A. O. Kac; T. A. Nesterova

О графах с точно тремя вершинами одинаковой степени

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 103 (1978), No. 2, 159--174

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108616

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 103 (1978), Praha

О ГРАФАХ С ТОЧНО ТРЕМЯ ВЕРШИНАМИ ОДИНАКОВОЙ СТЕПЕНИ

А. О. КАЦ, Т. А. НЕСТЕРОВА, Рига

(Поступило в редакцию 24./VI. 1976 г.)

Известно, что в любом обыкновенном [7] графе существуют, по крайней мере, две вершины с одинаковыми степенями [2]. Если в обыкновенном графе имеются точно две вершины одной и той же степени, то он определен с точностью до изоморфизма набором степеней своих вершин [2]. Свойства этих графов описаны в [4, 5, 6].

Далее рассмотрим обыкновенные графы. Если в n-вершинном связном графе имеются точно три вершины одинаковой степени, скажем r, то некоторая степень $l \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ отсутствует. Обозначим множество (класс) всех таких попарно неизоморфных графов через $\mathscr{G}^l_{n,r}$ ($n \geqq 3$, $1 \leqq r, l \leqq n-1$, $r \neq l$), а произвольный граф из них через $G^l_{n,r}$. Разбиение графа $G^l_{n,r}$ обозначим через $R(n, r, l)$ [3]. Положим

$$\mathscr{G}_n =^{\text{def}} \bigcup_{r,l} \mathscr{G}^l_{n,r}\,, \quad \mathscr{G} =^{\text{def}} \bigcup_{n} \mathscr{G}_n\,, \quad \mathscr{R} =^{\text{def}} \bigcup_{n,r,l} R(n, r, l)\,.$$

По-видимому, впервые класс $\mathscr{G}$ рассматривался в работе [1], где доказаны необходимые и достаточные условия существования графа с разбиением $R(n, r, l)$.

В настоящей заметке указываются аналитические выражения функций, определяющих границы области существования графов с разбиением $R(n, r, l)$, исследуются существование гамильтоновой цепи в этих графах, их планарность, простота разбиения $R(n, r, l)$, приводятся необходимые и достаточные условия изоморфизма двух графов из $\mathscr{G}$, откуда устанавливается справедливость гипотезы Улама в этом классе.

1. УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ ГРАФА $G^l_{n,r}$

Для дальнейших целей приведем необходимые и достаточные условия существования графа $G^l_{n,r}$.

Теорема 1. *Граф* $G^l_{n,r}$ $(n = 4s + t \geqq 3,\ s \geqq 0)$ *существует тогда и только тогда, когда при* $t \in \{0, 1\}$ *и* l *— четном или* $t \in \{2, 3\}$ *и* l *— нечетном выполнено хотя бы одно из условий*:

1) $1 \leqq r < \left[\dfrac{n}{2}\right]$ *и* $1 \leqq l \leqq 2r - \left[\dfrac{n}{2}\right]$ *или* $2(n - r - 1) - \left[\dfrac{n}{2}\right] \leqq l \leqq n - 1$,

2) $r = \left[\dfrac{n}{2}\right]$ *и* $1 \leqq l \leqq n - 1$,

3) $\left[\dfrac{n}{2}\right] < r \leqq n - 1$ *и* $1 \leqq l \leqq 2(n - r) - \left[\dfrac{n}{2}\right]$ *или* $2r - \left[\dfrac{n}{2}\right] \leqq$
$\leqq l \leqq n - 1$.

Теорема 1 эквивалентна теореме 5 из работы [1], относительно связных графов.

Определим область существования графов класса $\mathscr{G}$ как множество точек (n, r, l) таких и только таких, для которых существует граф с разбиением $R(n, r, l)$.

Обозначим зависимость l от n, заданную неравенствами условия 1) теоремы 1, через $l(n)$.

Функция $l(n)$ многозначна с множеством значений $\{l(n)\}_{j=j(n)}$ для каждого $n \in \mathscr{N}$ ($\mathscr{N}$ — множество натуральных чисел). Пусть некоторые функции $f^1_{\min}(n)$ и $f^1_{\max}(n)$ определены на множестве действительных чисел и такие, что сужения

$$f^i_{\min}\big|_{\mathscr{N}}(n) = \min_{j=j(n)} l_j(n), \quad \text{для} \quad n \geqq \begin{cases} 6, & \text{если} \quad i = 1, 2, \\ 5, & \text{если} \quad i = 3, \end{cases}$$

$$f^i_{\max}\big|_{\mathscr{N}}(n) = \max_{j=j(n)} l_j(n), \quad \text{для} \quad n \geqq \begin{cases} 4, & \text{если} \quad i = 1, \\ 5, & \text{если} \quad i = 2, 3, \end{cases}$$

($i = 1, 2, 3$ соответствуют условиям 1), 2), 3) в теореме 1.

Аналитические выражения функций $f^i_{\min}(n)$, $f^i_{\max}(n)$, изображающих нижнюю и верхнюю границу проекции области существования графов класса $\mathscr{G}$ на плоскость (n, l), следующие:

$$f^i_{\min}(n) = \frac{1}{2}\left(\left|n - 4\left[\frac{n-2}{4}\right] - 3\right| - \left|n - 4\left[\frac{n-2}{4}\right] - 4\right| + 3\right),$$

$$f^i_{\max}(n) = n - \frac{1}{2}\left(\left|n - 4\left[\frac{n-1}{4}\right] - 2\right| - \left|n - 4\left[\frac{n-1}{4}\right] - 3\right| + 3\right)$$

для каждого $i = 1, 2, 3$.

На рис. 1 точками изображена проекция области существования графов класса $\mathscr{G}$ на плоскость (n, l) и графики функций $f^1_{\min}(n)$ и $f^1_{\max}(n)$. Графики функций для условий 2), 3) аналогичны 1).

