Časopis pro pěstování matematiky

Karel Čulík

O kritických grafech

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 83 (1958), No. 4, 472--473

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108629`

Všimněme si, že množina K' je konvexní, tj. že obsahuje s každými svými dvěma body i úsečku je spojující. (Úsečkou o krajních bodech $M_1, M_2 \in \mathfrak{S}$ rozumíme množinu všech $M \in \mathfrak{S}$ tvaru $M = (1 - t) M_1 + tM_2$, kde $0 \leqq t \leqq 1$.)

Připomeňme ještě pojem vrcholu libovolné konvexní množiny $H \subset \mathfrak{S}$. Element M^* nazýváme vrcholem množiny H, není-li vnitřním bodem žádné úsečky o krajních bodech v množině H.

Nyní můžeme formulovat následující věty o extrémech subaditivních a striktně subaditivních funkcionálů:

1. *Subaditivní funkcionál $\lambda[M]$ nabývá na K' svého maxima alespoň v jednom vrcholu množiny K'. Je-li $\lambda[M]$ striktně subaditivní, pak nabývá svého maxima jen ve vrcholech množiny K'.*

2. *Množina těch $M \in K'$, v nichž subaditivní funkcionál $\lambda[M]$ nabývá svého minima na K', je konvexní podmnožinou $H \subset K'$. Jestliže $\lambda[M]$ je striktně subaditivní, má množina H jediný element.*

Ludvík Janoš, Praha

O KRITICKÝCH GRAFECH

(Vlastní referát K. Čulíka o přednášce proslovené v „Diskusích o nových pracích brněnských matematiků" dne 14. 4. 1958 v Brně)

Chromatickým rozkladem **aRS**-grafu $F(\varrho)$ ($\varrho \subset F \times F$ je areflexivní a symetrická binární relace) se rozumí rozklad $\overline{F}$ na množině F, který splňuje podmínku

$$x, y \in P,\ P \in \overline{F} \Rightarrow (x, y) \text{ non} \in \varrho\,. \tag{1}$$

Nejmenší mohutnost $\chi[F(\varrho)]$ ze systému mohutností všech chromatických rozkladů **aRS**-grafu $F(\varrho)$ se nazývá *chromatickým číslem grafu* $F(\varrho)$. Je-li $\chi[F(\varrho)] = \mathfrak{m}$, pak graf $F(\varrho)$ nazýváme $\mathfrak{m}$-*chromatickým grafem.*

Dvojici $x, y \in F$ nazýváme *souhlasnou* příp. *nesouhlasnou* v **aRS**-grafu $F(\varrho)$, jestliže platí

$$\begin{gathered} x \in X,\ y \in Y,\ X, Y \in \overline{F},\ \textit{kde } \overline{F} \textit{ je chromatický rozklad grafu } F(\varrho), \\ \textit{pro který platí } \operatorname{kard} \overline{F} = \chi[F(\varrho)] \Rightarrow X = Y \textit{ příp. } X \neq Y\,. \end{gathered} \tag{2}$$

Lemma 1. *Je-li x, y souhlasná a y, z nesouhlasná dvojice v* **aRS**-*grafu $F(\varrho)$, pak x, z je nesouhlasná dvojice v $F(\varrho)$.*

Lemma 2. *Je-li σ množina všech nesouhlasných dvojic v* **aRS**-*grafu $F(\varrho)$, pak $\chi[F(\varrho)] = \chi[F(\varrho \cup \sigma)]$.*

Věta 1. *Nechť $F(\varrho)$ je* **aRS**-*graf. Pak binární relace $\sigma \subset F \times F$, definovaná podmínkou: $(x, y) \in \sigma \Leftrightarrow x, y$ je souhlasná dvojice v $F(\varrho)$, je ekvivalencí.*

Věta 2. *Dvojice $x, y \in F$ je souhlasná v* **aRS**-*grafu $F(\varrho)$, který má konečné chromatické číslo, právě tehdy, když $\chi[F(\varrho)] < \chi[F(\varrho')]$, kde $\varrho' = \varrho \cup \{(x, y), (y, x)\}$.* Z věty 2 plyne, že každý kritický $(m + 1)$-chromatický **aRS**-graf (viz G. A. Dirac: *A theorem of R. L. Brooks and a conjecture of H. Hadwiger*, Proc. London Math. Soc. 7 (1957), 161—195) pro každé přirozené číslo m vznikne z vhodného m-chromatického **aRS**-grafu obsahujícího alespoň jednu souhlasnou dvojici x, y tím, že k němu přidáme hrany $(x, y), (y, x)$.

