Časopis pro pěstování matematiky, roč. 94 (1969), Praha

KONFIGURACE BODŮ ROVINNÉ KUBIKY

JAROMÍR KRYS, Olomouc

(Došlo 23. prosince 1967)

V tomto článku odvodíme nekonečně mnoho různých konfigurací rovinné kubiky. Budeme předpokládat základní znalosti o rovinné kubice.

Zavedeme sčítání regulárních bodů rovinné nerozložitelné kubiky. Nechť O je regulární bod kubiky. $P + Q = R$, kde R je třetí průsečík přímky $R'O$ s kubikou a R' je třetí průsečík přímky PQ s kubikou.

Věta 1. *Regulární body rovinné nerozložitelné kubiky tvoří vzhledem k uvedenému sčítání komutativní grupu G.*

Důkaz. Protože žádná spojnice dvou regulárních bodů (též tečna) neprochází singulárním bodem, dá se zde aplikovat důkaz obdobné věty uvedené v literatuře [1] str. 89–90.

Dále zřejmě platí, že O je prvkem nulovým a opačným prvkem k daném prvku A je třetí průsečík AT s kubikou, kde T je tečnový bod bodu O.

Poznámka 1. Snadno můžeme zavést sčítání tečen, to však v tomto článku nebudeme potřebovat.

Nechť $\bar{G}$ je podgrupou grupy G s konečným počtem prvků A_i v počtu g. Protože G je komutativní, musí zřejmě být též $\bar{G}$ komutativní a G se dá rozložit podle $\bar{G}$ na třídy navzájem kongruentních prvků. Tyto třídy tvoří faktorovou grupu $G/\bar{G}$. Protože $\bar{G}$ je konečná, tak třídy $\{B\} \in G/\bar{G}$ mají stejný počet prvků tj. g. Dále zřejmě platí, že nulová třída je $\bar{G}$. Dále k třídě $\{B\}$ je opačná $\{-B\}$, kterou dostaneme tak, že najdeme ke každému $B_i \in \{B\}$ prvek opačný.

Věta 2. *Tři navzájem různé třídy $\{B\}, \{C\}, \{T - (B + C)\}$ tvoří rovinnou konfiguraci $(3g_g, g_3^2)$. Při čemž body konfigurace jsou body těchto tříd a přímky konfigurace jsou všechny přímky na kterých leží právě jeden bod každé třídy.*

Důkaz. Třídy sčítáme tak, že sečteme všechny body jedné třídy se všemi body druhé třídy. Dostáváme tedy celkem g^2 přímek. Tyto přímky protínají kubiku ještě v dalších g' bodech. Spojíme-li těchto g' bodů s bodem O, tak třetí průsečíky těchto spojnic tvoří třídu $\{B + C\}$. Spojíme-li body třídy $\{B + C\}$ s bodem O, tak třetí průsečíky s kubikou tvoří třídu $\{T - (B + C)\}$, neboť pro každý bod $X \in \{T - (B + C)\}$ platí $B + C + X = T$. Musí tedy pomocné body v počtu $g' = g$ tvořit třídu $\{T - (B + C)\}$.

Větou 2 jsme převedli hledání konfigurací bodů rovinné kubiky na hledání podgrup $\bar{G}$ grupy G. Než přistoupíme k tomuto úkolu odvodíme zajímavé vlastnosti uvažovaných tříd a grup.

Věta 3. *Jestliže $\{2B\} \not\equiv \{T - B\}$, potom na každé spojnici X_iX_j, kde $X_i \in \{B\}$ $X_j \in \{B\}$ leží další bod kubiky $Y \notin \{B\}$.*

Důkaz. Body $Y \in \{T - B\}$. Kdyby $Y \in \{B\}$, potom platí $\{B\} \equiv \{T - 2B\}$. Platí totiž zřejmě, že dvě třídy, které mají 1 prvek společný, tak jsou totožné. Potom však $\{2B\} \equiv \{T - B\}$. To je však ve sporu s předpokladem.

Věta 4. *Každá spojnice M_iM_j, kde $M_i \in \{C\}$, $M_j \in \{C\}$ a $\{2C\} \equiv \{T - C\}$ protíná kubiku v dalším bodě $M \in \{C\}$.*

Důkaz. Podle předcházejícího musí $M \in \{T - T + C\} \equiv \{C\}$.

