Časopis pro pěstování matematiky

Imrich Pokorný

О норме сингулярного интегрального оператора на эллипсе

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 110 (1985), No. 2, 158--171

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108584

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 110 (1985), Praha

О НОРМЕ СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА НА ЭЛЛИПСЕ

IMRICH POKORNÝ, (ИМРИХ ПОКОРНЫ), Košice

(Поступило в редакцию 18/VIII. 1983)

В настоящей работе мы будем заниматься оценкой нормы сингулярного интегрального оператора

$$(S\varphi)(z) = \frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi(t)}{t-z}\,\mathrm{d}t \tag{1}$$

в пространстве $L_2(\Gamma)$, где Γ – заданный эллипс.

Точная величина нормы сингулярного интегрального оператора известна в случаях, когда контуром-носителем является прямая, отрезок или окружность в пространстве L_2 (см. [4], стр. 67–70) и в более общем случае, когда контуром-носителем является единичная окружность γ с центром в начале координат в пространстве $L_p(\gamma, |t - t_0|^\alpha)$ (см. [6]). Также уже решены некоторые вопросы и для случая, когда контур-носитель состоит из счетного множества кривых (см. [1]).

В настоящей работе с помощью специального базиса пространства $L_2(\Gamma)$ найдено матричное представление оператора (1), и с его помощью одна оценка снизу и одна оценка сверху нормы оператора S на эллипсе Γ.

Введем следующие обозначения. Пусть Γ – заданный эллипс, a – его большая полуось, b – его малая полуось и $\lambda = (a - b)/(a + b)$. Без ограничения общности мы можем считать, что $(a + b) = 2$. Следовательно, $0 < \lambda < 1$. Положим $D^+ = \{w: |w| < 1\}$, $D^- = \{w: |w| > 1\}$. Напомним понятие двойного факториала. Пусть n натуральное число, тогда

$$(2n)!! = 2 \,.\, 4 \,.\, \ldots \,.\, (2n)\,, \quad \text{и}$$
$$(2n - 1)!! = 1 \,.\, 3 \,.\, \ldots \,.\, (2n - 1)\,.$$

С целью упрощения записи положим $0!! = (-1)!! = 1$, и $(-3)!! = -1$.

Пусть i и j целые числа, тогда

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad i = j\,, \\ 0, & \text{если} \quad i \neq j\,. \end{cases}$$

В настоящей работе мы везде рассматриваем только ту однозначную ветвь двухзначной функции $\sqrt{w}$, которая для $w = 1$ принимает значение 1.

В случае, когда Γ – окружность или часть прямой, сингулярный интеграл (1) уже хорошо изучен. Поэтому, если нужно проанализировать сингулряный интеграл в случае другой кривой, естественно попытаться свести рассматриваемый случай к случаю окружности или прямой (см. [3], стр. 58). Применим один такой способ решения задачи.

Воспользуемся следующим отображением части комплексной плоскости

$$z = \psi(w) = w + \lambda w^{-1}\,, \tag{2}$$

где w – точка окружности $\gamma(w \in \gamma = \{w\colon |w| = 1\})$ или ее внешней области $(w \in D^-)$.

Нетрудно показать, что отображение (2) обладает следующими свойствами:

1. ψ отображает взаимно-одонозначно окружность γ на эллипс Γ.
2. ψ не меняет направленность обхода.
3. ψ отображает взаимно-однозначно внешность окружности γ на внешность эллипса Γ.

Следовательно, отображение (2), областью определения которого является окружность γ и ее внешность, имеет обратную функцию, областью определения которой является эллипс Γ и его внешность.

Матричное представление оператора S получим с помощью ортогонального базиса $\{f_n(t)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ пространства $L_2(\Gamma)$, для которого $(Sf_n)(t)$ разлагается в сходящийся ряд по данной системе функций:

$$(Sf_n)(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{k,n} f_k(t)\,, \tag{3}$$

здесь $a_{k,n}$ – константы для $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Элементы этого базиса находим из выражения

$$f_n(\psi(\tau))\,\sqrt{(1 - \lambda\tau^{-2})} = \tau^n \tag{4}$$

для любого целого числа n.