Решая неравенства 1), 2), 3) теоремы 1 относительно r, получаем

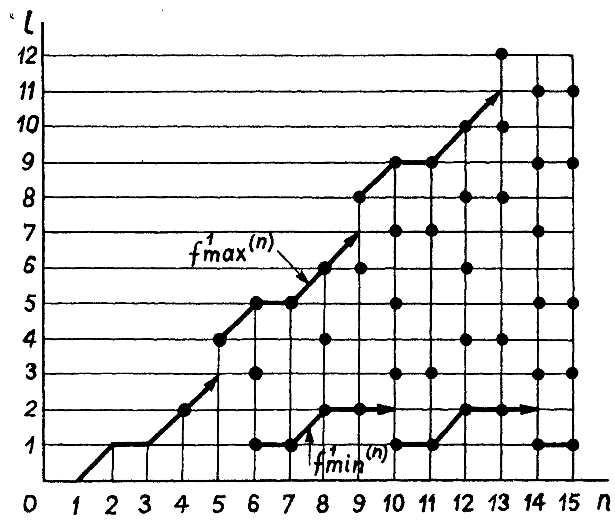

Рис. 1. Проекция области существования графов класса $\mathcal{G}$ на плоскость (n, l).

Следствие 1. *Граф* $G^l_{n,r}$ $(n = 4s + t \geqq 3,\ s \geqq 0)$ *существует тогда и только тогда, когда выполнено хотя бы одно из условий* 1)—3):

1) *для* $1 \leqq l < [n/2]$

1a) $\dfrac{l}{2} + s \leqq r \leqq n - \left(\dfrac{l}{2} + s\right)$ *при* $t \in \{0, 1\}$ *и* l — *четном или*

1b) $\dfrac{l-1}{2} + s + 1 \leqq r \leqq n - \left(\dfrac{l-1}{2} + s + 1\right)$ *при* $t \in \{2, 3\}$ *и* l — *нечетном*;

2) *для* $l = [n/2]$

2a) $r = \left[\dfrac{n}{2}\right] - 1$ *при* $t = 0$ *и* l — *четном или* $t = 2$ *и* l — *нечетном или*

2b) $r = \left[\dfrac{n}{2}\right] + 1$ *при* $t = 1$ *и* l — *четном или* $t = 3$ *и* l — *нечетном*;

3) *для* $[n/2] < l \leqq n - 1$

3a) $n - \left(\dfrac{l}{2} + s + 1\right) \leqq r \leqq \dfrac{l}{2} + s$ *при* $t \in \{0, 1\}$ *и* l — *четном или*

3b) $n - \left(\dfrac{l-1}{2} + s + 2\right) \leqq r \leqq \dfrac{l-1}{2} + s + 1$ *при* $t \in \{2, 3\}$ *и* l — *нечетном.*

Согласно условиям 1), 2), 3) следствий 1, функция $r(n)$ многозначна с множеством значений $\{r(n)\}_{j=j(n)}$ для каждого $n \in \mathcal{N}$. Пусть сужения

$$g^l_{\min}\big|_{\mathcal{N}}(n) = \min_{j=j(n)} r_j(n),$$

$$g^i_{\max}\big|_{\mathcal{N}}(n) = \max_{j=j(n)} r_j(n)\,, \quad \text{для} \quad n \geqq \begin{cases} 6\,, & \text{если} \quad i = 1\,, \\ 3\,, & \text{если} \quad i = 2\,, \\ 5\,, & \text{если} \quad i = 3\,, \end{cases}$$

изображают нижнюю и верхнюю границу проекции области существования графов класса $\mathcal{G}$ на плоскость (n, r). Аналитические выражения этих функций следующие:

$$g^1_{\min}(n) = \left[\frac{n-4}{4}\right] + 2\,,$$

$$g^1_{\max}(n) = n - \left[\frac{n-4}{4}\right] - 2\,,$$

$$g^2_{\min}(n) = g^2_{\max}(n) = -n + 3\left[\frac{n-1}{2}\right] + 2\,,$$

$$g^3_{\min}(n) = \left[\frac{n-3}{4}\right] + 1\,,$$

$$g^3_{\max}(n) = n - \left[\frac{n-3}{4}\right] - 2\,.$$

На рис. 2 точками изображена проекция области существования класса $\mathcal{G}$ на плоскость (n, r) и графики функций $g^1_{\min}(n)$ и $g^1_{\max}(n)$. Графики функций для условий 2), 3) аналогичны 1).

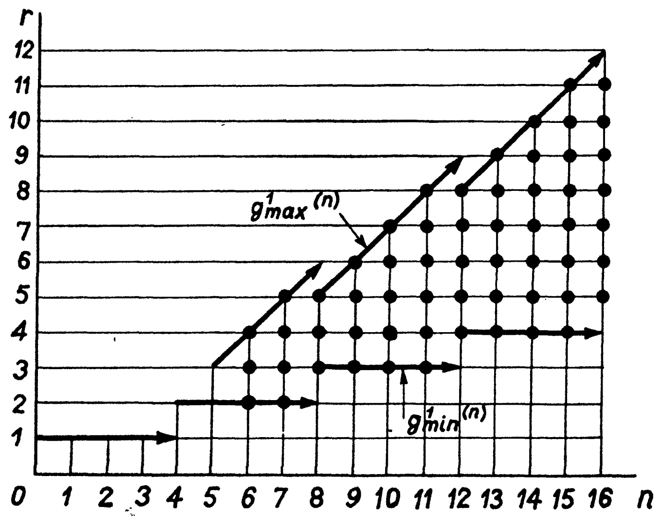

Рис. 2. Проекция области существования графов класса $\mathcal{G}$ на плоскость (n, r).

2. О СУЩЕСТВОВАНИИ ГАМИЛЬТОНОВОЙ ЦЕПИ

В дальнейшем под $R(n, r, l)$ будем понимать упорядоченное по невозрастанию слагаемых разбиение графа $G^l_{n,r}$.

Через ГЦ = ГЦ(x, y) обозначим гамильтонову цепь с концами в вершинах x и y, а через $\mathrm{d}(x)$ – степень вершины x.

Теорема 2. *Для каждого* $n = 4s + t \geqq 3$ $(s \geqq 0)$ *по крайней мере в одном графе* $G \in \mathscr{G}^l_{n,r}$ *существует ГЦ, если*

$$l = \left[\frac{n}{2}\right], \quad t \in \{1, 3\}, \quad r = \left[\frac{n}{2}\right] + 1 .$$

Так как при условиях теоремы верно, что $|\mathscr{G}^l_{n,r}| = 1$ (см. теорему 8), то доказательство теоремы 2 настоящей работы аналогично доказательству теоремы 2 о существовании гамильтоновой цепи в любом вполне неоднородном (квазисовершенном в терминологии [2]) графе, приведенной в [4].

