Vlastimil Pták

Об одном методе приближенного решения линейных уравнений в пространстве Банаха

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 83 (1958), No. 4, 389--398

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108635`

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY

Vydává Matematický ústav ČSAV, Praha

SVAZEK 83 * PRAHA, 25. XI. 1958 * ČÍSLO 4

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ БАНАХА

ВЛАСТИМИЛ ПТАК (Vlastimil Pták), Прага

(Поступило в редакцию 27/VII 1956 г.) DT: 517.9 513.81

Пусть в пространстве Банаха X дан оператор H. Далее пусть дано конечномерное подпространство $\tilde{X} \subset X$ и проектор P пространства X на $\tilde{X}$. Если на $\tilde{X}$ существует оператор, обратный к оператору $E - PH$, то существуют операторы, обратные к операторам $E - PH$, $E - HP$, $E - PHP$ на всем пространстве X. При некоторых условиях тогда можно решение уравнения $(E - H)\, x = y$ апроксимировать решением уравнения $(E - PHP)\, \tilde{x} = y$, а также дать оценку погрешности $|x - \tilde{x}|$.

В работе автора [2], примыкающей к работе [1] Л. В. Канторовича, были намечены некоторые результаты, касающиеся использования методов функционального анализа для оценки погрешности при приближенном решении интегральных уравнений. Основная идея состояла в использовании проекций на конечномерные пространства; эта идея получает дальнейшее развитие в настоящей работе. Разработанный метод является более эффективным, чем метод, описанный в [2].

Обозначения. На протяжении всей статьи через X будет обозначено данное пространство Банаха (т. е. полное нормированное линейное пространство). Под оператором (на пространстве X) мы понимаем отображение пространства X в X, удовлетворяющее следующим двум условиям:

1. Если λ_1, λ_2 — действительные (соотв. комплексные) числа и если x_1, x_2 — элементы X, то $A(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 A x_1 + \lambda_2 A x_2$.

2. Существует число $\alpha > 0$ так, что для любого $x \in X$ справедливо неравенство $|Ax| \leqq \alpha |x|$. (Условие 2 равносильно требованию, чтобы отображение A было непрерывным.) Нормой оператора A мы назовем число

$$|A| = \sup_{|x| \leqq 1} |Ax| .$$

В множество $\mathbf{E}(X)$ всех операторов на пространстве X можно очевидным образом ввести операции $\alpha A, A + B$, AB (α — действительное (соотв. комплексное) число, A, $B \in \mathbf{E}(X)$). Тогда множество $\mathbf{E}(X)$ является нормированным линейным пространством; из полноты пространства X следует, что и пространство $\mathbf{E}(X)$ является полным. Кроме того $\mathbf{E}(X)$ представляет собой (в нетривиальных случаях некоммутативное) кольцо с единичным элементом E (тождественный оператор).

Если далее $A \in \mathbf{E}(X)$, то пусть $\mathbf{R}(A)$ — множество всех Ax, где $x \in X$; пусть $\mathbf{N}(A)$ — множество всех $x \in X$, для которых $Ax = 0$.

Если A, $B \in \mathbf{E}(X)$, $AB = E$, то мы скажем, что оператор B (соотв. A) является правым (соотв. левым) обратным оператором к оператору A (соотв. B). Если для оператора A существует такой оператор B, что $AB = BA = E$, то мы пишем $B = A^{-1}$ и говорим, что B есть оператор, обратный к A (или что существует $A^{-1} = B$ и т. п.). Если $AB = E = CA$, то $B = CAB = C = A^{-1}$; следовательно оператор A имеет не более одного обратного оператора. Если оператор A отображает X на X просто (т. е. если $\mathbf{R}(A) = X$, $\mathbf{N}(A) = 0$), то по известной теореме Банаха обратное отображение также непрерывно, так что оператор A имеет обратный оператор. Пространство всех линейных функционалов, определенных на X, обозначим через X'.

