Časopis pro pěstování matematiky

Jiří Štulc

O délce křivek a kontinuí

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 90 (1965), No. 4, 458--470

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108648`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 90. (1965), Praha

O DÉLCE KŘIVEK A KONTINUÍ

JIŘÍ ŠTULC, Praha

(Došlo dne 3. října 1964)

V teorii potenciálu je užitečné zavést pojem radiální variace rovinné křivky. Křivkou se rozumí spojité zobrazení kompaktního intervalu do metrického prostoru. V tomto článku budeme zkoumat souvislost této radiální variace s délkou křivky v n-rozměrném Eukleidovském prostoru. (Délkou křivky budeme rozumět variaci příslušného zobrazení.)

K důkazu nejdůležitějších tvrzení budeme potřebovat větu, jež se v literatuře spojuje se jménem S. Banacha. Proto ji zde citujeme:

1. Banachova věta. *Budiž dána spojitá reálná funkce f na intervalu $\langle a, b \rangle$. Definujme funkci N_f takto: Pro každé reálné y bude $N_f(y)$ znamenat počet různých kořenů rovnice:*

$$f(x) = y . \tag{1}$$

Je-li těchto kořenů nekonečně mnoho, položíme $N_f(y) = \infty$. Tuto funkci nazýváme Banachova indikatrix funkce f. Banachova indikatrix je měřitelná funkce a platí:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} N_f(y)\, \mathrm{d}y = \bigvee_a^b f . \tag{2}$$

(Symbol $\bigvee_a^b f$ značí variaci funkce f na intervalu $\langle a, b \rangle$.)

Důkaz. Viz [3] Gl. VIII, § 5.

Nyní můžeme přikročit k vlastním úvahám.

2. Úmluva. Budiž φ křivka v E_n definovaná na intervalu $\langle a, b \rangle$. Symbolem $G(\varphi)$ označíme její graf, tj.:

$$G(\varphi) = \{\varphi(t);\ t \in \langle a, b \rangle\} . \tag{3}$$

3. Definice. Pro každé $\varrho > 0$ označíme symbolem $\Omega_z(\varrho)$ resp. $U_z(\varrho)$ kulovou plochu, resp. uzavřenou kouli o středu z a poloměru ϱ. Pro $\varrho = 0$ definujeme pro každé $z \in E_n$ $\Omega_z(0) = U_z(0) = \{z\}$. Pro $z = 0$ budeme psát $U(\varrho)$ resp. $\Omega(\varrho)$ místo $U_z(\varrho)$ resp. $\Omega_z(\varrho)$.

4. Definice. Budiž φ křivka definovaná na intervalu $\langle a, b\rangle$. Definujme funkci $N_\varphi(\varrho, z)$ proměnné ϱ pro každý bod $z \in E_n$ takto: $N_\varphi(\varrho, z)$ značí počet těch $t \in \langle a, b\rangle$, pro něž je $\varphi(t) \in \Omega_z(\varrho)$.

5. Věta. *Pro každý bod $z \in E_n$ je funkce N_φ měřitelná a platí nerovnost:*

$$\bigvee_a^b \varphi \geqq \int_0^{+\infty} N_\varphi(\varrho, z)\, d\varrho\,. \tag{4}$$

Důkaz. Definujme funkci f na intervalu $\langle a, b\rangle$ takto :

$$f(t) = |\varphi(t) - z|\,. \tag{5}$$

Pak platí:

$$N_\varphi(\varrho, z) = \begin{cases} N_\varphi(\varrho) & \text{pro} \quad \varrho \in \langle 0, +\infty)\,, \\ 0 & \text{pro} \quad \varrho \in (-\infty, 0) \end{cases} \tag{6}$$

a tedy je funkce $N_\varphi(\varrho, z)$ měřitelná a platí

$$\int_0^{+\infty} N_\varphi(\varrho, z)\, d\varrho = \bigvee_a^b f\,. \tag{7}$$

Vztah (4) je tedy ekvivalentní se vztahem

$$\bigvee_a^b \varphi(t) \geqq \bigvee_a^b |\varphi(t) - z|\,. \tag{8}$$

Jelikož pro každou trojici bodů $x, y, z \in E_n$ platí nerovnost

$$|x - y| \geqq \big||x - z| - |y - z|\big|\,, \tag{9}$$

platí i vztah (8) a tedy i vztah (4).

6. Označení. Vzhledem k větě 5 můžeme označit

$$u_\varphi(z) = \int_0^{+\infty} N_\varphi(\varrho, z)\, d\varrho \tag{10}$$

pro každý bod $z \in E_n$. Veličina u_φ se nazývá radiální variací křivky φ v bodě z.