Пусть $R_0 = R(n, r, l)$ – разбиение графа $G^l_{n,r}$. Пусть $R'(R_0)$ – разбиение, полученное из R_0 уменьшением двух слагаемых, скажем a и b, на единицу, каждого из остальных – на два и отбрасыванием появившихся равных нулю слагаемых.

Лемма 1. *Разбиение* $R'(R_0)$ *принадлежит множеству* $\mathscr{R}$ *тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:*

1) $R_0 = R(n, r, 1)$ *для* $n \geqq 4$, $2 \leqq r \leqq n - 2$ *при* $a = b = r$, *причем* $R'(R_0) = R(n - 1, r - 1, n - 2)$;
2) $R_0 = R(n, r, 1)$ *для* $n \geqq 4$, $3 \leqq r < n - 2$ *при* $a = n - 1$, $b = n - 2$, *причем* $R'(R_0) = R(n - 1, r - 2, n - 4)$;
3) $R_0 = R(n, r, 3)$ *для* $n \geqq 5$, $3 \leqq r \leqq n - 1$ *при* $a = 1$, $b = l - 1$, *причем* $R'(R_0) = R(n - 1, r - 2, n - 2)$;
4) $R_0 = R(n, r, l)$ *для* $n \geqq 5, 3 \leqq r \leqq n - 1, 4 \leqq l \leqq n - 1, r \neq l - 1$ *при* $a = 1$, $b = l - 1$, *причем* $R'(R_0) = R(n - 2, r - 2, l - 3)$.

Доказательство. Докажем случай 1).

Необходимость. Предположим противное, т.е., что $R'(R_0) = R(n - 1, r - 1, n - 2)$ получено из $R_0 = R(n, r, 1)$ при $a \neq b$ $(n \geqq 4)$.

i) Пусть $2 \leqq a, b < n - 2$, $a > b$. Пусть

$$R_0 = (n - 1, n - 2, \dots, a + 1, a, a - 1, \dots, b + 1, b, b - 1, \dots \\ \dots, r + 1, r, r, r, r - 1, \dots, 3, 2)$$

Следовательно,

$$R'(R_0) = (n - 3, n - 4, \dots, a - 1, a - 1, a - 3, \dots, b - 1, b - 1, b - 3, \dots \\ \dots, r - 1, r - 2, r - 2, r - 2, r - 3, \dots, 1)$$

Независимо от того, либо $a = r$, либо $b = r$, либо $a \neq r$, $b \neq r$ при $2 \leqq r \leqq$ $\leqq n - 2$ очевидно, что $R'(R_0) \notin \mathscr{R}$.

ii) Пусть $a = n - 1$, $b = n - 2$, $2 < r < n - 2$. Тогда

$$R_0 = (n - 1, n - 2, n - 3, \ldots, r + 1, r, r, r, r - 1, \ldots, 3, 2)$$

и

$$R'(R_0) = (n - 2, n - 3, n - 5, \ldots, r - 1, r - 2, r - 2, r - 2, r - 3, \ldots, 1) =$$

$$= R(n - 1, r - 2, n - 4) \neq R(n - 1, r - 1, n - 2)\,.$$

При $r = 2$

$$R_0 = (n - 1, n - 2, n - 3, \ldots, 3, 2, 2)\,,$$

$$R'(R_0) = (n - 2, n - 3, n - 5, \ldots, 1) \notin \mathscr{R}\,;$$

при $r = n - 2$

$$R_0 = (n - 1, n - 2, n - 2, n - 2, n - 3, \ldots, 3),$$

$$R'(R_0) = (n - 2, n - 3, n - 4, n - 4, n - 5, \ldots, 1) \notin \mathscr{R}\,.$$

Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $R_0 = R(n, r, 1)$, $n \geqq 4$, $2 \leqq r \leqq n - 2$, $a = b = r$. Следовательно,

$$R_0 = R(n, r, 1) = (n - 1, n - 2, \ldots, r + 1, r, r, r, r - 1, \ldots, 3, 2)\,.$$

Тогда $R'(R)_0 = (n - 3, n - 4, \ldots, r - 1, r - 1, r - 1, r - 2, r - 3, \ldots, 1) =$ $= R(n - 1, r - 1, n - 2)$, что и требовалось доказать.

Случаи 2), 3), 4) доказываются аналогично.

Теорема 3. *Если граф* $G \in \mathscr{G}$ *содержит* ГЦ(x, y) *то граф* $G \setminus$ ГЦ(x, y) *принадлежит множеству* $\mathscr{G}$ *тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий*:

1. $G \in \mathscr{G}^l_{n,r}$, $n = 4s + t$, $3 \leqq l \leqq n - 1$ *и*

1a) *при* $l = 3$ *и* $s \geqq 2$, $t \in \{2, 3\}$, $\mathrm{d}(x) = 1$, $\mathrm{d}(y) = 2$,

$$\frac{n}{2} - s + 1 \leqq r \leqq \frac{n}{2} + s + 1 \text{ *если* } t = 2$$

и

$$n - \left(\frac{n - 3}{2} + s + 1\right) \leqq r \leqq \frac{n - 3}{2} + s + 3 \text{ *если* } t = 3\,;$$

при этом

$$G \setminus \text{ГЦ}(x, y) \in \mathscr{G}^{n-2}_{n-1,r-2}\,;$$

1b) *при* $4 \leqq l \leqq n-1$ *и* $s \geqq 1$, $d(x)=1$, $d(y)=n-1$

$$\frac{l}{2}+s \leqq r \leqq n-\left(\frac{l}{2}+s-2\right), \text{ если } t \in \{0, 1\},$$

и

$$\frac{l-3}{2}+s+2 \leqq r \leqq n-\left(\frac{l-3}{2}+s\right), \text{ если } t \in \{2, 3\};$$

при этом

$$G \setminus \text{ГЦ}(x, y) \in \mathcal{G}^{l-3}_{n-2,r-2}.$$

2. $G \in \mathcal{G}^1_{n,r}$, $n = 4s+t$ *и*

2a) $$d(x)=d(y)=r, \quad \frac{n}{2}-s \leqq r \leqq \frac{n}{2}+s, \quad \text{если} \quad t=2,$$

и

$$n-\left(\frac{n-3}{2}+s+2\right) \leqq r \leqq \frac{n-3}{2}+s+2, \text{ если } t=3;$$

при этом

$$G \setminus \text{ГЦ}(x, y) \in \mathcal{G}^{n-2}_{n-1,r-1}.$$

2b) $d(x)=n-2$, $d(y)=n-1$,

$$\frac{n}{2}-s+2 \leqq r \leqq \frac{n}{2}+s, \quad \text{если} \quad t=2, \text{ и}$$

$$n-\left(\frac{n-5}{2}+s+1\right) \leqq r \leqq \frac{n-5}{2}+s+3, \quad \text{если} \quad t=3;$$

при этом

$$G \setminus \text{ГЦ}(x, y) \in \mathcal{G}^{n-4}_{n-1,r-2}.$$

Доказательство теоремы использует следствие 1 и лемму 1.