В наших обозначениях (l – длина эллипса Γ)

$$\int_0^l f_m(t)\,\overline{f_n(t)}\,\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} f_m(\psi(\tau))\,\overline{f_n(\psi(\tau))}\,|\psi'(\tau)|\,\mathrm{d}\delta = \int_0^{2\pi} \tau^m \overline{\tau^n}\,\mathrm{d}\delta\,,$$

где t – элемент, а $\mathrm{d}s$ – элементарная длина дуги эллипса Γ;

τ – элемент, а $\mathrm{d}\delta$ – элементарная длина дуги окружности γ.

Нетрудно проверить, что справедлива следующая лемма:

Лемма 1. *Система $\{f_n(t)\}_{n=-\infty}^{\infty}$, определяемая выражением* (4), *является ортогональным базисом пространства $L_2(\Gamma)$.*

В дальнейшем нам понадобится несколько простых фактов, которые сформулированы в леммах 2, 3 и 4.

Лемма 2. *Для* $\gamma = \{w: |w| = 1\}$ *и целого* n *интеграл*

$$\Phi(u) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\tau^{n+1} \sqrt{(1 - \lambda\tau^{-2})}}{\tau - u} \, d\tau \tag{5}$$

вычисляется следующим образом:

1. *Для* $u \in D^+$

$$\Phi(u) = \begin{cases} R(n, u), & \textit{для} \quad n \geqq -1, \\ 0, & \textit{для} \quad n < -1. \end{cases}$$

2. *Для* $u \in D^-$

$$\Phi(u) = \begin{cases} -P(n, u), & \textit{для} \quad n \geqq -1, \\ -u^{n+1} \sqrt{(1 - \lambda u^{-2})}, & \textit{для} \quad n < -1. \end{cases}$$

Здесь

$$P(n, w) = -w^{n+1} \sum_{k=l+1}^{\infty} \frac{(2k - 3)!!}{(2k)!!} \lambda^k w^{-2k} \quad \textit{и}$$

$$R(n, w) = w^{n+1} - w^{n+1} \sum_{k=1}^{l} \frac{(2k - 3)!!}{(2k)!!} \lambda^k w^{-2k},$$

где l — *целая часть выражения* $(n + 1)/2$.

Доказательство. Пусть $n < -1$. В этом случае подынтегральное выражение имеет только один полюс первой кратности в области D^- и поэтому

$$\operatorname{res}_u \frac{\tau^{n+1} \sqrt{(1 - \lambda\tau^{-2})}}{\tau - u} = u^{n+1} \sqrt{(1 - \lambda u^{-2})}.$$

Следовательно,

$$\Phi(u) = \begin{cases} 0, & \text{для} \quad u \in D^+ \\ -u^{n+1} \sqrt{(1 - \lambda u^{-2})}, & \text{для} \quad u \in D^- \end{cases}.$$

Пусть $n \geqq -1$. Разложим $\sqrt{(1 - \lambda w^{-2})}$ в ряд Лорана в окрестности бесконечно-удаленной точки:

$$\sqrt{(1 - \lambda w^{-2})} = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k - 3)!!}{(2k)!!} \lambda^k w^{-2k}$$

(Этот ряд сходится для $|\lambda w^{-2}| < 1$.).

Тогда имеет место равенство

$$w^{n+1} \sqrt{(1 - \lambda w^{-2})} = R(n, w) + P(n, w), \quad \text{для} \quad n \geqq -1.$$

Теперь мы используем следующее свойство интеграла типа Коши: если функция $f(z)$ аналитическая в D^+ и непрерывная в $D^+ + \gamma$, то

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\tau)}{\tau - z}\,\mathrm{d}\tau = \begin{cases} f(z)\,, & \text{для} \quad z \in D^+ \\ 0\,, & \text{для} \quad z \in D^-\,; \end{cases}$$

если функция $f(z)$ аналитическая в D^- и непрерывная в $D^- + \gamma$, то

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\tau)}{\tau - z}\,\mathrm{d}\tau = \begin{cases} f(\infty)\,, & \text{для} \quad z \in D^+ \\ -f(z) + f(\infty)\,, & \text{для} \quad z \in D^- \end{cases}$$

(см. [2], стр. 18).