7. Lemma. *Buďtež $z_0, \ldots, z_n \in E_n$ body neležící v jedné nadrovině. Budiž p nadrovina, $p \subset E_n$. Označme symbolem $\varrho(p, z)$ vzdálenost bodu z od nadroviny p. Označme ještě*

$$\varrho_i(p) = \varrho(p, z_i) \quad \text{pro} \quad i = 0, 1, \ldots, n\,; \tag{11}$$

dále označme

$$M(p) = \max_{i=0,\ldots,n} \varrho_i(p)\,. \tag{12}$$

Pak funkce M nabývá na množině všech nadrovin z E_n kladného minima.

Důkaz. 1. Budiž $p \subset E_n$ nadrovina. Pak $M(p) > 0$, neboť body $z_0, \dots, z_n$ neleží v jedné nadrovině.

2. Budiž $U(R)$ tak velká koule, že $z_0 \in U(R), \dots, z_n \in U(R)$. Budiž p taková nadrovina, že

$$p\, U(R) = \emptyset \,. \tag{13}$$

Pak existuje nadrovina p' taková, že

$$M(p) \geqq M(p') \tag{14}$$

a

$$p'\, U(R) \neq \emptyset \,. \tag{15}$$

Skutečně: Stačí vést nadrovinu p' rovnoběžnou s nadrovinou p tak, aby protínala kouli $U(R)$. Tedy zkoumáme-li minimum funkce M, stačí uvažovat pouze ty nadroviny, jež protínají kouli $U(R)$.

3. Každá nadrovina p splňující vztah (15) může být charakterizována svým jistým bodem $\zeta \in U(R)$ a jednotkovým vektorem normály $v = v_1, \dots, v_n$. Měníme-li tedy body ζ v $U(R)$ a vektor v v $\Omega(1)$, dostaneme právě všechny nadroviny splňující vztah (15).

4. Funkce M je jakožto funkce proměnných ζ, v spojitá na kompaktní množině $U(R) \times \Omega(1)$ a tedy na ní nabývá minima, které označíme m. Vzhledem k první části důkazu je $m > 0$ a podle druhé části je

$$m = \min_{p \subset E_n} M(p) \,. \tag{16}$$

8. Lemma. *Budiž dána funkce tří reálných proměnných k, p, l vztahem*

$$f(k, p, l) = 2(l^2 + k^2 + p^2 - \sqrt{[l^4 + 2l^2(k^2 - p^2) + (k^2 + p^2)^2)]} \tag{17}$$

v definičním oboru

$$k \in \langle 0, +\infty), \quad p \in \langle 0, +\infty) \,, \quad l \in \langle 0, +\infty) \,. \tag{18}$$

Pak platí

A. Pro každé $l \in \langle 0, \infty)$ a každé $p \in \langle 0, \infty)$ je funkce f nerostoucí funkcí k na intervalu $\langle 0, +\infty)$.

B. Pro každé $l \in \langle 0, \infty)$ a každé $k \in \langle 0, \infty)$ je funkce f neklesající funkcí p na intervalu $\langle 0, +\infty)$.

Důkaz. Substituujme

$$\kappa = k^2 \,, \quad \pi = p^2 \,, \quad \lambda = l^2 \,, \tag{19}$$

pak

$$f(k, p, l) = g(\kappa, \pi, \lambda) = 2(\lambda + \kappa + \pi - \sqrt{[\lambda^2 + 2\lambda(\kappa - \pi) + (\kappa + \pi)^2)]} \tag{20}$$

pro

$$\kappa \in \langle 0, +\infty), \quad \pi \in \langle 0, +\infty), \quad \lambda \in \langle 0, +\infty). \tag{21}$$

Stačí tedy dokázat tvrzení:

A'. Pro každé $\lambda \in \langle 0, \infty)$ a každé $\pi \in \langle 0, \infty)$ je funkce g nerostoucí funkcí κ na intervalu $\langle 0, +\infty)$.

B'. Pro každé $\lambda \in \langle 0, \infty)$ a každé $\kappa \in \langle 0, \infty)$ je funkce g neklesající funkcí π na intervalu $\langle 0, +\infty)$.