1. Существование обратного оператора

В этом параграфе будут доказаны две теоремы, которые позволяют по поведению операторов определенного типа на каком-либо подпространстве судить о существовании обратного оператора на всем пространстве. Эти теоремы образуют абстрактное ядро вычислительного алгорифма, который будет в дальнейшем описан.

(1,1) Теорема. *Пусть $\tilde{X}$ — замкнутое подпространство; пусть P, $H \in \mathbf{E}(X)$. Предположим, что имеют место следующие соотношения:*

1° $\mathbf{R}(P) \subset \tilde{X}$,

2° $\mathbf{R}(E - PH) \supset \tilde{X}$,

3° $\mathbf{N}(E - PH) \cap \tilde{X} = \{0\}$.

Тогда на пространстве $\tilde{X}$ существует оператор, обратный к оператору $E - PH$.

Доказательство. Согласно 1° будет $(E - PH)\tilde{x} \in \tilde{X}$ для любого $\tilde{x} \in \tilde{X}$. Если, наоборот, дано $\tilde{y} \in \tilde{X}$, то согласно 2° существует $x \in X$ так, что $x - PHx = \tilde{y}$. Но так как согласно 1° $PHx \in \tilde{X}$, будет и $x \in \tilde{X}$; мы видим, что $E - PH$ отображает $\tilde{X}$ на $\tilde{X}$. Согласно 3° отображение $E - PH$

является простым на $\tilde{X}$. Итак, к оператору $E - PH$ на пространстве $\tilde{X}$ существует обратный оператор.

(1,2) Теорема. (*Условия как и в предыдущей теореме.*) *Пусть W — оператор, обратный к оператору $E - PH$ на пространстве $\tilde{X}$. Для любого $x \in X$ положим $Vx = W(Px)$. Тогда будет $V \in \mathbf{E}(X)$; для операторов $E - PH$, $E - HP$ существуют (на всем X) обратные операторы и имеет место $(E - PH)^{-1} = E + VH$, $(E - HP)^{-1} = E + HV$.*

Более того, если $P^2 = P$, $\tilde{X} = \mathbf{R}(P)$, то и оператор $E - PHP$ обладает обратным оператором и $(E - PHP)^{-1} = E + VHP = E + V - P$.

Доказательство. Так как $\mathbf{R}(P) \subset \tilde{X}$ и так как для любого $\tilde{x} \in \tilde{X}$ имеет место $W(E - PH)\,\tilde{x} = (E - PH)\,W\tilde{x} = \tilde{x}$, то можно написать

$$W(E - PH)\,P = (E - PH)\,WP = P$$

или $V - VHP = V - PHV = P$.

Отсюда следует $VH - VHPH - PH = VH - PHVH - PH = 0$ (соотв. $HV - HVHP - HP = HV - HPHV - HP = 0$) и, следовательно,

$$(E + VH)(E - PH) = E + VH - PH - VHPH = E\,,$$
$$(E - PH)(E + VH) = E + VH - PH - PHVH = E$$

(соотв.

$$(E + HV)(E - HP) = E + HV - HP - HVHP = E\,,$$
$$(E - HP)(E + HV) = E + HV - HP - HPHV = E)\,.$$

Пусть теперь $P^2 = P$, $\tilde{X} = \mathbf{R}(P)$. Тогда, очевидно, $PV = V$ и, следовательно,

$$\begin{aligned}(E + VHP)(E - PHP) &= E + VHP - PHP - VHPHP = \\ &= E + (V - P - VHP)\,HP = E\,,\\ (E - PHP)(E + VHP) &= E + VHP - PHP - PHPVHP = \\ &= E + (V - P - PHV)\,HP = E\,,\end{aligned}$$

так что, действительно, $E + VHP = (E - PHP)^{-1}$. Но так как $VHP = V - P$, мы получаем $E + VHP = E + V - P$.