На основе этого свойства интеграла типа Коши и того, что

1. $R(n, w)$ – аналитическая в D^+ и непрерывная в $D^+ + \gamma$,
2. $P(n, w)$ – аналитическая в D^- и непрерывная в $D^- + \gamma$ и исчезает в бесконечно-удаленной точке,
3. оператор S линейен

получаем, что в этом случае

$$\Phi(u) = \begin{cases} R(n, u)\,, & \text{для} \quad u \in D^+ \\ -P(n, u)\,, & \text{для} \quad u \in D^-\,. \end{cases}$$

Лемма 2 доказана.

Пемма 3. *Пусть k, i, m – неотрицательные целые числа и пусть $n = 2m$. Тогда верны следующие тождества*:

1.

$$1 - \sum_{j=1}^{k} \frac{(2j-3)!!}{(2j)!!} = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\,,$$

2.

$$\frac{(n-1)!!}{n!!} - \sum_{j=1}^{i} \frac{(2j-3)!!}{(2j)!!}\,\frac{(n+2j-1)!!}{(n+2j)!!} =$$

$$= \frac{(2i-1)!!}{(2i)!!}\,\frac{(n+2i+1)!!}{(n+2i)!!}\,\frac{1}{n+1}\,,$$

3. *для* $m > i$

$$\frac{(n-1)!!}{n!!} - \sum_{j=1}^{i} \frac{(2j-3)!!}{(2j)!!}\,\frac{(n-2j-1)!!}{(n-2j)!!} =$$

$$= \frac{(2i-1)!!}{(2i)!!}\,\frac{(n-2i-1)!!}{(n-2i-2)!!}\,\frac{1}{n}\,,$$

4. *для* $n > 0,\ k > 0$

$$\sum_{j=0}^{k-1} \frac{(2j-1)!!}{(2j)!!} \frac{(n+2j-3)!!}{(n+2j)!!} =$$

$$= \frac{(2k-1)!!}{(2k-2)!!} \frac{(n+2k-3)!!}{(n+2k-2)!!} \frac{1}{n-1},$$

5. *для* $n > 0$

$$\frac{(n-1)!!}{n!!} - \sum_{j=1}^{m} \frac{(2j-3)!!}{(2j)!!} \frac{(n-2j-1)!!}{(n-2j)!!} = 0 .$$

Доказательство. Доказательство проводить не будем; первые четыре тождества доказываются с помощью индукции, пятое является простым следствием тождества 3.

Лемма 4. *Пусть для любого натурального j и неотрицательного целого n*

$$a_{j,n} = \begin{cases} \dfrac{(j-1)!!}{(j-2)!!} \dfrac{(n-1)!!}{n!!} \dfrac{2n+1}{|n-j+1|(n+j)}, & \text{\textit{для четных} } j,\ n \\ \dfrac{(j-2)!!}{(j-1)!!} \dfrac{n!!}{(n-1)!!} \dfrac{2j-1}{|n-j+1|(n+j)}, & \text{\textit{для нечетных} } j,\ n \\ 0, \text{\textit{ в других случаях}} & \end{cases}$$

и $c = \dfrac{1}{2} \prod_{l=1}^{\infty} \left(1 + \dfrac{1}{4l^2(4l-3)}\right)$.

Тогда $0 \leqq a_{j,n} < c$ *для любых целых* $j > 0$ *и* $n \geqq 0$.

Доказательство. Нетрудно показать, что $c < 1$. Неравенство $a_{j,n} \geqq 0$ следует из того, что в определение $a_{j,n}$ входят только положительные константы. Простой подстановкой можно проверить, что $a_{2i,2m} = a_{2m+1,2i-1}$. Поэтому достаточно рассмотреть случай четных j и n.