Spočítejme parciální derivace:

$$\frac{\partial}{\partial \kappa} g(\kappa, \pi, \lambda) = 2\left(1 - \frac{\kappa + \pi + \lambda}{\sqrt{[\lambda^2 + 2\lambda(\kappa - \pi) + (\kappa + \pi)^2]}}\right), \tag{22}$$

$$\frac{\partial}{\partial \pi} g(\kappa, \pi, \lambda) = 2\left(1 - \frac{\kappa + \pi - \lambda}{\sqrt{[\lambda^2 + 2\lambda(\kappa - \pi) + (\kappa + \pi)^2]}}\right). \tag{23}$$

Protože na množině (21) platí

$$\frac{\kappa + \pi + \lambda}{\sqrt{[\lambda^2 + 2\lambda(\kappa - \pi) + (\kappa + \pi)^2]}} \geqq \frac{\kappa + \pi + \lambda}{\sqrt{[\lambda^2 + 2\lambda(\kappa + \pi) + (\kappa + \pi)^2]}} = 1;$$

$$\sqrt{[\lambda^2 + 2\lambda(\kappa - \pi) + (\kappa + \pi)^2]} \geqq \sqrt{[\lambda^2 - 2\lambda(\kappa + \pi) + (\kappa + \pi)^2]} = |\kappa + \pi - \lambda|,$$

je na množině (21) $(\partial/\partial\kappa)\, g \leqq 0$ a $(\partial/\partial\pi)\, g \geqq 0$ a tudíž platí A' a B' a tedy i A a B.

9. Lemma. *Budiž $R > 0$. Pak pro každých $n + 1$ bodů $z_0, \ldots, z_n \in E_n$ neležících v jedné nadrovině existuje konstanta $\mathscr{K}$ (závislá na R a na konfiguraci bodů $z_0, \ldots, z_n$) taková, že pro každou dvojici bodů $a, b \in U(R)$ platí*

$$|a - b| \leqq \mathscr{K} \sum_{k=0}^{n} ||b - z_k| - |a - z_k||. \tag{24}$$

Důkaz. Definujme pro $k = 0, 1, \ldots, n$ funkce Δ_k takto:

$$\Delta_k = ||a - z_k| - |b = z_k||. \tag{25}$$

Zaveďme proměnné l, κ_k, π_k takto:

Budiž o nadrovina, podle níž jsou body a, b souměrné. Pak existují body $x_k \in o$, pro něž je $\varrho(o, z_k) = \varrho(x_k, z_k)$ pro $k = 0, 1, \ldots, n$. Budiž S střed úsečky ab. Pak:

$$l = \tfrac{1}{2}|b - a|, \quad \kappa_k = \varrho(S, x_k), \quad \pi_k = \varrho(z_k, x_k). \tag{26}$$

Explicitní závislost Δ_k na l, κ_k, π_k jest dána vztahem:

$$(27) \qquad \Delta_k^2(\kappa_k, \pi_k, l) = 2(l^2 + \kappa_k^2 + \pi_k^2 - \sqrt{[l^4 + l^2(\kappa_k^2 - \pi_k^2) + (\kappa_k^2 + \pi_k^2)^2]} \,.$$

Z geometrického významu funkcí Δ_k je patrné, že je vhodné je definovat pro $l \in \langle 0, \infty)$, $\kappa_k \in \langle 0, \infty)$, $\pi_k \in \langle 0, \infty)$. Měníme-li body a, b libovolně v kruhu $U(R)$, nabývají parametry l resp. κ_k, π_k hodnot z intervalu $\langle 0, R)$ resp. $\langle 0, 2R)$ pro $k > 0, \ldots, n$.

Pro každou dvojici bodů $a, b \in U(R)$ spočítáme hodnoty všech funkcí Δ_k a označíme Δ_{ab} tu, jež je z nich největší. Jelikož jsou funkce Δ_k ve svých definičních oborech nezáporné, stačí dokázat existenci takové konstanty $\mathcal{K}$, že pro každou dvojici bodů $a, b \in U(R)$ platí:

$$(28) \qquad 0 \leqq 2l = |a - b| \leqq \mathcal{K} \, \Delta_{ab} \,.$$

Vztah (28) je ekvivalentní se vztahem

$$(29) \qquad 4l^2 \leqq \mathcal{K}^2 \, \Delta_{ab}^2 \,.$$

Vzhledem k lemmatu 7 nemůže nastat taková konfigurace bodů $z_0, \ldots, z_n$, aby platilo pro všechna $k = 0, \ldots, n$:

$$(30) \qquad \pi_k < m \,,$$

kde m je dáno vztahem (16).

Vzhledem k tomu, že $\pi_k \in \langle 0, 2R)$ a $\kappa_k \in \langle 0, 2R)$ a vzhledem k tomu, že alespoň jedno $\pi_k \geqq m$, platí podle lemmatu 8 pro každé $a, b \in U(R)$:

$$(31) \qquad \Delta_{ab}^2 \geqq 2(l^2 + k^{*2} + p^2 - \sqrt{[l^4 + 2l^2(k^{*2} - p^2) + (k^{*2} + p^2)^2)]} \,,$$

kde $p = m$ a $k^* = 2R$.