Замечание. Соотношения $x_1 - PHx_1 = y$, $x_2 - HPx_2 = y$, $x_3 - PHPx_3 = y$ имеют, следовательно, при соответствующих условиях тот смысл, что

$$\begin{aligned}&x_1 = y + z_1\,, &&\text{где } z_1 \in \tilde{X},\ (E - PH)\,z_1 = PHy\,,\\ &x_2 = y + Hz_2\,, &&\text{где } z_2 \in \tilde{X},\ (E - PH)\,z_2 = Py\,,\\ &x_3 = y - Py + z_2.\end{aligned}$$

Обратимся теперь к особенно важному случаю, когда подпространство $\mathbf{R}(P)$ конечномерно.

(1,3) Теорема. *Пусть* $H \in \mathbf{E}(X)$, $P \in \mathbf{E}(X)$. *Пусть* $\mathbf{R}(P)$ *конечномерно. Пусть* $e_1, \ldots, e_n$ — *базис пространства* $\tilde{X} = \mathbf{R}(P)$. *Существуют* $f_1, \ldots$ $\ldots, f_n \in X'$ *так, что* $Px = \sum_1^n \langle x, f_i \rangle e_i$ *для любого* $x \in X$. *Пусть* $x = \sum_1^n \xi_i e_i$, $y = \sum_1^n \eta_i e_i$. *Тогда будет* $x - PHx = y$ *тогда и только тогда, если*

$$\xi_i - \sum_{k=1}^n h_{ik}\xi_k = \eta_i \quad \text{для} \quad i = 1, 2, \ldots, n\,, \tag{1}$$

где $h_{ik} = \langle He_k, f_i \rangle$. *Условия теоремы* (1,1) *выполняются тогда и только тогда, если матрица чисел* $\delta_{ik} - h_{ik}$ *регулярна. Соотношение* $P^2 = P$ *справедливо тогда и только тогда, если* $\langle e_i, f_j \rangle = \delta_{ij}$ *для* $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Доказательство. Имеем $Hx = \sum_{k=1}^n \xi_k He_k$, $PHx = \sum_{k=1}^n \xi_k PHe_k =$ $= \sum_{k=1}^n \xi_k \sum_{i=1}^n \langle He_k, f_i \rangle e_i = \sum_{i=1}^n (\sum_{k=1}^n h_{ik}\xi_k)\, e_i$. Итак, $x - PHx = y$, тогда и только тогда, если справедливо (1). Если выполняются условия теоремы (1,1), то оператор $E - PH$ обладает на пространстве $\tilde{X}$ обратным оператором и, следовательно, система (1) имеет всегда решение; значит матрица $(\delta_{ik} - h_{ik})$ регулярна. Наоборот, если эта матрица регулярна, то, очевидно, выполняются условия теоремы (1,1). (Пространство $\tilde{X}$ замкнуто, поскольку оно конечномерно.) Эквивалентность соотношений $P^2 = P$ и $\langle e_i, f_k \rangle = \delta_{ik}$ очевидна.

(1,4) Теорема. *(Сохраняются обозначения предыдущей теоремы.) Пусть матрица* $(\delta_{ik} - h_{ik})$ *регулярна. Тогда существуют операторы, обратные к операторам* $E - PH$, $E - HP$. *Если* $x - PHx = y$ *(соотв.* $x - HPx =$ $= y$*), то* $x = y + z$ *(соотв.* $x = y + H\tilde{z}$*), причем* $z = \sum_i \zeta_i e_i$, $\tilde{z} = \sum_i \tilde{\zeta}_i e_i$, *где*

$$\zeta_i - \sum_k h_{ik}\zeta_k = \langle Hy, f_i \rangle\,, \quad \tilde{\zeta}_i - \sum_k h_{ik}\tilde{\zeta}_k = \langle y, f_i \rangle \quad (i = 1, 2, \ldots, n)\,.$$

Если кроме того $P^2 = P$, *то существует также оператор, обратный к оператору* $E - PHP$, *и решением уравнения* $x - PHPx = y$ *будет элемент* $x = y - Py + \tilde{z}$.

Доказательство: Следует непосредственно из теоремы (1,2), замечания к последней и из теоремы (1,3).