Poznámka 2. Hledejme třídy C splňující tvrzení věty 4. Snadno se dokáže z předcházejících vět, že každá třída, která má za svůj prvek aspoň jeden inflexní bod kubiky, je třídou splňující tvrzení věty 4.

Věta 5. *Nechť $T \in \bar{G}$, kde T je tečnový bod bodu O, potom $\bar{G}$ splňuje tvrzení věty* 4.

Důkaz. Přímka OT protne kubiku ještě v T, který zřejmě leží v $\bar{G}$.

Věta 6. *Nechť K je rovinná kubika rodu* 1 *tj. bez singulárního bodu. Potom v dané $G/\bar{G}$ existují právě* 4 *navzájem vesměs různé třídy $\{A\}$, $\{B\}$, $\{C\}$, $\{D\}$ takové, že $\{2A\} \equiv \{2B\} \equiv \{2C\} \equiv \{2D\}$.*

Důkaz. Uvažujme třídu $\{T - 2A\}$. Tato třída má právě g bodů. Každým bodem lze vésti k dané kubice právě 4 tečny a dostáváme právě $4g$ bodů dotyku těchto tečen. Nechť bod B je jeden z těchto bodů dotyku. Bod B určuje třídu $\{B\}$, třída $\{T - 2B\} \equiv \{T - 2A\}$, neboť mají společný bod a sice tečnový bod bodu B. Je zřejmé, že třídu $\{B\}$ tvoří právě g dotykových bodů uvažovaných výše. Stejným způsobem získáme třídy $\{C\}$ a $\{D\}$.

Věta 6'. *Nechť K je rovinná kubika s jedním uzlovým bodem. V dané $G/\bar{G}$ existují právě* 2 *navzájem různé třídy $\{A\}$, $\{B\}$ takové, že $\{2A\} \equiv \{2B\}$.*

Důkaz je stejný jako v předcházející větě. Zde však lze vésti z každého bodu právě dvě tečny.

Věta 7. *Nechť jedna z tříd uvažovaných ve větě 6 je* $\bar{G}$. *Potom* $G_1 \equiv \{A\} \cup \{B\} \cup \cup \{C\} \cup \{D\}$ *je podgrupou grupy* G.

Důkaz. Nechť $\bar{G} \equiv \{A\}$. Sečteme dva body G_1, např. X, Y. Bod $Z = X + Y$ určuje třídu grupy $G/\bar{G}$. $2Z = 2(X + Y) = 2X + 2Y$. $2X \in \{A\}$ a $2Y \in \{A\}$ a tedy $2Z \in \{A\}$. Třída $\{Z\}$ má tedy tu vlastnost, že $\{2Z\} \equiv \{A\}$. Tuto vlastnost mají však podle věty 6 právě třídy $\{A\}, \{B\}, \{C\}, \{D\}$ a musí tedy třída $\{Z\}$ být totožna s některou z nich.

Věta 7'. *Nechť jedna z tříd uvažovaných ve větě 6' je* $\bar{G}$. *Potom* $G_1 \equiv \{A\} \cup \{B\}$ *je podgrupou grupy* G.

Bezprostředním důsledkem vět 7 a 7' je:

Věta 8. *Nechť* G *splňuje tvrzení věty* 4 *a nechť* $G_1 \equiv \bar{G} \cup \bar{G}_1$, *kde* $\bar{G}_1$ *je množinou všech dotykových bodů tečen vedených ze všech bodů podgrupy* $\bar{G}$ *ke kubice. Potom* G_1 *je také podgrupou grupy* G.

Poznámka 3. Z předcházejících vět tedy plyne: Nechť $\bar{G}$ je podgrupou grupy G. Postupným užitím věty 7 a 7' dostáváme další podgrupy tj. celý systém podgrup a zřejmě platí, že následující podgrupa má v případě věty 7 4-násobný počet bodů a v případě věty 7' 2-násobný počet bodů. Tedy dostáváme podgrupy, které mají a) $g \cdot 4^n$ bodů a b) $g \cdot 2^n$ bodů.