Следствие 2. *Если граф* $G \in \mathcal{G}^l_{n,r}$ $(n \geqq 4,\ 3 \leqq r \leqq n-1)$ *содержит* ГЦ(x, y), *то граф* $G \setminus$ ГЦ$(x, y) \notin \mathcal{G}$ *для любых* x, y.

3. О ПЛОСКОСТНОСТИ

В этом пункте приводятся условия, при которых любой граф из $\mathcal{G}^l_{n,r}$ является плоским или неплоским, а также указывается область значений n, r, l, для которых множество $\mathcal{G}^l_{n,r}$ содержит как плоские, так и неплоские графы.

На рис. 3 изображены все неизоморфные графы множества $\mathscr{G}^1_{7,3}$: три из них (a, b, c) – плоские, один (d) – неплоский.

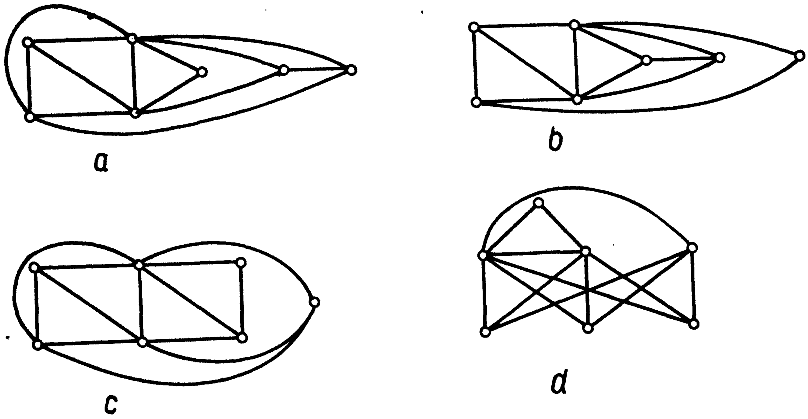

Рис. 3. Графы a, b, c множества $\mathscr{G}^1_{7,3}$ — плоские, граф d — неплоский.

Такими же являются и множества $\mathscr{G}^l_{8,3}$ $(l = 2, 4, 6)$ и $\mathscr{G}^l_{9,3}$ $(l = 6, 8)$.

В подобных случаях для получения условий плоскостности требуется более глубокое изучение структуры всех графов из $\mathscr{G}^l_{n,r}$. Значения одних лишь разбиений здесь недостаточно.

Лемма 2. *Каждый граф $G \in \mathscr{G}^l_{n,r}$ содержит максимальный полный подграф K_4 тогда и только тогда, когда*

1) *при* $1 \leqq r < \left[\frac{n}{2}\right]$ *и* $1 \leqq l < \left[\frac{n}{2}\right]$ *для* $n = 7, 8$;

2) *при* $1 \leqq r < \left[\frac{n}{2}\right]$ *и* $\left[\frac{n}{2}\right] \leqq l \leqq n-1$ *для* $n = 8, 9$;

3) *при* $r = \left[\frac{n}{2}\right]$ *и* $1 \leqq l \leqq n-1$ *для* $n = 6, 7$;

4) *при* $\left[\frac{n}{2}\right] < r \leqq n-1$ *и* $1 \leqq l \leqq \left[\frac{n}{2}\right]$ *для* $n = 5, 6,$.

Нетрудно видеть, что при $n \geqq 14$ любой граф из $\mathscr{G}_n$ неплоский, так как содержит полный пятивершинник K_5.

Отсюда следует

Теорема 4. *По крайней мере один граф неплоский*

1) *в множествах*

$$\mathscr{G}^1_{7,3}, \mathscr{G}^l_{7,r} \quad (r = 4, 5;\ l = 1, 3),$$

$$\mathscr{G}^l_{8,3}\ (l = 2, 4, 6), \quad \mathscr{G}^2_{9,3}, \mathscr{G}^l_{9,3}\ (l = 6, 8);$$

2) *в множестве* $\mathscr{G}^l_{n,r}$, *если*

а) *при* $r < \left[\frac{n}{2}\right]$, $1 \leqq l \leqq n-1$ *и* $10 \leqq n \leqq 13$,

б) *при* $r \geqq \left[\frac{n}{2}\right]$, $1 \leqq l \leqq n-1$ *и* $8 \leqq n \leqq 13$.

Лемма 3. *Ни один граф из множества* $\mathscr{G}^l_{n,r}$ *не имеет своим подграфом граф* $K_{3,3}$, *если*

1) $r < 3$, $l < 3$ *и* $n \leqq 8$;

2) $r < 3$, $l \geqq 3$ *и* $n \leqq 9$;

3) $r \geqq 3$, $l < 3$ *и* $n \leqq 6$;

4) $r \geqq 3$, $l \geqq 3$ *и* $n \leqq 7$.

Доказательство. Пусть граф $G = (X, U) \in \mathscr{G}^l_{n,r}$ $(n \geqq 3)$. Пусть $X' =^{\text{def}} =^{\text{def}} \{x \mid x \in X \text{ и } \mathrm{d}(x) \geqq 3\}$.

Если $K_{3,3} \subset G$, то $|X'| \geqq 6$.

Пусть имеет место условие 1), т. е. $r < 3$, $l < 3$, $n \leqq 8$. Тогда $|X'| = n - 3 \leqq \leqq 8 - 3 = 5 < 6$, значит $K_{3,3} \not\subset G$. Аналогичные рассуждения при условиях 2), 3), 4).