Položme

$$(32) \qquad 4R^2 + m^2 = \alpha \,, \quad 4R^2 - m^2 = \beta \,.$$

Tedy pro každé $a, b \in U(R)$ platí:

$$(33) \qquad \Delta_{ab}^2 \geqq 2(l^2 + \alpha - \sqrt{[l^4 + 2l^2\beta + \alpha^2)]} \,.$$

Stačí tedy nalézt konstantu $\mathcal{K}^*$ tak, aby platilo pro $l \in \langle 0, R)$:

$$(34) \qquad 2\mathcal{K}^*(l^2 + \alpha - \sqrt{[l^4 + 2l^2\beta + \alpha^2)]} - 4l^2 \geqq 0 \,.$$

Definujme funkci g takto:

$$(35) \qquad g(l) = \frac{2l^2}{l^2 + \alpha - \sqrt{[l^4 + 2\beta l^2 + \alpha]}} \,.$$

Funkce g je na intervalu $(0, R\rangle$ spojitá a zřejmě platí

$$(36) \qquad \lim_{l \to 0+} g(l) = \frac{2\alpha}{\alpha - \beta} \,.$$

Tedy je funkce g na intervalu $(0, R\rangle$ omezená. Volíme-li $\mathscr{K}^*$ tak, aby

$$\mathscr{K}^* \geqq g(l) \quad \text{pro} \quad l \in (0, R\rangle ,$$

pak zřejmě platí vztah (34) pro všechna $l \in \langle 0, R\rangle$. Tím jest důkaz hotov.

10. Věta. *Budiž $R > 0$. Pak pro každých $n + 1$ bodů $z_0, \ldots, z_n \in U(R)$ neležících v jedné nadrovině existuje konstanta $\mathscr{K}$ závislá na R a na konfiguraci bodů $z_0, \ldots, z_n$ taková, že pro každou křivku φ platí*

$$\bigvee_a^b \varphi \leqq \mathscr{K} \sum_{i=0}^{n} u_\varphi(z_i) , \tag{37}$$

jakmile je

$$G(\varphi) \subset U(R) . \tag{38}$$

Důkaz. Budiž φ křivka na intervalu $\langle a, b\rangle$ a $G(\varphi) \subset U(R)$. Definujme funkci f_k na intervalu $\langle a, b\rangle$ takto:

$$f_k(t) = |\varphi(t) - z_k| \quad \text{pro} \quad k = 0, 1, \ldots, n . \tag{39}$$

Pak pro Banachovu indikatrix N_{f_k} funkce f_k platí:

$$N_{f_k}(x) = N_\varphi(x, z_k) \quad \text{pro} \quad k = 0, 1, \ldots, n . \tag{40}$$

Ze vztahu (40) dostaneme podle Banachovy věty:

$$u_\varphi(z_k) = \int_0^{+\infty} N_\varphi(x, z_k)\, dx = \int_0^{+\infty} N_{f_k}(x)\, dx = \bigvee_a^b f_k . \tag{41}$$

Vzhledem k vztahu (41) je dokazovaný vztah (38) ekvivalentní s nerovností

$$\bigvee_a^b \varphi(t) \leqq \mathscr{K} \sum_{k=0}^{n} \bigvee_a^b |\varphi(t) - z_k| . \tag{42}$$

Budiž D dělení intervalu $\langle a, b\rangle$:

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b . \tag{43}$$

Označme:

$$S(D) = \sum_{i=1}^{m} |\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})| \tag{44}$$

a

$$S_k(D) = \sum_{i=1}^{m} \big||\varphi(t_i) - z_k| - |\varphi(t_{i-1}) - z_k|\big| , \quad k = 0, \ldots, n . \tag{45}$$

Pro každé $t \in \langle a, b \rangle$ je $\varphi(t) \in U(R)$. Zvolíme-li konstantu $\mathscr{K}$ tak, aby vyhovovala tvrzení lemmatu 9, platí pro každou dvojici bodů $t, t^* \in \langle a, b \rangle$

$$(46) \qquad |\varphi(t) - \varphi(t^*)| \leqq \mathscr{K} \sum_{k=0}^{n} \big\| \varphi(t) - z_k| - |\varphi(t^*) - z_k \big\| .$$

Ze vztahů (46), (44) a (45) dostaneme, že pro každé dělení D intervalu $\langle a, b \rangle$ platí nerovnost:

$$(47) \qquad S(D) \leqq \mathscr{K} \sum_{k=0}^{n} S_k(D) .$$

Ze vztahu (47) dostaneme přechodem k supremu přes všechna dělení D intervalu $\langle a, b \rangle$ vztah (42) a tedy platí nerovnost (37), již jsme měli dokázati.