Věta 9. *Označme body třídy* $\{B\}$ X_i, *kde* $i = 1, 2, \ldots, g$. *Nechť* $X' \in \{T - 2B\}$ *je tečnovým bodem* g' *bodů* X_i, *kde* $g' = 0, 1, 2, \ldots, g$, $i = 1, 2, \ldots, g$. *Dále nechť* $\{2B\} \not\equiv \not\equiv \{T - B\}$. *Potom body* $X_j \in \{B\}$, *kde* $j = g' + 1, g' + 2, \ldots, g$ *lze rozdělit právě jedním způsobem do disjunktních dvojic tak, že každá spojnice bodů těchto dvojic prochází bodem* X'.

Důkaz. Třída $\{T - 2B\}$ je tvořena body, které dostaneme jako třetí průsečíky spojnic bodů třídy $\{B\}$. Každým bodem $X \in \{B\}$ prochází právě g navzájem různých těchto spojnic. (Jedna z nich je tečna v X.) Na každé z těchto g přímek leží právě jeden bod $X' \in \{T - 2B\}$. Jinými slovy spojnice $X' \in \{T - 2B\}$ s každým bodem $X \in \{B\}$ patří mezi uvažované spojnice a je to tedy buď tečna v některém $X \in \{B\}$, nebo spojnice dvou různých bodů $X_i \in \{B\}$.

Poznámka 4. Použijeme-li předcházející věty a věty o projektivním vytvoření kubiky, lze určit počet jednoduchých kuželoseček, které procházejí právě 6 různými body konfigurace uvažované ve větě 2. Toto přenecháme čtenáři.

V dosavadních úvahách jsme nezkoumali vzájemný vztah O a podgrupy $\bar{G}$. Dá se snadno dokázat:

1. Nechť $\bar{G}$ je podgrupou grupy G při zvoleném O. Zvolíme-li za bod O jiný bod množiny $\bar{G}$, pak množina $\bar{G}$ zůstane podgrupou grupy G.

2. Nechť $\{A\} \not\equiv \bar{G}$ je třídou grupy $G/\bar{G}$ při zvoleném O. Zvolíme-li za bod O bod ležící v $\{A\}$, potom $\{A\}$ je podgrupou grupy G a $G/\bar{G} \equiv G/\{A\}$.

Nyní přistoupíme k řešení základní úlohy tj. určení podgrup grupy G. Uvažujme rovinnou kubiku rodu 1.

Věta 10. *Nechť O je inflexním bodem kubiky. Potom množina J_0 všech inflexních bodů rovinné kubiky rodu 1 je podgrupou grupy G.*

Důkaz. Plyne bezprostředně z vlastností této množiny. Spojnice dvou inflexních bodů kubiky ji protne po třetí rovněž v inflexním bodě.

Podle poznámky 3 dostaneme systém podgrup $J_0, J_1, \ldots, J_n$. J_n má právě 9.4^n bodů. Platí tedy:

Věta 11. *Tři různé třídy grupy $G/J_n\{A\}, \{B\}, \{T - A - B\}$ tvoří rovinnou konfiguraci typu $(27.4^n_{9.4^n}\ 9^2.4^{2n}_3)$, kde n je nezáporné celé číslo.*

Věta 12. *Nechť J je inflexní bod a T bod dotyku tečny vedené z J ke kubice. Označme D_0 množinu skládající se z bodů J a T. Množina D_0 je podgrupou grupy G, jestliže za O zvolíme J, nebo T.*

Důkaz. Nechť O je J. Zřejmě je: $T + O = T$, $T + T = O$, $O + O = O$.

Nyní opět zavedeme $D_0, D_1, \ldots, D_n$. D_n má 2.4^n prvků. Platí tedy:

Věta 13. *Existují rovinné konfigurace bodů rovinné kubiky rodu 1 typu $(6.4^n_{2.4^n}, 4.4^{2n}_3)$, kde n je přirozené číslo.*

Další množinu označme E_1 a nechť obsahuje J a T_1, T_2, T_3, kde T_i jsou body dotyku tečen vedených z J ke kubice.

Věta 14. *Množina E_1 je podgrupou grupy G, jestliže O je jeden z bodů E_1.*

Důkaz. Za bod O zvolme J. Zřejmě je: $T_1 + O = T_1$, $T_2 + O = T_2$, $T_3 + O = T_3$, $T_1 + T_2 = T_3$, $T_1 + T_3 = T_2$, $T_3 + T_2 = T_1$, $T_1 + T_1 = O$, $T_2 + T_2 = O$, $T_3 + T_3 = O$.

