $\bar{E}_2$ erfülle folgendes:

$$\text{(0)} \qquad \bar{E}_2 = \bar{E}_1 \cap (\mathfrak{W}(\bar{E}_2) \times \mathfrak{D}(\bar{E}_2))$$

$$\text{(1)} \qquad V^1 \in \mathfrak{S}(\bar{E}_2)$$

$$\text{(2)} \qquad (xy)\,[x, y \in \mathfrak{S}(\bar{E}_2) \rightarrow \mathfrak{F}_i^1(xy) \in \mathfrak{S}(\bar{E}_2)] \quad i = 1, \ldots, 8$$

$$\text{(3)} \qquad \mathfrak{S}(\bar{E}_2) \subseteq \mathfrak{D}(\bar{E}_1) \subset \mathfrak{D}(\bar{E}_2)$$

Dann ist $\bar{E}_2$ perfekt und alle stark normalen Operationen, Prädikate und speziellen Klassen sind absolut. Im Modell $(\bar{E}_2)$ gilt das Auswahlaxiom gerade dann, wenn eine Menge $a \in \mathfrak{S}(\bar{E}_2)$ existiert, welche eine Auswahlfunktion in $(\bar{E}_1)$ vorstellt.

**4.6.** Die Relation $\bar{E}$ sei perfekt. Es sei $\mathfrak{m}$ eine unendliche Kardinalzah, und wenn $\Phi(On^*)$ eine Menge ist, dann sei $\mathfrak{m} \leqq \operatorname{card} \Phi(On^*)$. Es sei $\alpha^*$ eine solche Ordnungszahl des Modells $(\bar{E})$, dass $\operatorname{card} \Phi(\alpha^*) \leqq \mathfrak{m}$. Dann existiert eine perfekte Relation $\bar{E}_1 \subseteq \bar{E}$ derart, dass $\operatorname{card} \bar{E}_1 = \mathfrak{m}$, $\operatorname{card} \mathfrak{W}(\bar{E}_1) = \mathfrak{m}$ ist und dass jede Ordnungszahl $\beta^*$ des Modells $(\bar{E})$, die kleiner als $\alpha^*$ (d.h. $\beta^* \in \Phi(\alpha^*)$) ist, auch eine Ordnungszahl des Modells $(\bar{E}_1)$ ist.

**Lemma 4.7.** $\bar{E}_1 \subseteq \bar{E}_2$ seien perfekte Relationen. Wenn $(\bar{E}_2)$ standard ist, dann ist auch $(\bar{E}_1)$ standard.

Im § 5 werden Folgerungen der obenerwähnten Sätze angeführt.

1. Unter der Voraussetzung der Existenz einer unerreichbaren Kardinalzahl $\vartheta$ gilt: Zu jeder $\gamma < \vartheta$ und jeder $\alpha$ von der Mächtigkeit $\aleph_\gamma$ existiert eine perfekte Relation $\bar{E}$ von der Mächtigkeit $\bar{E}_\gamma$, die durch Partialisierung der gewöhnlichen $\in$-Relation $E$ entsteht und deren Ordnungszahlen mindestens nach dem Typ $\alpha$ wohlgeordnet sind, d.h. $On^* \geqq \alpha$.

2. Für jede $\gamma < \vartheta$ existieren $\aleph_{\gamma+1}$ miteinander unisomorphe standarde stark reguläre perfekte Relationen von der Mächtigkeit $\aleph_j$.

3. Unter der Voraussetzung der Existenz zweier unerreichbaren Alephs ist die Existenz des standarden unregulären Modells konsistent.

4. Wenn die Voraussetzung der Existenz einer unerreichbaren Zahl widerspruchsfrei ist, dann ist widerspruchsfrei auch die Voraussetzung, dass innerhalb der Theorie der endlichen Menge ein Modell der Mengenlehre $\Sigma$ konstruiert werden kann. Solche Modelle gibt es dann sogar unabzählbar viele.