Nechť $F(\varrho)$ je **aRS**-graf a nechť $k > 0$, $m > 1$ jsou celá čísla. Pak posloupnost $\{u_i\}_{i=0}^k$, $u_i \in F$ se nazývá m-vázaná v $F(\varrho)$, jestliže platí:

$$u_i, u_{i+1}, \ldots, u_{i+m-1} \text{ jsou navzájem různé uzly úplného subgrafu grafu } F(\varrho) \text{ pro každé } i = 0, 1, \ldots, k - m + 1 . \tag{3}$$

Lemma 3. *Nechť $\{u_i\}_{i=0}^k$ je m-vázaná posloupnost v **aRS**-grafu $F(\varrho)$, který má konečné chromatické číslo, a nechť $1 < \chi[F(\varrho)] = m$, $k > 0$. Je-li nyní $k \equiv 0 \pmod m$ příp. $k \not\equiv 0 \pmod m$, pak dvojice u_0, u_k je souhlasná příp. nesouhlasná v $F(\varrho)$.*

Nechť $C_n^m(\gamma)$ značí konečný **aRS**-graf definovaný takto: $m, n \geqq 2$ jsou celá čísla, $C = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$, $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, $B = \bigcup_{i=1}^{n-1} B_i$, kard $B_i = m$, $C_i = B_i \cup \cup \{a_i, a_{i+1}\}$ pro $i = 1, 2, \ldots, k - 1$ a $\gamma = [\bigcup_{i=1}^{n-1} C_i \times C_i - \bigcup_{i=1}^{n-1} \{(a_i, a_{i+1}), (a_{i+1}, a_i)\} - - \underset{(\mu,\mu)}{E} \{u \in C\}] \cup \{(a_1, a_n), (a_n, a_1)\}$. Byly vyšetřovány podmínky kladené na typ nedisjunktnosti množin B_i, kdy graf $C_n^m(\gamma)$ je kritickým $(m + 1)$-chromatickým grafem. Mezi těmito grafy je většina těch, které nebyly popsány v citované práci G. A. Diraca.

Karel Čulík, Brno

POZNÁMKY K TEORII OPERACÍ

(Vlastní referát K. ČULÍKA o přednášce proslovené v „Diskusích o nových pracích brněnských matematiků" dne 12. 5. 1958 v Brně)

Ternární relací definovanou na množině $F \neq \emptyset$ rozumíme podmnožinu $\Delta \subset F \times F \times F$ a její prvky (uspořádané trojice prvků z F) označujeme $[x, y, z] \in \Delta$. Relace Δ se nazývá *operací* na F, jestliže splňuje podmínky (srv. A. MOSTOWSKI, *Logika matematyczna,* 1948, str. 155—156)

$$[x', y, z], [x'', y, z] \in \Delta \Rightarrow x' = x'' , \tag{J}$$

$$y, z \in F \Rightarrow \textit{existuje takový } x \in F, \textit{ že } [x, y, z] \in \Delta . \tag{P}$$

Splňuje-li relace Δ podmínku (**J**) lze používat obvyklého multiplikativního zápisu

$$x = yz \text{ v } \Delta \Leftrightarrow [x, y, z] \in \Delta . \tag{1}$$

Označme $\Delta_{123} = \Delta$ a nechť i, j, k je libovolná permutace čísel 1, 2, 3. Pak ternární relaci Δ_{ijk}, definovanou podmínkou

$$[x_i, x_j, x_k] \in \Delta_{ijk} \Leftrightarrow [x_1, x_2, x_3] \in \Delta_{123} , \tag{2}$$

nazýváme *ijk-permutovanou relací* relace Δ (viz *inversní* relace u A. Mostowského, str. 154). Zejména označujeme a nazýváme relaci $\Delta_{132} = \Delta_k$ *konversní*, $\Delta_{231} = \Delta_p$ *pravou* a $\Delta_{312} = \Delta_l$ *levou relací* relace $\Delta = \Delta_{123}$ (srv. W. SIERPIŃSKI, *Zasady algebry wyzszej*, 2. vyd., 1951, str. 290 a násl.). Označujeme-li $(\Delta_p)_p = \Delta_{p^2}$, $(\Delta_k)_l = \Delta_{kl}$ atd., pak z vlastností symetrické permutační grupy o třech proměnných plyne

Věta 1. 1. $\Delta_{123} = \Delta = \Delta_{pl} = \Delta_{lp} = \Delta_{p^3} = \Delta_{l^3} = \Delta_{k^2}$, $\Delta_{231} = \Delta_p = \Delta_{l^2} = \Delta_{klk}$, $\Delta_{312} = \Delta_l = \Delta_{p^2} = \Delta_{kpk}$, $\Delta_{132} = \Delta_k$, $\Delta_{321} = \Delta_{kp} = \Delta_{lk}$, $\Delta_{213} = \Delta_{kl} = \Delta_{pk}$;

2. $\Delta = \Delta_k \Leftrightarrow \Delta_p = \Delta_{kp} \Leftrightarrow \Delta_l = \Delta_{kl}$;

3. $\Delta = \Delta_p \Leftrightarrow \Delta_p = \Delta_l \Leftrightarrow \Delta_l = \Delta \Leftrightarrow \Delta_k = \Delta_{pk} \Leftrightarrow \Delta_{pk} = \Delta_{lk} \Leftrightarrow \Delta_{lk} = \Delta_k$.