Opět utvořme $E_1, E_2, \ldots, E_n$. E_n má právě 4^n prvků. Platí tedy:

Věta 15. *Existují rovinné konfigurace bodů rovinné kubiky rodu 1 typu $(3.4^n_{4^n}, 4^{2n}_3)$, kde n je přirozené číslo.*

Poznámka 5. Pro $n = 1$ dostáváme známou Hesseovu konfiguraci. Třídy grupy G/E_1 jsou dotykové body tečen vedených z daného bodu ke kubice. O této čtveřici platí věta, že diagonální vrcholy tohoto čtyrrohu leží rovněž na kubice. Tato vlastnost bezprostředně plyne z věty 9. Věta 9 nám však tuto vlastnost zobecňuje.

Označme F_0 množinu, která obsahuje tři inflexní body ležící v přímce.

Věta 16. *Množina F_0 je podgrupou grupy G, jestliže za O zvolíme bod, který leží v F_0.*

Důkaz. Označme uvažované body J_1, J_2, J_3. Za bod O zvolme J_1. Platí $O + J_2 = J_2$, $O + J_3 = J_3$, $O + O = O$, $J_2 + J_3 = O$, $J_2 + J_2 = J_3$, $J_3 + J_3 = J_2$.

Nyní utvořme opět $F_0, F_1, \ldots, F_n$. F_n má právě 3.4^n prvků.

Věta 17. *Existují rovinné konfigurace bodů rovinné kubiky rodu 1 typu* $(9.4^n_{3.4^n}, 9.4^{2n}_3)$, *kde n je nezáporné celé číslo.*

Uvažujme nyní rovinnou kubiku s uzlovým bodem. Tato kubika má právě 3 inflexní body a dále platí, že z každého bodu této kubiky lze vésti právě 2 tečny. Platí:

Věta 18. *Existují rovinné konfigurace bodů rovinné kubiky s uzlovým bodem typu* $(9.2^n_{3.2^n}, 9.2^{2n}_3)$, *kde n je nezáporné celé číslo.*

Věta 19. *Existují rovinné konfigurace bodů rovinné kubiky s uzlovým bodem typu* $(3.2^n_{2^n}, 2^{2n}_3)$, *kde n je přirozené číslo.*

Poznámka 6. Otázkou zůstává zda jsme našli všechny podgrupy grupy G.

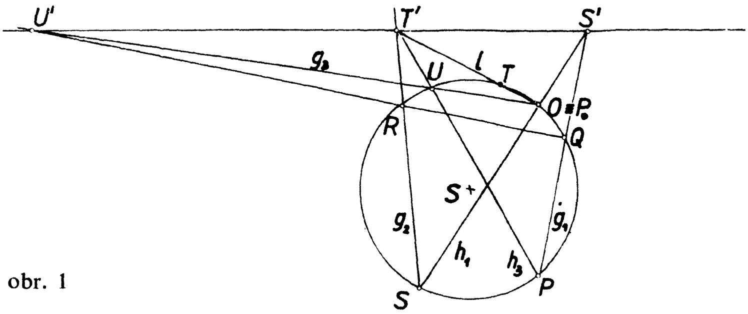
Všechny konfigurace, které zde byly uvedeny mají právě 3 g-tice prvků o nichž platí, že prvky každé g-tice jsou navzájem odděleny tj. žádné dva neleží na přímce konfigurace. Na kubice existují i takové konfigurace kde toto neplatí. Další konfigurace najdeme v třídách, které splňují větu 4. Dá se snadno spočítat kolik v této třídě existuje přímek na nichž leží právě tři různé body této třídy a právě tak počet přímek s touto vlastností procházející daným bodem dané třídy. Nyní vynecháním některých přímek a bodů můžeme získat další konfigurace. Obecný postup znám není a proto musíme postupovat v každém případě zvlášť.

V další části tohoto článku rozšíříme platnost předcházejících vlastností i na kubiku složenou z přímky a kuželosečky. Sčítání bodů této složené kubiky zavedeme stejně jako v případě kubiky nerozložitelné. Zvolíme O na kuželosečce. Dva body kuželosečky sečteme tak, že průsečík jejich spojnice s přímkou spojíme s O a druhý průsečík této přímky s kuželosečkou je součtem daných bodů.