11. Věta. *Buďtež $z_1, \ldots, z_n \in E_n$ body určující jedinou nadrovinu p. Pak pro každou křivku φ, jež neprotíná p, platí: Je-li $\sum_{i=1}^{n} u_\varphi(z_i) < +\infty$, pak také $\bigvee_a^b \varphi < +\infty$.*

Důkaz. Tato věta je důsledkem předcházející věty.

1. Označme $\mathfrak{M}$ množinu všech nadrovin q, jež protínají $G(\varphi)$. Buďtež $t_1, t_2 \in \langle a,b \rangle$ takové body, že $\varphi(t_1) \neq \varphi(t_2)$. Označme $o(t_1, t_2)$ nadrovinu, podle níž jsou body $\varphi(t_1), \varphi(t_2)$ souměrné. Množinu všech těchto nadrovin označme $\mathfrak{N}$. Jelikož je $G(\varphi)$ souvislá množina, protíná každá $o(t_1, t_2)$ množinu $G(\varphi)$ a tedy je $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$. Položme pro každou nadrovinu q

$$(48) \qquad M(q) = \max_{k=1,\ldots,n} \varrho(q, z_k) .$$

Pak

$$(49) \qquad M(q) > 0 \quad \text{pro} \quad q \in \mathfrak{M} .$$

Lze snadno nahlédnout, že M nabývá na množině $\mathfrak{M}$ svého minima. (Srovnej s důkazem lemmatu 7.) Tedy

$$(50) \qquad \min_{q \in \mathfrak{M}} M(q) = m > 0 .$$

Jelikož je $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$, platí

$$(51) \qquad m = \min_{q \in \mathfrak{M}} M(q) \leqq \inf_{p \in \mathfrak{N}} M(p) .$$

2. Nechť symboly Δ_k, Δ_{ab} mají stejný význam jako v lemmatu 9. (k nyní probíhá indexy $1, 2, \ldots, n$). Pak existuje konstanta $\mathscr{K}$ tak, že pro libovolnou dvojici bodů $a, b \in G(\varphi)$ platí

$$(52) \qquad |a - b| \leqq \mathscr{K}^* \sum_{k=1}^{n} \Delta_k .$$

(Srovnej s důkazem lemmatu 9.) Zavedeme-li ve funkcích Δ_k proměnné podle vztahu (26), dostaneme vztah (27). Stačí nalézt tedy $\mathscr{K}^*$ tak, aby platilo (28). Místo tvrzení o vztahu (30), kde m je dáno vztahem (16), použijeme tvrzení o vztahu (30), kde m je dáno vztahem (50) podle první části důkazu.

3. Budiž nyní $D : a = t_0 < \ldots < t_m = b$ libovolné dělení intervalu $\langle a, b\rangle$. Pak platí

$$|\varphi(t_i) - \varphi(t_j)| \leqq \mathscr{K} \sum_{k=1}^{n} \left||\varphi(t_i) - z_k| - |\varphi(t_j) - z_k|\right| \tag{53}$$

pro všechna $i, j = 1, \ldots, n$.

Tedy

$$\sum_{i=1}^{m} |\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})| \leqq \mathscr{K} \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} \left||\varphi(t_i) - z_k| - |\varphi(t_{i-1}) - z_k|\right| . \tag{54}$$

Přechodem k infimu přes všechna dělení D intervalu $\langle a, b\rangle$ dostaneme

$$\bigvee_a^b \varphi(t) \leqq \mathscr{K} \sum_{k=1}^{n} \bigvee_a^b |\varphi(t) - z_k| \tag{55}$$

odtud dostaneme opět jako ve větě 10 vztah

$$\bigvee_a^b \varphi(t) \leqq \mathscr{K} \sum_{k=1}^{n} u_\varphi(z_k) . \tag{56}$$

Tím jest tato věta dokázána.

Nyní se budeme zabývat podobnými problémy vzhledem ke kontinuím. Kontinuem rozumíme souvislou kompaktní množinu.