Теорема 5. *Любой граф из множества* $\mathscr{G}^l_{n,r}$ $(n \geqq 3)$ *плоский тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий*:

1) $r < \left[\frac{n}{2}\right] \leqq 3$, $l < \left[\frac{n}{2}\right] \leqq 3$ *и* $n \leqq 8$;

2) $r < \left[\frac{n}{2}\right] \leqq 3$, $l \geqq \left[\frac{n}{2}\right] \geqq 3$ *и* $n \leqq 9$;

3) $r \geqq \left[\frac{n}{2}\right] \geqq 3$, $l < \left[\frac{n}{2}\right] \leqq 3$ *и* $n \leqq 6$;

4) $r \geqq \left[\frac{n}{2}\right] \geqq 3$, $l \geqq \left[\frac{n}{2}\right] \geqq 3$ *и* $n \leqq 7$.

Доказательство. Достаточность:

Пусть граф $G \in \mathscr{G}^l_{n,r}$. Пусть имеет место 1), т. е.,

$$r < \left[\frac{n}{2}\right] \leqq 3, \quad l < \left[\frac{n}{2}\right] \leqq 3, \quad n \leqq 8.$$

В силу леммы 2, $K_5 \not\subset G$. По лемме 3 $K_{3,3} \not\subset G$. Следовательно, G — плоский. Рассуждения при условиях 2), 3), 4) аналогичны.

Необходимость. Пусть $\mathcal{G}^l_{n,r}$ такое, что любой $G \in \mathcal{G}^l_{n,r}$ – плоский. Предположим, что не имеют место условия 1), т. е., пусть

$$r < \left[\frac{n}{2}\right] \leqq 3\,, \quad l < \left[\frac{n}{2}\right] \leqq 3\,, \quad \text{но} \quad n \geqq 9\,.$$

Согласно теореме 4, при этих условиях в множестве $\mathcal{G}^l_{n,r}$ по крайней мере один граф неплоский. Получено противоречие. При условиях 2), 3), 4) рассуждения аналогичны. Теорема доказана.

4. МИНИМАЛЬНЫЕ ПОЛНЫЕ ЗАМКНУТЫЕ СИСТЕМЫ ОПЕРАЦИЙ

Ниже вводятся некоторые полные замкнутые системы операций над графами класса $\mathcal{G}$, помогающие выявить взаимосвязи и мощности множеств $\mathcal{G}^l_{n,r}$, $\mathcal{G}^{l'}_{n',r'}$.

Определение 1. Операция δ называется *замкнутой в классе* $\mathcal{G}$, если она определяет отображение Δ, относительно которого класс $\mathcal{G}$ замкнут, т. е. $\Delta(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{G}$.

Определение 2. Система S операций в классе $\mathcal{G}$ называется *замкнутой системой в* $\mathcal{G}$, если каждая операция из S замкнута в классе $\mathcal{G}$.

Определение 3. Система S операций в классе $\mathcal{G}$ называется *полной*, если из некоторых заданных исходных графов операциями из S может быть получен любой граф из $\mathcal{G}$. В противном случае говорим, что система S неполная.

Определение 4. Полная система S операций в классе $\mathcal{G}$ называется *минимальной полной системой в* $\mathcal{G}$, если удаление из S хотя бы одной операции делает ее неполной.

В классе $\mathcal{G}$ рассмотрим следующие операции:

A. Операция α: присоединение к данному графу $G \in \mathcal{G}$ изолированной вершины w и построение дополнительного графа $\overline{G + w}$.

B. Операция β: присоединение к данному графу $G \in \mathcal{G}^l_{n,r}$ изолированной вершины w и вершины v степени $n + 1$, смежной с вершиной w и всеми вершинами G.

C. Операция γ: присоединение к данному графу $G \in \mathcal{G}^{n-1}_{n,r}$ ($n \geqq 3$, $1 \leqq r < n - 1$) вершины v степени n, смежной со всеми вершинами G.

D. Операция δ: построение произвольным образом всех графов множества $\mathcal{G}^{n-1}_{n,r}$ для каждого $n = 4s + t \geqq 3$,

$$s \geqq 0\,, \quad t \in \{1, 2\}\,, \quad 1 \leqq r \leqq n - 1\,.$$

Графы, полученные из G в результате перечисленных выше операций, обозначим через $\alpha(G)$, $\beta(G)$, $\gamma(G)$, $\delta(G)$.

Теорема 6. *Операции α и δ при исходном графе $G_0 \in \mathcal{G}^1_{3,2}$ образуют минимальную полную замкнутую систему $(\alpha, \delta; G_0)$ операций в $\mathcal{G}$.*

Доказательство. По определению δ, $\delta(G) \in \mathcal{G}$. Покажем замкнутость операции α. Действительно, пусть $G \in \mathcal{G}^l_{n,r}$ и пусть разбиение графа $G - R(G) = R(n, r, l)$. Присоединим к G изолированную вершину w. Граф $G + w$ имеет разбиение $R(n, r, l)$, к которому добавлено слагаемое — нуль.

Следовательно,

$$R(\overline{G + w}) = R(n + 1,\ n - r,\ n - l)\,,$$

поэтому граф

$$\alpha(G) = \overline{G + w} \in \mathcal{G}^{n-l}_{n+1,n-r} \subset \mathcal{G}\,.$$

Покажем полноту системы $(\alpha, \delta; G_0)$, т. е., что для каждого $G \in \mathcal{G}$ существует $G' \in \mathcal{G}$ такой, что либо $G = \alpha(G')$, либо $G = \delta(G')$, либо $G = G_0$. Обозначим через α^{-1} обратную операцию для α, т. е., $\alpha^{-1}(G) = \bar{G} - w$, если $G \in \mathcal{G}^l_{n,r}$ $(n \geqq 4$, $1 \leqq r \leqq n - 1$, $1 \leqq l < n - 1$, $r \neq l)$, $\mathrm{d}(w) = 0$. Аналогично, как при доказательстве замкнутости α, вытекает, что

$$\alpha^{-1}(G) \in \mathcal{G}^{n-(l-1)}_{n-1,n-(r+1)} \subset \mathcal{G}\,.$$

Если $l = n - 1$, то каждый граф $G \in \mathcal{G}^l_{n,r}$ получен операцией δ. Покажем минимальность системы $(\alpha, \delta; G_0)$. Неполнота системы $(\delta; G_0)$ очевидна из определения δ. Докажем, что $(\alpha; G_0)$ — неполная система. Действительно, для каждого $G \in \mathcal{G}^l_{n,r}$, $n \geqq 3$, $1 \leqq r \leqq n - 1$, $1 \leqq l \leqq n - 1$, $r \neq l$

$$\alpha(G) \in \mathcal{G}^{l'}_{n',r'}\,,$$

где

$$n' \geqq 4\,,\quad 1 \leqq r' \leqq n' - 2\,,\quad 1 \leqq l' \leqq n' - 2\,,\quad r' \neq l'\,.$$

Следовательно, граф $G^{n'-1}_{n',r'}$ не может быть получен операцией α. Теорема доказана.