Пусть $j > 0$ и $n \geqq 0$ четные. Доказательство состоит из четырех шагов:

1. Пусть $n = 2k$ а $j = 2k + 2$, где $k \geqq 0$; тогда $a_{2,0} = \frac{1}{2}$,

$$a_{j,n} = \left(\frac{(n-1)!!}{n!!}\right)^2 \frac{2n+1}{2} \quad \text{и} \quad \frac{a_{n+2,n}}{a_{n,n-2}} = 1 + \frac{1}{n^2(2n-3)} .$$

С помощью индукции получим

$$a_{n+2,n} = \frac{1}{2} \prod_{l=1}^{k} \left(1 + \frac{1}{4l^2(4l-3)}\right) < c .$$

2. Пусть $j = n > 0$, тогда

$$a_{j,n} = \left(\frac{(n-1)!!}{n!!}\right)^2 \frac{2n+1}{2}\,.$$

Аналогично случаю 1 получаем $a_{n,n} < c$.

3. Пусть $j > n + 2$, тогда

$$\frac{2}{j-n-1} > \frac{1}{j-2}$$

и

$$\frac{a_{j,n}}{a_{j-2,n}} = \frac{j-1}{j-2}\frac{j-n-3}{j-n-1}\frac{n+j-2}{n+j} <$$

$$< \left(1 + \frac{1}{j-2}\right)\left(1 - \frac{2}{j-n-1}\right) < 1\,.$$

В этом случае $a_{j-2,n} > a_{j,n}$ и это значит, что $a_{j,n}$ уменьшается, когда j возрастает.

4. Пусть $j < n$.

а) Если $j = 2$, тогда $n > 2$ и $6n - 3 > 0$. Получаем

$$\frac{a_{2,n}}{a_{2,n-2}} = \frac{n-1}{n}\frac{2n+1}{2n-3}\frac{n-3}{n-1}\frac{n}{n+2} = 1 - \frac{6n-3}{(2n-3)(n+2)} < 1\,.$$

б) Если $j \geqq 4$, тогда имеет место

$$\frac{4}{2n-3} < \frac{2}{n-j+1}$$

и

$$\frac{a_{j,n}}{a_{j,n-2}} = \frac{n-1}{n}\frac{2n+1}{2n-3}\frac{n-j-1}{n-j+1}\frac{n+j-2}{n+j} <$$

$$< \left(1 + \frac{4}{2n-3}\right)\left(1 - \frac{2}{n-j+1}\right) < 1\,.$$

В этом случае $a_{j,n-2} > a_{j,n}$ и это значит, что $a_{j,n}$ уменьшается, когда n возрастает.

Таким образом, утверждение леммы полностью доказано.

Рассмотрим теперь выражение Sf_n. Пусть z — точка эллипса Γ и пусть w — ей соответствующая точка окружности γ. Тогда на основе (4), после разложения на простые дроби подынтегрального выражения, которое получается после отображения (2) мы получим:

$$(6) \qquad (Sf_n)(z) = \frac{1}{u-v}\left\{\frac{1}{\pi i}\int_\gamma \frac{\tau^{n+1}\sqrt{(1-\lambda\tau^{-2})}}{\tau-u}\,\mathrm{d}\tau - \right.$$

$$-\frac{1}{\pi i}\int_{\gamma}\frac{\tau^{n+1}\sqrt{(1-\lambda\tau^{-2})}}{\tau-v}\,\mathrm{d}\tau\Big\}\,,$$

где $u = w$ и $v = \lambda w^{-1}$.

Из того, что $uv = \lambda$ и $|u| = 1$ следует, что $|v| = \lambda$, и следовательно $v \in D^+$.

На основе (6), лемм 2, 3, формул Сохоцкого, некоторых алгебраических тождеств и того, что $u \in \gamma$ и $v \in D^+$ окончательно получим:

$$(7)\qquad (Sf_n)(z) = \begin{cases} f_n(z) + 2\sum_{j=1}^{\infty} d_{j,n} f_{-j}(z)\,, & \text{для} \quad n > -1 \\ -f_n(z)\,, & \text{для} \quad n \leqq -1\,, \end{cases}$$

где

$$d_{j,n} = \begin{cases} \dfrac{(j-1)!!}{(j-2)!!}\dfrac{(n-1)!!}{n!!}\dfrac{2n+1}{(n-j+1)(n+j)}\lambda^{(n+j)/2}, & \text{для четных } n, j \\ \dfrac{(j-2)!!}{(j-1)!!}\dfrac{n!!}{(n-1)!!}\dfrac{2j-1}{(n-j+1)(n+j)}\lambda^{(n+j)/2}, & \text{для нечетных } n, j \\ 0\,, \quad \text{в других случаях.} \end{cases}$$

Для ряда (7) существует сходящийся мажорантный ряд. Действительно, на основе (4) мы имеем

$$|f_n(t)| = \left|\frac{\tau^n}{\sqrt{(1-\lambda\tau^{-2})}}\right| = \frac{1}{\left|\sqrt{(1-\lambda\tau^{-2})}\right|}\,,$$

где $t = \psi(\tau)$.