12. Definice. Pro každou množinu $X \subset E_n$ a pro každé $\varepsilon > 0$ označme symbolem $\Lambda_\varepsilon(X)$ infimum součtů $\sum_i \delta(X_i)$ přes všechny posloupnosti množin $\{X_i\}_i$, kde $X_i \subset X$, $\delta(X_i) < \varepsilon$ pro $i = 1, 2, \ldots$ a $\sum X_i = X$. (Symbolem $\delta(X)$ značíme průměr množiny X.) Budiž $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$. Pak $\Lambda_{\varepsilon_1}(X) \geqq \Lambda_{\varepsilon_2}(X)$ a tudíž existuje $\lim_{\varepsilon \to 0+} \Lambda_\varepsilon(X)$ (buď konečná, nebo nekonečná). Označme ji $\Lambda(X)$. Číslo $\Lambda(X)$ nazýváme délkou množiny X.

13. Věta. *Λ je vnější mírou v smyslu Carathéodoryho.*

Důkaz. Viz [7], Chap. II, § 8.

14. Definice. Budiž K kontinuum. Definujme pro každý bod $z \in E_n$ funkci $N_K(\varrho, z)$ proměnné ϱ takto: Pro každé $\varrho > 0$ je $N_K(\varrho, z)$ počet bodů množiny $K\,\Omega_z(\varrho)$. Je-li $K\,\Omega_z(\varrho)$ nekonečná, pak položíme $N_K(\varrho, z) = +\infty$.

15. Lemma. *Budiž π zobrazení E_n do E_1 definované předpisem*

$$\pi(z) = |z| . \tag{57}$$

Pak toto zobrazení je Lipschitzovské s konstantou 1. *Dále: pro každou množinu $X \subset E_n$ platí*

$$\Lambda(X) \geqq \Lambda[\pi(X)] . \tag{58}$$

Důkaz.

Ad 1: První tvrzení plyne z nerovnosti

$$|x - y| \geqq ||x| - |y|| , \tag{59}$$

platné pro všechny dvojice bodů $x, y \in E_n$.

Ad 2: Z první části plyne, že pro každou množinu $Y \subset E_n$ platí:

$$\delta(Y) \geqq \delta(\pi(Y)) . \tag{60}$$

Odtud je patrno, že pro každé $\varepsilon > 0$ a $X \subset E_n$ je

$$\Lambda_\varepsilon(X) \geqq \Lambda_\varepsilon[\pi(X)] . \tag{61}$$

Z nerovnosti (61) dostaneme přechodem pro $\varepsilon \to 0 +$ dokazovaný vztah (58).

16. Věta. *Pro každé kontinuum $K \subset E_n$ a každý bod $z \in E_n$ je funkce $N_K(\varrho, z)$ měřitelná a platí*

$$\int_0^{+\infty} N_K(\varrho, z) \, d\varrho \leqq \Lambda(K) . \tag{62}$$

Důkaz. Bez újmy obecnosti můžeme předpokládat $z = 0$. Pro zkrácení zápisu pišme $N(\varrho)$ místo $N_K(\varrho, 0)$ a $\Omega(\varrho)$ resp. $U(\varrho)$ místo $\Omega_0(\varrho)$ resp. $U_0(\varrho)$. Budiž R tak velké, aby platilo

$$K \subset U(R) . \tag{63}$$

Pro každé n sestrojme konečné diskunktní dělení D_n kulové plochy $\Omega(R)$ tvořené množinami typu F_σ tak, aby

$$\lambda(D_n) \leqq \frac{1}{n}, \quad \text{kde} \quad \lambda(D_n) = \sup_{I \in D_n} \delta(I) . \tag{64}$$

(Toto lze zřejmě udělat, jak jest patrno zavedeme-li obecné sférické souřadnice.)

Symbolem $\mathscr{D}_n$ označme dělení koule $U(R)$, příslušné dělení D_n, jež dostaneme takto: Budiž $M \in D_n$. Pak sestrojme množinu $\mathfrak{M}_M$ jakožto množinu bodů z $U(R)$, jež lze promítnout z počátku na množinu M. Pak $\mathscr{D}_n = \{\mathfrak{M}_M, M \in D_n\}$. Zřejmě také všechny množiny $\mathfrak{M}_M$ jsou typu F_σ. Označme L_M charakteristickou funkci množiny $\pi(K, \mathfrak{M}_M)$. Pak je L_M měřitelná, neboť množina $\pi(K, \mathfrak{M}_M)$ je opět typu F_σ.