Следствие 3. *Для всяких графов $G, H \in \mathcal{G}$ таких, что $R(G) = R(H)$ имеет место*

$$G \not\cong H \Leftrightarrow \alpha(G \not\cong \alpha(H)\,.$$

Утверждение очевидно в силу определения и замкнутости операции α.

Таким образом, операция α определяет взаимно-однозначное отображение множества $\mathcal{G}^l_{n,r}$ на множество $\mathcal{G}^{n-l}_{n+1,n-r}$.

Теорема 7. *Операции β, γ и δ при исходных графах $G_1 \in \mathcal{G}^1_{3,2}$ и $G_2 \in \mathcal{G}^2_{4,1}$ образуют минимальную замкнутую систему $(\beta, \gamma, \delta; G_1, G_2)$ операций в $\mathcal{G}$.*

Доказательство теоремы 7 аналогично доказательству теоремы 6.

Отметим, что операция β определяет взаимно-однозначное отображение множества $\mathscr{G}^l_{n,r}$ на множество $\mathscr{G}^{l+1}_{n+2,r+1}$ и операция γ – множества $\mathscr{G}^{n-1}_{n,r}$ на множество $\mathscr{G}^1_{n+1,r+1}$.

5. О ПРОСТЫХ РАЗБИЕНИЯХ $R(n, r, l)$

Напомним, что разбиение называется простым, если существует только один граф (с точностью до изоморфизма) с этим разбиением [3].

Ниже описано множество простых разбиений.

Теорема 8. *Разбиение $R(n, r, l)$ – простое, если*

1) $l = \left[\dfrac{n}{2}\right]$,

2) $n = 4 + t + k$, $t \in \{1, 2\}$, $k \geqq 0$ *и*

2a) *при k – четном $r \in \{1 + k/2, 2 + t + k/2\}$ и $l = \left[\dfrac{n}{2}\right] + 2$,*

2b) *при k – нечетном $r \in \{2 + (k-1)/2,\ 3 + t + (k-1)/2\}$ и $l = \left[\dfrac{n}{2}\right] - 2$.*

Доказательство. В силу полноты системы операций $(\alpha, \delta;\ G_0 \in \mathscr{G}^1_{3,2})$ в классе $\mathscr{G}$ (теорема 6) и определения операции δ, из графа G_0 и графов множества $\mathscr{G}^l_{n,r}$ операция α порождает все графы класса $\mathscr{G}$.

Так как α определяет взаимно-однозначное отображение множества $\mathscr{G}^l_{n,r}$ $(n \geqq 3,\ 1 \leqq r,\ l \leqq n-1,\ r \neq l)$ на множество $\mathscr{G}^{n-l}_{n+1,n-r}$, то

$$\left|\mathscr{G}^l_{n,r}\right| = \left|\mathscr{G}^{n-l}_{n+1,n-r}\right|.$$

Следовательно, для любого $G \in \mathscr{G}$ из $R(G)$ – простого, следует, что $R(\alpha(G))$ – простое.

Очевидно, что, если $G \in \mathscr{G}^l_{n,r}$, то k – кратным применением операции α получаем

$$\alpha^k(G) \in \begin{cases} \mathscr{G}^{l+k/2}_{n+k,r+k/2}, & \text{если } k \text{ – четное} \\ \mathscr{G}^{n-(l-(k-1)/2)}_{n+k,n-(r-(k-1)/2)}, & \text{если } k \text{ – нечетное} \end{cases} \tag{1}$$

Перейдем к доказательству 1).

Пусть $l = [n/2]$. В силу (1), для каждого

$$G \in \mathscr{G}^{[n/2]}_{n,r} - \alpha^k(G) \in \mathscr{G}^{[n'/2]}_{n',r'},$$

где

$$n' = n + k, \quad r' = \begin{cases} n - (r - (k-1)/2), & \text{если } k \text{ – нечетно}. \\ r + k/2, & \text{если } k \text{ – четно}, \end{cases}$$

Следовательно,

$$\left|\mathscr{G}_{n,r}^{[n/2]}\right| = \left|\mathscr{G}_{n',r'}^{[n'/2]}\right| .$$

Очевидно также, что для всякого $G \in \mathscr{G}_{n,r}^{[n/2]}$ граф $G = \alpha^{n-3}(G_0)$. Так как $\left|\mathscr{G}_{3,2}^{1}\right| = 1$, то $\left|\mathscr{G}_{n,r}^{[n/2]}\right| = 1$ для любых n, r. Следовательно, каждое $R(n, r, [n/2])$ – простое.

Докажем далее 2). Если $n \in \{7, 8\}$, то по теореме 1 $\mathscr{G}_{n,r}^{n-1} = \emptyset$ для каждого r. Если $n \in \{5, 6\}$, то непосредственно устанавливаем, что разбиения $R(n, r, n - 1)$ простые только для $r = 1$ и $r = t + 2$. Следовательно, граф G', полученный k-кратным применением операции α к графу G с разбиением a) $R(4 + t, 1, 4 + t - 1)$ или b) $R(4 + t, 2 + t, 4 + t - 1)$ единственный с точностью до изоморфизма.