Věta 20. *Nechť kubika C je složena z jednoduché kuželosečky k a přímky p. Potom množina bodů kuželosečky k, které jsou regulárními body kubiky C tvoří vzhledem k uvažovanému sčítání komutativní grupu H.*

Důkaz. Nulovým elementem je zřejmě bod O. Opačným prvkem k prvku A je bod A', který dostaneme jako druhý průsečík přímky AT s kuželosečkou k, kde T je průsečík tečny kuželosečky k v bodě 0 s přímkou p. Komutativnost je zřejmá. Dokažme nyní asociativnost tohoto sčítání. Budeme postupovat shodně s literaturou [1] str. 89 a 90, dokonce použijeme pro vyjádření bodů stejných písmen. Použijeme k sledování důkazu obrázku.

Máme dokázat $(P + Q) + R = P + (Q + R)$. Nechť $P + Q = S$, $S + R = T$, $Q + R = U$. Má tedy platit $P + U = T$. Nechť přímka PQ protíná kubiku (přímku) ještě v S', SR ještě v T' a QR ještě v U'. Potom P, Q, S' leží na g_1, S', O, S leží na h_1, S, R, T' na g_2, O, T, T' na 1, Q, R, U' na h_2, O, U, U' na g_3. Dokažme, že body P, U, T' leží na přímce h_3. Původní kubika s kubikou určenou g_1, g_2, g_3 se protínají



obr. 1

v těchto 9 bodech: $P, Q, S', S, R, T', U, U', O$. Uvažujme kubiku h_1, h_2, h_3, kde h_3 je spojnice bodů PU. Tato kubika prochází 8 body z uvažovaných 9 společných bodů původní kubiky s kubikou g_1, g_2, g_3 a tedy podle známé věty musí procházet i devátým průsečíkem tj. T' a bodem T' může procházet jedině h_3. Věta je tedy dokázána.

Dále budeme postupovat jako u nerozložitelné kubiky. Nechť $\overline{H}$ je podgrupou grupy H, která má konečný počet bodů h. Grupa H se dá rozložit podle $\overline{H}$ na třídy navzájem kongruentních prvků. Tyto třídy tvoří grupu $H/\overline{H}$. Pomocné body, které tvořily ve větě 2 třídu $\{T - (B + C)\}$ zde nejsou prvky grupy. Jejich počet však musí být právě h, neboť v opačném případě by měla třída $\{B + C\}$ počet prvků různý od h. Platí tedy: Nahradíme-li ve větě 2 třídu $\{T - (B + C)\}$ množinou pomocných bodů, které dostaneme při sčítání tříd $\{B\}$ a $\{C\}$, platí věta 2 i pro zkoumanou kubiku. Aplikujme ostatní věty, které mohou přicházet v úvahu pro grupu H. Zřejmě neplatí, respektive žádná třída nesplňuje věty 4, 5, 6, 7, 8 dále platí věta 3,9 a věty 6′, 7′ za předpokladu, že přímka p není tečnou k. Z vět 6′, 7′ vyplývá, že můžeme vyslovit větu obdobnou větě 8.

Věta 21. *Nechť $\overline{H}$ je podgrupou grupy H a nechť přímka p není tečnou kuželosečky k. Pomocné body při sčítání $\overline{H}$ s $\overline{H}$ označme X_i. Veďme ze všech X_i tečny ke k. Označme množinu dotykových bodů těchto tečen H_1. Platí: H_1 je podgrupou grupy H.*

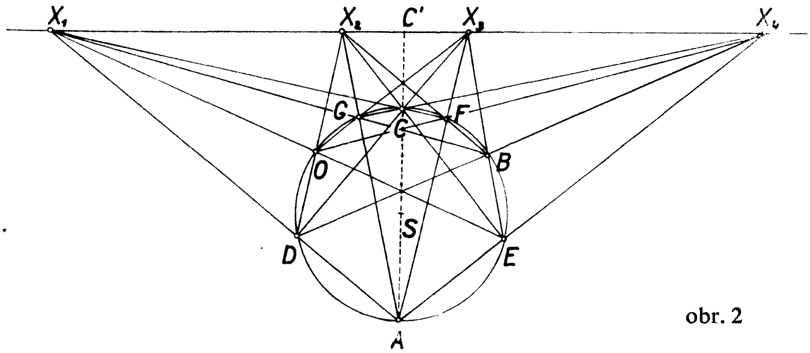
Věta 22. *Nechť C je složena z jednoduché kuželosečky k a přímky p, která není tečnou kuželosečky k. Nechť přímka AB, kde $A \in k$, $B \in k$ je polárou bodu $X \in p$. Zvolíme-li jeden z bodů A, B za O potom body A, B určují grupu H_1.*

Důkaz. Nechť $A = O$. $B + O = B$, $B + B = O$.