Замечание. Теорема (1,4) не только позволяет доказать существование оператора, обратного к $E - H_0$, где H_0 — какой-либо из операторов PH, HP, PHP, но дает и конкретное предписание, при помощи которого можно уравнение $x - H_0x = y$ действительно решить.

2. Аппроксимация оператора

Поставим себе следующую задачу: Пусть оператор H_0 является аппроксимацией оператора H; пусть существует $(E - H_0)^{-1}$. Решается вопрос о существовании оператора $(E - H)^{-1}$, далее мы ищем приближенное решение уравнения $x - Hx = y$, а также оценку погрешности.

(2,1) *Пусть* $A \in \mathbf{E}(X)$, $|A| < 1$. *Тогда существует* $(E - A)^{-1}$.

Доказательство. Из полноты пространства $\mathbf{E}(X)$ легко вытекает сходимость ряда $E + A + A^2 + \ldots$. Для его суммы V, очевидно, справедливо равенство

$$(E - A) V = V(E - A) = E .$$

(2,2) *Пусть* $A, B \in \mathbf{E}(X)$, $AB = C$; *пусть существует* C^{-1}. *Тогда оператор* A *обладает правым обратным, а оператор* B *обладает левым обратным оператором. Если, более того, существует* A^{-1} (*соотв.* B^{-1}), *то существует и* B^{-1} (*соотв.* A^{-1}).

Доказательство. Из соотношений $ABC^{-1} = C^{-1}AB = E$ следует, что A (соотв. B) имеет правый (соотв. левый) обратный оператор. Если существует, напр., A^{-1}, то $BC^{-1}A = A^{-1}ABC^{-1}A = A^{-1}CC^{-1}A = E$, так что B также имеет правый обратный оператор.

Обозначения. Пусть $H, H_0 \in \mathbf{E}(X)$; пусть существует $V_0 = (E - H_0)^{-1}$. Для любого целого $m \geqq 0$ положим

$$G_m = \sum_{i=0}^{m-1} H^i \quad (\text{таким образом } G_0 = 0) ,$$

$$V_m = G_m + V_0 H^m ,$$

$$W_m = G_m + H^m V_0 \quad (\text{таким образом } W_0 = V_0) ,$$

$$M_{m,1} = V_0(H - H_0) H^m , \qquad M_{m,2} = H^m V_0(H - H_0) ,$$
$$M_{m,3} = (H - H_0) V_0 H^m , \qquad M_{m,4} = H^m(H - H_0) V_0 ,$$
$$M_{m,5} = (H_0 - H) G_m , \qquad M_{m,6} = G_m(H_0 - H) .$$

(2,3) *Пусть* m — *целое неотрицательное число. Тогда*

$$M_{m,1} = E - V_m(E - H) , \qquad M_{m,2} = E - W_m(E - H) ,$$
$$M_{m,3} = E - (E - H) V_m , \qquad M_{m,4} = E - (E - H) W_m ,$$
$$M_{m,5} = E - (E - H_0) V_m , \qquad M_{m,6} = E - W_m(E - H_0) .$$

Доказательство. Из очевидных соотношений $G_m(E - H) = E - H^m$, $V_0(E - H_0) = E$ следует $E - V_m(E - H) = E - (E - H^m) -$
$- V_0(H^m - H^{m+1}) = (E - V_0(E - H)) H^m = V_0((E - H_0) - (E - H)) H^m =$
$= V_0(H - H_0) H^m = M_{m,1}$;
аналогично доказываются равенства для $M_{m,2}$, $M_{m,3}$, $M_{m,4}$. Далее имеем

$$E - (E - H_0) V_m = E - (E - H_0) G_m - H^m = (E - H) G_m - (E - H_0) G_m = (H_0 - H) G_m = M_{m,5} ;$$

аналогично докажем соотношение для $M_{m,6}$.