Dále označme:

$$L_n = \sum_{M \in D_e} L_M . \tag{65}$$

Pak je také L_n měřitelná funkce. Pro každé $\varrho > 0$ značí L_n počet těch výsečí $\mathfrak{M} \in D_n$, pro něž je $\Omega(\varrho) . K . \mathfrak{M} \neq \emptyset$. Pro každé přirozené číslo n zřejmě platí:

$$L_n \leqq N . \tag{66}$$

Posloupnost funkcí $\{L_n\}_{n=1}^{+\infty}$ je neklesající. Tedy existuje limita

$$\lim_{n\to\infty} L_n = N^* . \tag{67}$$

Funkce N^* je opět měřitelná. Ze vztahů (66), (67) plyne

$$N^* \leqq N . \tag{68}$$

Zvolme nyní $\varrho > 0$. Budiž q přirozené číslo takové, že

$$q \leqq N(\varrho) . \tag{69}$$

Pak existuje na kouli $\Omega(\varrho)$ q různých bodů $x_1, \ldots, x_q$ z kontinua K. Označme

$$r = \min_{i,j=1,\ldots,q} \varrho(x_i, x_j) \; ; \quad i \neq j . \tag{70}$$

Zvolme n tak, aby $(1/n) < r$. Pak pro dělení D_n platí: Existuje q různých množin $\mathfrak{M}_k \in D_m$, $k = 1, \ldots, q$ tak, že v každé $\mathfrak{M}_k$ leží právě jeden z bodů $x_1, \ldots, x_q$. Tedy platí

$$L_n(\varrho) \geqq q . \tag{71}$$

Tedy je také

$$N^*(\varrho) \geqq q .$$

Protože q bylo libovolné přirozené číslo splňující vztah (69), je

$$N^*(\varrho) \geqq N(\varrho) . \tag{72}$$

Vztahy (72) a (68) dávají

$$N^* = N . \tag{73}$$

Tedy funkce N je měřitelná. Podle lemmatu 15 platí pro $\mathfrak{M} \in D_n$

$$\Lambda(K . \mathfrak{M}) \geqq \Lambda(\pi(K . \mathfrak{M})) = \int_0^{+\infty} L_M(\varrho) \, d\varrho . \tag{74}$$

Ze vztahu (74) dostaneme sečtením přes $\mathfrak{M} \in D_n$

$$\Lambda(K) \geqq \int_0^{\infty} L_n(\varrho) \, d\varrho \tag{75}$$

a limitním přechodem pro $n \to +\infty$

$$\Lambda(K) \geqq \int_0^\infty N(\varrho)\,d\varrho\,, \tag{76}$$

což bylo dokázati.

17. Lemma. *Budiž K kontinuum konečné délky. Pak existuje křivka φ_K na intervalu $\langle 0, 2\Lambda(K)\rangle$ s těmito vlastnostmi*

$$\bigvee_{2\Lambda(K)}^{0} \varphi_K = 2\Lambda(K)\,, \tag{77}$$

$$G(\varphi_K) = K\,, \tag{78}$$

$$N_K(\varrho, z) = \tfrac{1}{2}N_{\varrho K}(\varrho, z) \tag{79}$$

Důkaz. Viz [4], [8].

18. Věta. *Buďtež $z_0, z_1, \ldots, z_n \in E_n$ body neležící v jedné nadrovině. Budiž $R > 0$ takové, že $z_0, \ldots, z_n \in U(R)$. Pak existuje konstanta K závislá na konfiguraci bodů $z_0, \ldots, z_n$ a na R taková, že pro každé kontinuum K platí*

$$\Lambda(K) \leqq \mathscr{K} \sum_{i=0}^{n} \int_0^{+\infty} N_K(\varrho, z_i)\,d\varrho\,, \tag{80}$$

jakmile je

$$K \subset U(R)\,. \tag{81}$$

Důkaz plyne triviálním způsobem z věty 10 a lemmatu 17. Zřejmým způsobem dostaneme i větu 19 pomocí věty 10 a lemmatu 17.

19. Věta. *Buďtež $z_1, \ldots, z_n \in E_n$ body určující jedinou nadrovinu. Pak pro každé kontinuum K diskunktní s touto nadrovinou platí: Je-li $\sum_{i=1}^{n} \int N_K(\varrho, z_i)\,d\varrho < +\infty$, pak také $\Lambda(K) < +\infty$.*

Literatura

[1] *J. Král:* On cyclic and radial variations of a plane path. Comment. Math. Univ. Carol. *4*, 1 (1963).

[2] *J. Král:* Poznámka o lineární míře a délce cesty v metrickém prostoru. Acta Univ. Carol.-Math. et Phys. *1*, (1963); 1—10.

[3] *I. P. Natanson:* Těrija funkcij věščestvennogo pěreměnnogo. Moskva 1955.

[4] *M. N. A. Newmann:* Path length. Proceedings London Math. Soc. (3), *2*, (1952); 495—468.