Так как для $\alpha \in \langle 0; 2\pi)$ и $\lambda \in (0; 1)$ имеет место

$$|1-\lambda\tau^{-2}|^2 = |1-\lambda\exp(-2\alpha i)|^2 =$$
$$= (1-\lambda\cos(2\alpha))^2 + (\lambda\sin(2\alpha))^2 \geqq (1-\lambda\cos(2\alpha))^2 \geqq (1-\lambda)^2\,,$$

то для всех целых n

$$|f_n(t)| \leqq \frac{1}{\sqrt{(1-\lambda)}}\,.$$

На основе леммы 4 для $n = 2m \geqq 0$ и $j = 2i$, т. е. для четных n и j или для $n = 2m + 1 > 0$ и $j = 2i - 1$, т. е. для нечетных n и j получаем:

$$|f_n(t)| + 2\sum_{j=1}^{\infty}|d_{j,n}\lambda^{(j+n)/2}|\,|f_{-j}(t)| \leqq \frac{1}{\sqrt{(1-\lambda)}}(1 + 2c\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^{i+m})\,.$$

В этом случае следующий сходящийся ряд

$$\frac{1}{\sqrt{(1-\lambda)}}(1 + 2c\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^{i+m}) = \frac{1}{\sqrt{(1-\lambda)}}\left(1 + \frac{2c\lambda^{m+1}}{1-\lambda}\right)$$

является мажорантным для ряда (7). Следовательно, ряд (7) сходится даже абсолютно.

Мы показали, что элементы матрицы матричного представления сингулярного интегрального оператора S имеют вид:

$$a_{i,j} = \begin{cases} \delta_{i,j}, & \text{для} \quad i \geqq 0 \\ -\delta_{i,j}, & \text{для} \quad i < 0 \quad \text{и} \quad j < 0 \\ 2d_{-i,j}, & \text{для} \quad i < 0 \quad \text{и} \quad j \geqq 0, \end{cases}$$

где i — номер строки и j — номер столбца.

В дальнейшем нам понадобится еще одна система функций $\{e_i(z)\}_{i=-\infty}^{\infty}$, которую мы получим из $\{f_i(z)\}_{i=-\infty}^{\infty}$ следующим образом:

$$\text{(8)} \qquad \begin{cases} e_i(z) = f_i(z) - \dfrac{2}{A^2 - 1} \sum\limits_{j=1}^{\infty} d_{j,i} f_{-j}(z), & \text{для} \quad i \geqq 0 \\ e_i(z) = f_i(z), & \text{для} \quad i < 0, \end{cases}$$

где $d_{j,i}$ — коэффициенты из (7) и A — параметр ($A > 1$).

Очевидно, что $\{e_i(z)\}_{i=-\infty}^{\infty}$ образует базис пространства $L_2(\Gamma)$.

Известно, что система всебозможных конечных линейных комбинаций элементов базиса образует плотное подмножество пространства $L_2(\Gamma)$.

Пуст $f \in L_2(\Gamma)$, A — параметр и пусть

$$\text{(9)} \qquad g(f) = \frac{1}{2\pi} (A^2 \|f\|^2 - \|Sf\|^2).$$

Известно следующее: если $g(f) \geqq 0$ на плотном подмножестве данного пространства, то $g(f) \geqq 0$ на всем пространстве. Поэтому достаточно рассмотреть оператор S на множестве функций вида:

$$\text{(10)} \qquad f(z) = \sum_{m=-M}^{M} c_m e_m(z),$$

где M — любое неотрицательное целое число и c_m — комплексные константы.