(2,4) Теорема. *Пусть m — целое неотрицательное число. Если $|M_{m,1}| < 1$ или $|M_{m,2}| < 1$ (соотв. $|M_{m,3}| < 1$ или $|M_{m,4}| < 1$), то оператор $E - H$ обладает левым (соотв. правым) обратным оператором. Для существования оператора, обратного к $E - H$, достаточно, чтобы соотношение $|M_{m,i}| < 1$ выполнялось для обеих значений i какой-либо из следующих пар: (1,5), (3,5), (2,6), (4,6).*

Доказательство. Пусть, напр., $|M_{m,1}| < 1$. Из (2,1) и (2,3) следует, что оператор $V_m(E - H)$ обладает обратным оператором. Согласно (2,2) оператор $E - H$ обладает левым обратным оператором. Если, кроме того, $|M_{m,5}| < 1$, то существует оператор, обратный к $(E - H_0) V_m$, и согласно (2,2) существуют также операторы, обратные к операторам V_m и $E - H$. Остальные случаи исследуются аналогично.

Замечание. Если норма $|H - H_0|$ достаточно мала, то оператор V_m приблизительно равен $(E - H)^{-1}$, так что элемент $V_m y$ является приближенным решением уравнения $x - Hx = y$. Более подробные сведения об этом дает теорема (2,5). Обратим еще внимание на то, что элемент $\tilde{x} = V_0 y$ является решением уравнения $\tilde{x} - H_0\tilde{x} = y$.

(2,5) Теорема. *Пусть m — целое неотрицательное число; пусть элементы $x, y \in X$ удовлетворяют соотношению $x - Hx = y$. Положим $v = V_m y$. Тогда имеет место*

$$x - v = M_{m,1}x\,. \tag{3}$$

Если в частности $\alpha = |M_{m,1}| < 1$, то

$$|x - v| \leqq (1 - \alpha)^{-1}\,|M_{m,1}v|\,. \tag{4}$$

Доказательство. Согласно (2,3) $M_{m,1}x = x - V_m(E - H)\,x = x - v$ и, следовательно,

$$|x - v| \leqq |M_{m,1}|\,|x - v| + |M_{m,1}v|\,.$$

(2,6) Теорема. *Пусть $H, P \in \mathbf{E}(X)$, $P^2 = P$; положим $\tilde{X} = \mathbf{R}(P)$. Пусть m — целое неотрицательное число. Предположим, что $E - PH$ обладает на $\tilde{X}$ обратным оператором W и положим $WP = V$,*

$$M = (E + VH)(E - P)\,H^{m+1}\,, \quad N = G_m + (E + VH)\,H^m\,,$$
$$N^* = G_m + (E - P + V)\,H^m\,.$$

Пусть $x, y \in X$, $x - Hx = y$; пусть $v = Ny$, $v^* = N^*y$. Если $|M| = \alpha < 1$, то

$$|x - v| \leqq (1 - \alpha)^{-1}\,|Mv|\,, \tag{5}$$

$$|x - v^*| \leqq (1 - \alpha)^{-1}(|Mv^*| + |VH(E - P)\,H^m y|)\,. \tag{6}$$

Доказательство. Положим $H_0 = PH$, $H_0^* = PHP$. По теореме (1,2) имеем $(E - H_0)^{-1} = E + VH$, $(E - H_0^*)^{-1} = E - P + V = E + VHP$. Соотношение (5) тождественно соотношению (4); согласно (3) имеем $x - v = Mx$. Далее, $v - v^* = ((E + VH)\,H^m - (E + VHP)\,H^m)\,y =$

$= VH(E - P)\,H^m y$ и, следовательно, $x - v^* = x - v + v - v^* = Mx + VH(E - P)\,H^m y = M(x - v^*) + Mv^* + VH(E - P)\,H^m y$. Отсюда легко вытекает (6).