2a) вытекает из предыдущих рассуждений для a) согласно (1):

$$G' \in \begin{cases} \mathscr{G}_{4+t+k,1+k/2}^{[(4+t+k)/2]+2}, & \text{если } k \text{ — четное},\\ \mathscr{G}_{4+t+k,3+t+(k-1)/2}^{[(4+t+k)/2]-2}, & \text{если } k \text{ — нечетное}. \end{cases}$$

2b) вытекает из предыдущих рассуждений для b), согласно (1):

$$G' \in \begin{cases} \mathscr{G}_{4+t+k,2+t+k/2}^{[(4+t+k)/2]+2}, & \text{если } k \text{ — четное},\\ \mathscr{G}_{4+t+k,2+(k-1)/2}^{[(4+t+k)/2]-2}, & \text{если } k \text{ — нечетное}. \end{cases}$$

Теорема доказана.

6. УСЛОВИЯ ИЗОМОРФИЗМА

Через $G - x$ обозначим граф, полученный удалением из G вершины x вместе с инцидентными ей ребрами.

Теорема 9. *Пусть* $G_1, G_2 \in \mathscr{G}_{n,r}^{l}$. *Тогда* $G_1 \simeq G_2 \Leftrightarrow G_1 - x_i^{(1)} \simeq G_2 - x_i^{(2)}$, *где либо* $i = 1$ *и* $x_1^{(s)} \in G_s$, $\mathrm{d}(x_1^{(s)}) = n - 1$, *либо* $i = 1, 2$ *и* $x_1^{(s)}, x_2^{(s)} \in G_s$, $\mathrm{d}(x_1^{(s)}) = 1$, $x_2^{(s)}$ *— смежная с* $x_1^{(s)}$; $s = 1, 2$.

Докажем эквивалентную теорему.

Теорема 10. *Любой граф G с разбиением $R(n, r, l)$ восстанавливаем с точностью до изоморфизма либо по графу $G - x_1$, где x_1 — вершина степени $n - 1$ в графе G, либо по двум графам $G - x_1$ и $G - x$, где x_1 — висячая, а x — ее смежная вершина в графе G.*

Доказательство. 1) Пусть $l \neq n - 1$. Очевидно, что граф G можно однозначно восстановить по графу $G - x_1$ добавлением вершины x_1, соединяемой ребром с каждой из вершин графа $G - x_1$.

2) Пусть $l = n - 1$, тогда $l \neq 1$. В графе G имеется вершина x_1 степени 1, причем единственная для $n > 7$ (следствие 1). (Если $3 \leqq n \leqq 7$, то имеются

всего два графа с $r = 1$, а именно $G^4_{5,1}$, $G^5_{6,1}$, для которых справедливость теоремы проверяется непосредственно). Пусть x_1 смежна с вершиной x. Если $d(x) = 2$, то граф G можно восстановить по графу $G - x_1$ добавлением вершины x_1, соединяемой с единственной висячей вершиной графа $G - x_1$. Поэтому, пусть $d(x) \geqq 3$. В зависимости от значения $d(x)$, в графе $G - x_1$ могут быть либо 2 (при $d(x) \neq r + 1$), либо 4 (при $d(x) = r + 1$) вершины (будем их называть вершинами-кандидатами), присоединением ребра к одной из которых получаем G.

Рассмотрим случай, когда в графе $G - x_1$ имеются две вершины-кандидаты. Обозначим в этом графе:

вершины-кандидаты — через v, w,

множество соседей произвольной вершины u — через Γu,

упорядоченный по невозрастанию список степеней вершин множества A — через $d(A)$,

$$K = \Gamma v \cap \Gamma w\,, \quad V = \Gamma v \setminus K \setminus w\,, \quad W = \Gamma w \setminus K \setminus v\,.$$

Для дальнейшего докажем следующие свойства графа $G - x_1$.

Свойство 1. *Разбиения $R(G - x_1)$ и $R(G - x_1 - x)$ определяют однозначно $d(\Gamma x)$ в графе $G - x_1$.*

Действительно, предположим, что вершины $G - x_1$ занумерованы по невозрастающим их степеням, причем вершины одинаковой степени в такой последовательности: вершины, не смежные с x; соседи x; сама x.

Тогда из $R(G - x_1)$, которое упорядочено согласно вышеуказанной нумерации вершин, $R(G - x_1 - x)$ можем получить в результате:

а) удаления из разбиения $R(G - x_1)$ одного из чисел $d(x) - 1$, получая некоторый список $R'(G - x_1)$,

б) уменьшая на 1 те элементы $R'(G - x_1)$, которые являются степенями соседей вершины x.

Полученное разбиение $R(G - x_1 - x)$ также имеет невозрастающий порядок слагаемых и соответствует той же нумерации, как и $R'(G - x_1)$. Таким образом, список составляется из тех элементов списка $R'(G - x_1)$, которым соответствуют на 1 меньшие слагаемые из $R(G - x_1 - x)$.

Свойство 2. *Вершины $v, w \in G - x_1$ имеют один и тот же список степеней своих соседей ($d(\Gamma v) = d(\Gamma w)$) тогда и только тогда, когда либо $|V| = |W| = 0$, либо $|V| = |W| = 1$, причем $u \in V$, $z \in W$ такие, что $d(u) = d(z) = r$.*

Доказательство. Первый случай тривиален. Рассмотрим второй случай. Пусть $d(\Gamma v) = d(\Gamma w)$ при $V \neq \emptyset$, $W \neq \emptyset$. Если $|V| = |W| > 1$, то V обязательно содержит вершину степени, не имеющуюся у вершин из W, поскольку в графе $G - x_1$, кроме v и w, только три вершины имеют одинаковую степень r; значит

$\mathrm{d}(\Gamma v) \neq \mathrm{d}(\Gamma w)$, что противоречит предположенному. Следовательно, $|V| = |W| = 1$, причем $u \in V$, $z \in W$ должны быть степени r. Необходимость доказана. Достаточность легко вытекает из обратных суждений.

Свойство 3. *Вершины* $u \in V$, $z \in W$ *с* $\mathrm{d}(u) = \mathrm{d}(z) = r$ *подобны тогда и только тогда, когда* $\mathrm{d}(\Gamma u) = \mathrm{d}(\Gamma z)$.

Действительно, пусть $\mathrm{d}(\Gamma u) = \mathrm{d}(\Gamma z)$. Это означает, что либо $\Gamma u \setminus v = \Gamma z \setminus w$, либо $\Gamma u \setminus v \setminus z = \Gamma z \setminus w \setminus u$. В обоих этих случаях в графе $G - x_1$ существует автоморфизм σ такой, что $u = \sigma(z)$, $v = \sigma(w)$, следовательно u и z подобны. Необходимость доказывается аналогично.