Из (10), (8) и (7) мы имеем:

$$\text{(11)} \qquad (Sf)(z) = \sum_{m=0}^{M} c_m f_m(z) + \sum_{j=M+1}^{\infty} \frac{2A^2}{A^2 - 1} \sum_{m=0}^{M} c_m d_{j,m} f_{-j}(z) + $$
$$+ \sum_{j=1}^{M} \left(\frac{2A^2}{A^2 - 1} \sum_{m=0}^{M} c_m d_{j,m} - c_{-j} \right) f_{-j}(z).$$

Известно, что оператор S ограничен в $L_2(\Gamma)$, и поэтому

$$\text{(12)} \qquad \|Sf\| \leq \|S\| \|f\|.$$

Если воспользоваться определением нормы и тем, что

$$\frac{1}{2\pi}\|f_0\|^2 = 1 \quad \text{и} \quad \frac{1}{2\pi}\|Sf_0\|^2 = 1 + 4\sum_{j=1}^{\infty} d_{j,0}^2 > 1$$

(см. (7) для $\lambda > 0$), то мы имеем

$$\|S\| = \sup\left\{\frac{\|Sf\|}{\|f\|} : f \in L_2(\Gamma)\right\} \geqq \frac{\|Sf_0\|}{\|f_0\|} = \sqrt{(1 + 4\sum_{j=1}^{\infty} d_{j,0}^2)} > 1 .$$

Если для $f(z)$ вида (10) вычислить $\frac{1}{2\pi}\|f\|^2$, $\frac{1}{2\pi}\|Sf\|^2$ и воспользоваться тем, что $|c_j|^2 = x_j^2 + y_j^2$ $(c_j = x_j + iy_j)$, то из (9) мы получим:

$$g(f) = g^{\sim}(x_{-M}, \ldots, x_M) + g^{\sim}(y_{-M}, \ldots, y_M) , \tag{13}$$

где

$$g^{\sim}(x_{-M}, \ldots, x_M) = (A^2 - 1)\sum_{m=-M}^{M} x_m^2 - \frac{4A^2}{A^2 - 1}\sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{M} d_{j,m}x_m\right)^2 .$$

Лемма 5. $\inf\{g(f)$: f — *функция вида* (10) *и* $f \not\equiv 0\} = 0$ *тогда и только тогда, когда* $\inf\{g^{\sim}(x_{-M}, \ldots, x_M)$: M — *неотрицательное целое число, и для* $j = -M, \ldots, \ldots, M$, x_j — *вещественные константы неравняющиеся одновременно нулю*$\} = 0$, (g *и* $g^{\sim}$ *см.* (9) *и* (13)).

Доказательство. Пусть $\inf\{g(f)$: f — функция вида (10) и $f \not\equiv 0\} = 0$. Тогда $g(f) \geqq 0$ для произвольного $f \not\equiv 0$. Выберем $f = \sum_{m=-M}^{M} x_m e_m$. Следовательно, $0 \leqq g(f) = g^{\sim}(x_{-M}, \ldots, x_M)$. Очевидно, что $0 \leqq \inf\{g^{\sim}(x_{-M}, \ldots, x_M)$: M — неотрицательное целое число, и для $j = -M, \ldots, M$, x_j — вещественные константы неравняющиеся одновременно нулю$\} \leqq \inf\{g(f)$: f — функция вида (10) и $f \not\equiv 0\}$.

Итак, $\inf\{g^{\sim}(x_{-M}, \ldots, x_M)$: M — неотрицательное целое число, и для $j = -M, \ldots, M$, x_j — вещественные константы неравняющиеся одновременно нулю$\} = 0$.

Так как обратное утверждение очевидно, лемма полностью доказана.

Замечание. Без ограничения общности вместо условия $f \not\equiv 0$ ($f \not\equiv 0$ тогда и только тогда, когда $\|f\| \neq 0$) можно рассмотреть условие $\|f\| = 1$. Аналогично вместо условия „не все x_j нули" можно рассматривать условие $\sum_{j=-M}^{M} x_j^2 = 1$.

Теорема 1. $\|S\| = A$ *тогда и только тогда, когда* $\inf\{g^{\sim}(x_{-M}, \ldots, x_M)$: M — *неотрицательное целое число, и для* $j = -M, \ldots, M$, x_j — *такие вещественные константы, что* $\sum_{j=-M}^{M} x_j^2 = 1\} = 0$ (*см.* (13), (9)).