Замечание. Если положить $M^* = (E - P + V)(H - PHP)\,H^m$, то согласно (4) мы, конечно, получим непосредственно

$$|x - v^*| \leqq (1 - \alpha^*)^{-1}\,|M^* v^*| \tag{7}$$

(если только $\alpha^* = |M^*| < 1$). Оценку (6) мы вывели потому, что может оказаться более легким произвести оценку нормы $|M|$, чем нормы $|M^*|$. На первый взгляд оценка (5) представляется более выгондой, чем оценка (6); не следует, однако, забывать, что элемент v должен быть приближенным решением уравнения $x - Hx = y$ (y дано, x нужно найти) и что для вычисления элемента v дам необходим элемент $H^{m+1}y$, без которого мы обходимся при вычислении элемента v^*. Если, напр., $m = 0$, то получаем $v^* = y_1 + y_2$, где $y_1 = y - Py$, $y_2 = Vy$ (следовательно $y_2 - PHy_2 = Py$),

$$|x - v^*| \leqq (1 - \alpha)^{-1}(|Mv^*| + |VHy_1|)\,. \tag{8}$$

3. Расстояние оператора от подпространства

Пусть дано подпространство $\tilde{X}$ пространства X и оператор $H \in \mathbf{E}(X)$. Тогда расстоянием оператора H от подпространства $\tilde{X}$ мы назовем число

$$\varrho(H, \tilde{X}) = \sup_{|x| \leqq 1} \inf_{\tilde{x} \in \tilde{X}} |Hx - \tilde{x}|\,.$$

Очевидно, всегда имеет место $\varrho(H, \tilde{X}) \leqq |H|$. Значение этого понятия для наших оценок будет описано в следующих леммах.

(3,1) *Пусть A, B, $P \in \mathbf{E}(X)$, пусть $P^2 = P$. Положим $\tilde{X} = \mathbf{R}(P)$. Тогда*

$$\varrho(A, \tilde{X}) \leqq |(E - P)\,A|\,, \tag{1}$$

$$|B(E - P)\,A| \leqq |B(E - P)|\,\varrho(A, \tilde{X})\,. \tag{2}$$

Доказательство. Пусть $x \in X$. Так как $PAx \in \tilde{X}$, то

$$\inf_{\tilde{x} \in \tilde{X}} |Ax - \tilde{x}| \leqq |(E - P)\,Ax|\,. \tag{3}$$

Так как для любого $\tilde{x} \in \tilde{X}$ имеет место $B(E - P)\,Ax = B(E - P)(Ax - \tilde{x})$, получаем

$$|B(E - P)\,Ax| \leqq |B(E - P)| \inf_{\tilde{x} \in \tilde{X}} |Ax - \tilde{x}|\,. \tag{4}$$

Если теперь образовать верхнюю грань для всех $x \in X$, $|x| \leqq 1$ в обеих частях неравенства (3) (соотв. (4)), то получим оценку (1) (соотв. (2)).

(3,2) *Пусть H, $P \in \mathbf{E}(X)$, пусть $P^2 = P$ и пусть m — натуральное число. Если обозначить $\tilde{X} = \mathbf{R}(P)$, то*

$$\varrho(H^m, \tilde{X}) \leqq |(E - P)\, H^m| \leqq |E - P|\; \varrho(H^m, \tilde{X})\,.$$

Доказательство следует непосредственно из предыдущей теоремы для $A = H^m, B = E$.

Рассматривая оценки (5) и (6), выведенные в теореме (2,6), мы видим, что нам понадобится оценка нормы оператора $M = (E + VH)(E - P)\,.\,H^{m+1}$. Можно произвести отдельно оценку нормы оператора $E + VH$ и оператора $H^{m+1} - PH^{m+1}$; тогда их произведение будет оценкой для нормы $|M|$. Однако справедлива и следующая оценка:

$$|M| \leqq |E - V(E - H)|\; \varrho(H^{m+1}, \tilde{X})\;;$$

в этом нетрудно убедиться, положив в неравенстве (2) теоремы (3,1) $B = E + VH$, $A = H^{m+1}$ и приняв во внимание, что из соотношения $V - VHP = P$ следует равенство $(E + VH)(E - P) = E - V(E - H)$. Оценки, использующие числа $\varrho(H^m, \tilde{X})$, могут быть в некоторых случаях более выгодными, чем оценки, использующие числа $|(E - P)\, H^m|$. Этими оценками мы будем заниматься в дальнейшей работе. Точно так же вопрос, существует-ли для оператора $E - H$, обладающего обратным оператором, пригодная аппроксимация, имеющая в свою очередь обратный оператор, будет предметом одного из последующих сообщений.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Л. В. Канторович:* Функциональный анализ и прикладная математика, УМН *3* (1948), выпуск 6 (28), 89—185.