Вернемся к доказательству 2). Возможны случаи a) $\mathrm{d}(\Gamma v) \neq \mathrm{d}(\Gamma w)$, b) $\mathrm{d}(\Gamma v) = \mathrm{d}(\Gamma w)$. В случае a) вершина x однозначно определяется из v и w по $\mathrm{d}(\Gamma v)$ и $\mathrm{d}(\Gamma w)$ согласно свойству 1. В случае b) если $\Gamma v = \Gamma w$ или $\Gamma v \setminus w = \Gamma w \setminus v$, то v и w подобны и G можно восстановить с точностью до изоморфизма, присоединением ребра в графе $G - x_1$ либо к v, либо к w.

Пусть $|V| = |W| \neq 0$. Согласно свойству 2, $V = \{u\}$, $W = \{z\}$, $\mathrm{d}(u) = \mathrm{d}(z) = r$. Рассмотрим $\mathrm{d}(\Gamma u)$, $\mathrm{d}(\Gamma z)$. Если $\mathrm{d}(\Gamma u) = \mathrm{d}(\Gamma z)$, то по свойству 3 в графе $G - x_1$ существует автоморфизм σ такой, что $u = \sigma(z)$, $v = \sigma(w)$ и граф G можно восстановить с точностью до изоморфизма присоединением ребра либо к v, либо к w.

Пусть $\mathrm{d}(\Gamma u) \neq \mathrm{d}(\Gamma z)$. Тогда вершина v определяется однозначно списками $\mathrm{d}(\Gamma v)$, $\mathrm{d}(\Gamma u)$. Именно, пусть вершины-кандидаты v и w смежны. Для определения вершины x среди v и w вычисляем характеристику $h(v; u)$ в виде объединения двух списков степеней с последующим упорядочиванием элементов по их невозрастанию:

$$h(v; u) = (\pi[\mathrm{d}(K) - e\,,\ \ d(V)]\,,\ \ \pi[d(A) - e\,,\ \ d(\Gamma u \setminus A)])\,,$$

где

$\pi[S, T]$ означает упорядоченный по невозрастанию список элементов из списков S и T,

$\mathrm{d}(M) - e$ означает список $\mathrm{d}(M)$, в котором каждый элемент уменьшен на 1,

$A = \Gamma u \cap \Gamma w$.

Для всех вершин y_i, попарно неподобных между собой и степени $\mathrm{d}(x) - 2$, в графе $G - x$ вычисляем

$$h(y_i; u_{ij}) = (\pi[\mathrm{d}(\Gamma y_i)], \pi[\mathrm{d}(\Gamma u_{ij})])\,,$$

где

$$u_{ij} \in \Gamma y_i \quad \text{и} \quad \mathrm{d}(u_{ij}) = r \quad \text{в графе} \quad G - x\,.$$

Если для некоторой пары i, j имеет место равенство

$$h(v; u) = h(y_i; u_{ij})\,,$$

т. е. $y_i = v$, то в графе $G - x_1$ вершиной x является вершина w; в противном случае вершиной x является вершина v.

Если вершины-кандидаты v и w не смежны, то вычисляется

$$h(v; u) = (\pi[\mathrm{d}(K) - e, \mathrm{d}(V \cup w)], \quad \pi[\mathrm{d}(A) - e, \mathrm{d}(\Gamma u \setminus A)])$$

и в качестве y_i в графе $G - x$ берутся вершины степени $\mathrm{d}(x) - 1$. Случай с двумя вершинами-кандидатами доказан.

Рассмотрим случай, когда в графе $G - x_1$ кандидатами являются 4 вершины v_1, v_2, v_3, v_4. По свойству 1 определим среди них вершины v_i со списком $\mathrm{d}(\Gamma v_i) = \mathrm{d}(\Gamma x)$. Если такая вершина единственна, то она является вершиной x. Если таких вершин — две, то этот случай выше рассмотрен. Если таких вершин — три, то нетрудно установить, что либо они все три попарно подобны (любая может являться вершиной x), либо две подобны — одну из них принимаем за v, третью не подобную им берем за w и применяем выше изложенные рассуждения. Если таких — все четыре вершины, то все они попарно подобны; за x выбираем любую из них и G восстанавливаем с точностью до изоморфизма. Теорема доказана.

Следствие 4. *В классе $\mathscr{G}$ справедлива гипотеза Улама.*

Для двух графов с одним разбиением справедливость гипотезы Улама следует из теоремы 9 (или теоремы 10), а если два графа имеют различные разбиения, то достаточно заметить, что их наборы подграфов (полученных в результате поочередного удаления любой вершины графа вместе с инцидентными ей ребрами) различны, так как они отличаются, например, суммарными количествами ребер.

Мы благодарны М. М. Неизвестному за оказанную помощь в нахождении аналитических выражений функций $f^i_{\min}, f^i_{\max}, g^i_{\min}, g^i_{\max}$ $(i = 1, 2, 3)$.

Список литературы

[1] *d'Ambly C. G.:* Graphen mit genau drei Knotenpunkten gleicher Valenz. 18. Int. Wiss. Kolloq. Techn. Hochsch. Ilmenau, 1973. Ht. 2, 11—16.

[2] *Behzad M., Chartrand G.:* No graphs is perfect. American Math. Monthly *74* (1967), 962—963.

[3] *Харари Ф.:* Теория графов. Изд. Мир, М., 1973.

[4] *Кац А. О.:* Некоторые свойства вполне неоднородных графов. Ученые зап. ЛГУ им. П. Стучки, 1975, *т. 242*, 128—131.

[5] *Nebeský L.:* On connected graphs containing exactly two points of the same degree. Časopis pro pěstov. mat. *98* (1973), 3, 305—306.

[6] *Sedláček J.:* O perfektních a kvaziperfektních grafech. Časopis pro pěstov. mat. *100* (1975), 2, 135—141.

[7] *Зыков А. А.:* Теория конечных графов. Изд. Наука, Новосибирск, 1969.

Адресс авторов: Латвийский государственный университет им. Петра Стучки, г. Рига, бульв. Райниса 19, СССР.