Opět dostáváme $H_1, H_2, \ldots, H_n$. H_n má právě 2^n prvků. Platí tedy:

Věta 23. *Nechť $\{A\}$, $\{B\}$ jsou dvě různé třídy grupy $H/\bar{H}$. Označme X_i pomocné body při sčítání tříd $\{A\}$ a $\{B\}$. Třídy $\{A\}$, $\{B\}$ a body X_i tvoří rovinnou konfiguraci typu $(3.2^n_{2^n}, 2^{2n}_3)$, kde n je přirozené číslo.*

Poznámka 7. Je-li p nesečnou kuželosečky k, potom všechny uvažované body jsou reálné. Na obr. 2 (k je kružnice) je sestrojen případ pro $n = 2$ tj. známé konfigurace $(12_4, 16_3)$.



obr. 2

Zvolme nyní kuželosečku k a na ní tři různé body A, B, C. Sestrojme tečny v těchto bodech a, b, c. Uvažujme šestiúhelník A, A, B, B, C, C a sestrojme tzv. Pascalovu přímku pro tento šestiúhelník. Uvažujme nyní kubiku složenou z dané kuželosečky a této přímky. Snadno se dá dokázat: Zvolíme-li za O jeden z uvažovaných bodů A, B, C, potom tyto body tvoří podgrupu K_0 grupy H. Opět můžeme vytvořit grupy $K_0, K_1, K_2, \ldots, K_n$. K_n má 3.2^n prvků.

Věta 24. *Nechť $\{A\}$ a $\{B\}$ jsou dvě různé třídy grupy H/K_n. Nechť X_i jsou pomocné body při sčítání tříd $\{A\}$ a $\{B\}$. Třídy $\{A\}$, $\{B\}$ a body X_i tvoří rovinnou konfiguraci typu $(9.2^n_{3.2^n}, 9.2^{2n}_3)$, kde n je nezáporné číslo.*

Závěrečná poznámka. Myslíme si, že tento příspěvek k hledání rovinných konfigurací bodů kubiky je zajímavý a že dosud tímto způsobem nebyl řešen. Výsledky tj. rozšíření platnosti známé věty o tom, že kubiku můžeme studovat jako grupu budou mít i jiné uplatnění. Např. vše můžeme zdualizovat.

Literatura

[1] *B. L. van der Waerden:* Einführung in die algebraiche Geometrie. Berlín 1939
[2] *B. Bydžovský:* O dvou nových konfiguracích $(12_4, 16_3)$. Čas. pěst. mat. *79* (1954), 219—223.
[3] *J. Metelka:* O rovinných konfiguracích $(12_4, 16_3)$. Čas. pěst. mat. *80* (1955), 133—145.

Adresa autora: Olomouc, Leninova 26 (Palackého universita).

Zusammenfassung

ÜBER PUNKTKONFIGURATIONEN EINER EBENEN KURVE 3. ORDNUNG

JAROMÍR KRYS, Olomouc

In diesem Artikel wird die Existenz folgender Punktkonfigurationen einer ebenen Kurve 3. Ordnung bewiesen:

$$\text{a) } (27.4^n_{9.4^n}, 9.4^{2n}_3)\,, \quad \text{b) } (6.4^n_{2.4^n}, 4.4^{2n}_3)\,, \quad \text{c) } (3.4^n_{4^n}, 4^{2n}_3)\,,$$
$$\text{d) } (9.4^n_{3.4^n}, 9.4^{2n}_3)\,, \quad \text{e) } (9.2^n_{3.2^n}, 9.2^{2n}_3)\,, \quad \text{f) } (3.2^n_{2^n}, 2^{2n}_3)\,,$$

dabei ist n eine natürliche Zahl, mit Ausnahme der Fälle a), d), e), in denen auch $n = 0$ sein kann. Zum Beweisen der Sätze, die in dem Artikel enhalten sind, wird folgender Satz benütz: Die Menge regulären Punkten einer ebenen irreduziblen Kurve 3. Ordnung bildet (bei passender Definition der Addition) eine komutative Gruppe.