[2] *Vlastimil Pták*: Odhad chyby při přibližném řešení integrálních rovnic, Čas. pěst. mat. *80* (1955), 427—447.

Výtah

O PŘIBLIŽNÉM ŘEŠENÍ LINEÁRNÍCH ROVNIC V BANACHOVĚ PROSTORU

VLASTIMIL PTÁK, Praha

(Došlo dne 27. července 1956)

V článku se používá metod funkcionální analysy ke studiu přibližných řešení lineárních rovnic v Banachově prostoru. Hlavní myšlenkou je použití projekcí na konečně dimensionální podprostory.

Budiž X Banachův (tj. úplný normovaný lineární) prostor. Buď $\tilde{X}$ uzavřený podprostor X. Banachova algebra všech omezených lineárních operátorů v X budiž označena $\mathbf{E}(X)$. Je-li $A \in \mathbf{E}(X)$, označíme $\mathbf{N}(A)$ jeho jádro a $\mathbf{R}(A)$ množinu všech Ax kde $x \in X$. Dokazuje se nejprve následující věta:

Nechť $P, H \in \mathbf{E}(X)$. *Nechť*

1° $\mathbf{R}(P) \subset \tilde{X}$,

2° $\mathbf{R}(E - PH) \supset \tilde{X}$,

3° $\mathbf{N}(E - PH) \cap \tilde{X} = \{0\}$.

Potom $E - PH$, *uvažován jako operátor na* $\tilde{X}$, *má inversní operátor* $W \in \mathbf{E}(\tilde{X})$. *Označme* $V = WP$, *takže* $V \in \mathbf{E}(X)$. *Potom operátory* $E - PH$ *a* $E - HP$ *mají inversní a platí*

$$(E - PH)^{-1} = E + VH , \quad (E - HP)^{-1} = E + HV .$$

Jestliže dále $P^2 = P$ *a* $\tilde{X} = \mathbf{R}(P)$, *má také operátor* $E - PHP$ *inversní operátor a platí*

$$(E - PHP)^{-1} = E + VHP = E + V - P .$$

Má-li se tedy řešit například $(E - PH)\,x = y$, najdeme bod $\tilde{x} \in \tilde{X}$ tak, že $(E - PH)\,\tilde{x} = PHy$ a položíme $x = y + \tilde{x}$. Podobně, vztah $(E - HP)\,x_2 = y$ je ekvivalentní vztahu $x_2 = y + Hz_2$, kde $z_2 \in \tilde{X}$, $(E - PH)\,z_2 = Py$. Jestliže dále $P^2 = P$ a $\tilde{X} = \mathbf{R}(P)$, vztah $(E - PHP)\,x_3 = y$ je ekvivalentní vztahu $x_3 = y - Py + z_2$.

Tyto výsledky tvoří algebraickou basi dalších vyšetřování. Nechť nyní P je projekce na konečně dimensionální podprostor $\tilde{X}$. Dá se očekávati, že, bude-li $\tilde{X}$ vhodně volen, operátor $E - PHP$ bude aproximovati operátor $E - H$. Studium $E - PH$ na $\tilde{X}$ se potom redukuje na studium konečné matice. Dejme tomu, že tato matice je regulární; máme potom existenci inversního operátoru $(E - PHP)^{-1}$. Stupeň aproximace závisí na „vzdálenosti H od $\tilde{X}$“, která je definována jako

$$\varrho(H, \tilde{X}) = \sup_{|x| \leq 1} \inf_{\tilde{x} \in \tilde{X}} |Hx - \tilde{x}| .$$

Zřejmě $\varrho(H, \tilde{X}) \leq |H - PH|$. Je-li toto číslo dostatečně malé, můžeme dokázati existenci inversního operátoru k $E - H$. Řešení rovnice $(E - H)\,x = y$ může býti potom aproximováno řešením $(E - PHP)\,\tilde{x} = y$ a může být podán odhad pro $|x - \tilde{x}|$.