[5] *G. J. Perevalov:* Kritěrij dlja koněčnosti linějnoj měry ploskich kontinuumov. Sib. Mat. Ž. *4* (1962); 573—581.

[6] *G. J. Perevalov:* O měre množestv ležaščich na ploskich kontinuumach Sib. Mat. Ž. *4* (1962); 573—581.
[7] *S. Saks:* Theory of the integral. Monografije mathematyczne Tom VII.
[8] *T. Ważewski:* Kontinua prostowalne w związku z funkcijami i odvzrorovanijami absolutnie ciąglemi. Ann. Soc. Polon. Math., *3*, Suppl. (1927); 9—49.

Резюме

О ДЛИНЕ КРИВЫХ И КОНТИНУУМОВ

ИРЖИ ШТУЛЬЦ (Jiří Štulc), Прага

Если φ — путь (= непрерывное отображение в E_n, n-мерное евклидово пространство), определенный на отрезке $\langle a, b\rangle$, то положим $G(\varphi) = \varphi(\langle a, b\rangle)$; для $\varrho > 0$ и $z \in E_n$ обозначим через $N_\varphi(\varrho, z)$ число всех $t \in \langle a, b\rangle$, для которых $|\varphi(t) - z| = \varrho$ $(0 \leqq N_\varphi(\varrho, z) \leqq +\infty)$. Так как $N_\varphi(\varrho, z)$ является измеримой функцией переменного ϱ, то можно положить по определению

$$u_\varphi(z) \leqq \int_0^{+\infty} N_\varphi(\varrho, z)\, \mathrm{d}\varrho\,.$$

Для каждого $z \in E_n$ справедливо неравенство

$$u_\varphi(z) \leqq V_\varphi\,,$$

где V_φ обозначает длину пути φ.

Теорема. *Пусть* $R > 0$; $U(R) = \{z;\, z \in E_n,\, |z| \leqq R\}$. *Пусть точки* $z_0, \ldots, z_n \in U(R)$ *не помещены на единственной гиперплоскости. Тогда существует постоянная* $\mathscr{K} > 0$ *такая, что для каждого пути* φ *имеет место импликация:*

$$G(\varphi) \subset U(R) \Rightarrow V_\varphi \leqq \mathscr{K} \sum_{i=0}^{n} u_\varphi(z_i)\,.$$

Теорема. *Предположим, что существует единственная гиперплоскость, содержащая точки* $z_1, \ldots, z_n \in E_n$. *Тогда для каждого пути* φ *имеет место импликация*

$$(G(\varphi)\, p = \emptyset \;\&\; \sum_{i=1}^{n} u_\varphi(z_i) < +\infty) \Rightarrow V_\varphi < +\infty\,.$$

Аналогичные результаты доказаны для континуумов.

Summary

ON LENGTH OF PATHS AND CONTINUA

JIŘÍ ŠTULC, Praha

If φ is a path (i.e. a continuous mapping into E_n, the Euclidean n-space) defined on $\langle a, b\rangle$ we put $G(\varphi) = \varphi(\langle a, b\rangle)$; given $\varrho > 0$ and $z \in E_n$ we denote $N_\varphi(\varrho, z)$ the number of all $t \in \langle a, b\rangle$ with $|\varphi(t) - z| = \varrho$ $(0 \leqq N_\varphi(\varrho, z) \leqq +\infty)$. As $N_\varphi(\varrho, z)$ is a measurable function of the variable ϱ we are justified to define

$$u_\varphi(z) = \int_0^{+\infty} N_\varphi(\varrho, z)\, d\varrho\,.$$

Then, for every $z \in E_n$,

$$u_\varphi(z) \leqq V_\varphi\,,$$

where V_φ stands for the length of φ.

Theorem. *Let $R > 0$, $U(R) = \{z;\ z \in E_n,\ |z| \leqq R\}$ and suppose that $z_0, \ldots, z_n \in U(R)$ are not situated on a single hyperplane. Then there is a $K > 0$ such that, for every path φ,*

$$G(\varphi) \subset U(R) \Rightarrow V_\varphi \leqq \mathscr{K} \sum_{i=0}^{n} u_\varphi(z_i)\,.$$

Theorem. *Suppose that there is a unique hyperplane containing $z_1, \ldots, z_n \in E_n$. Then, for every path φ,*

$$\left(G(\varphi)\, p = \emptyset\ \&\ \sum_{i=1}^{n} u_\varphi(z_i) < +\infty\right) \Rightarrow V_\varphi < +\infty\,.$$

Similar results concerning continua are proved.