Summary

ON APPROXIMATE SOLUTIONS OF LINEAR EQUATIONS IN BANACH SPACES

VLASTIMIL PTÁK, Praha

(Received July 27, 1956)

In the present paper, we attempt to use methods of Functional Analysis to the study of approximate solutions of Linear Equations in Banach space. The main idea is the use of projections on finite dimensional subspaces.

Let X be a Banach (i. e. a complete normed) space. Let $\tilde{X}$ be a closed subspace of X. The Banach algebra of all bounded linear operators on X will be denoted by $\mathbf{E}(X)$. The range and kernel of an operator $A \in \mathbf{E}(X)$ will be denoted by $\mathbf{R}(A)$ and $\mathbf{N}(A)$.

We prove the following theorem:

Let $P, H \in \mathbf{E}(X)$. Suppose that the following inclusions are fulfilled:

$$1^\circ \quad \mathbf{R}(P) \subset \tilde{X}\,,$$
$$2^\circ \quad \mathbf{R}(E - PH) \supset \tilde{X}\,,$$
$$3^\circ \quad \mathbf{N}(E - PH) \cap \tilde{X} = \{0\}\,.$$

Then $E - PH$ considered as an operator on $\tilde{X}$, has an inverse operator $W \in \mathbf{E}(\tilde{X})$. Let us denote by V the product WP, so that $V \in \mathbf{E}(X)$. The operators $E - PH$ and $E - HP$ have inverses (on the whole of X) and we have

$$(E - PH)^{-1} = E + VH\,, \quad (E - HP)^{-1} = E + HV\,.$$

If further, $P^2 = P$ and $\tilde{X} = \mathbf{R}(P)$, the operator $E - PHP$ has an inverse as well and

$$(E - PHP)^{-1} = E + VHP = E + V - P\,.$$

Thus, e. g., if $(E - PH)\,x = y$ is to be solved, we find a point $\tilde{x} \in \tilde{X}$ such that $(E - PH)\,\tilde{x} = PHy$ and put $x = y + \tilde{x}$. Similarly, the relation $(E - HP)\,x_2 = y$ is equivalent to $x_2 = y + Hz_2$, where $z_2 \in \tilde{X}$, $(E - PH)\,z_2 = Py$. If, further, $P^2 = P$ and $\tilde{X} = \mathbf{R}(P)$, the relation $(E - PHP)\,x_3 = y$ is equivalent to $x_3 = y - Py + z_2$.

These results form the algebraic basis of the further considerations. Let us choose now P as a projection on a finite dimensional subspace $\tilde{X}$. It is to be expected that, if $\tilde{X}$ and P are suitably chosen, the operator $E - PHP$ will approximate the operator $E - H$. The study of $E - PH$ on $\tilde{X}$ reduces to the study of a finite matrix. Suppose that the regularity of this matrix is assured. We have, then, the existence of an inverse to $E - PHP$. The degree of the approximation is measured by the "distance of H from $\tilde{X}$" defined as

$$\varrho(H, \tilde{X}) = \sup_{|x| \leqq 1} \inf_{\tilde{x} \in \tilde{X}} |Hx - \tilde{x}|\,.$$

Clearly $\varrho(H, \tilde{X}) \leqq |H - PH|$. If this number is small enough, we can prove the existence of an inverse to $E - H$. The solution of $(E - H)\,x = y$ may then by approximated by that of $(E - PHP)\,\tilde{x} = y$ and an estimate of the difference $|x - \tilde{x}|$ may be given.