Доказательство. 1. Необходимость. Пусть $\|S\| = A$; следовательно, для любой функции вида (10) имеет место

(14) $$\|Sf\| \leq A\|f\| .$$

Из этого и из (9) вытекает

$$g(f) = \frac{1}{2\pi}(A^2\|f\|^2 - \|Sf\|^2) \geqq 0 .$$

Равенство $\inf\{g(f) : \|f\| = 1\} = 0$ будем доказывать от противного.

Пусть $\inf\{g(f) : \|f\| = 1\} = d > 0$. Следовательно, для любой функции $f(z)$ вида (10) и $\|f\| = 1$

$$\frac{1}{2\pi}(A^2\|f\|^2 - \|Sf\|^2) \geqq d .$$

Из $\|f\| = 1$ следует $(A^2 - 2\pi d)\,\|f\|^2 \geqq \|Sf\|^2$ и мы получили противоречие, так как для $B = \sqrt{(A^2 - 2\pi d)} < A$ существует f такая, что $B\|f\| < \|Sf\|$.

В этом случае $\inf\{g(f): \|f\| = 1\} = 0$, и если воспользоваться леммой 5, то мы находим, что $\inf\{g^{\sim}(x_{-M}, \ldots, x_M)$: M — неотрицательное целое число, и для $j = -M, \ldots, M$, x_j — такие вещественные константы, что $\sum_{j=-M}^{M} x_j^2 = 1\} = 0$.

Необходимость доказана.

2. Достаточность. Пусть $\inf\{g^{\sim}(x_{-M}, \ldots, x_M)$: M — неотрицательное целое число, и для $j = -M, \ldots, M$, x_j — такие вещественные константы, что $\sum_{j=-M}^{M} x_j^2 = 1\} = 0$.

Воспользуемся леммой 5 и получим

$$\inf\{g(f)\colon f \text{ — функция вида (10) и } \|f\| = 1\} = 0 .$$

Из определения $g(f)$ мы получим $\|S\| \leqq A$. Равенство докажем от противного

Пусть $\|S\| < A$ и, следовательно,

$$A^2 - \|S\|^2 = d > 0 .$$

Константа d не зависит от выбора функции f.

Из (12) мы имеем $\|S\|^2\,\|f\|^2 - \|Sf\|^2 \geqq 0$.

Итак,

$$g(f) = \frac{1}{2\pi}(A^2\|f\|^2 - \|Sf\|^2) = \frac{1}{2\pi}(\|S\|^2 + d)\,\|f\|^2 - \frac{1}{2\pi}\|Sf\|^2 =$$

$$= \frac{1}{2\pi}(\|S\|^2\,\|f\|^2 - \|Sf\|^2) + \frac{d}{2\pi}\|f\|^2 \geqq \frac{d}{2\pi}$$

для всех $f(z)$ вида (10) с единичной нормой.

Мы получили противоречие, так как $\inf\{g(f)\colon \|f\| = 1\} = 0$.

Теорема 1 доказана.

Рассмотрим теперь подпространства $L_2^{ч}(\Gamma)$ и $L_2^{н}(\Gamma)$ являющиеся, соответственно, замыканиями базисных элементов $\{e_{2i}(z)\}_{i=-\infty}^{\infty}$ и $\{e_{2i-1}(z)\}_{i=-\infty}^{\infty}$.

Нетрудно показать, что справедлива следующая теорема:

Теорема 2. $L_2(\Gamma) = L_2^{ч}(\Gamma) \oplus L_2^{н}(\Gamma)$ *и* $\|S\|_{L_2(\Gamma)} \leqq D$ *тогда и только тогда, когда одновременно выполняется* $\|S\|_{L_2^{ч}(\Gamma)} \leqq D$ *и* $\|S\|_{L_2^{н}(\Gamma)} \leqq D$.

Теперь мы оценим квадратичные формы $g^{\sim}(x_{-M}, \ldots, x_M)$ (определение $g^{\sim}$ см. (13)) следующим образом:

1. Заменим все константы x_i их абсолютными величинами ($y_i = |x_i|$, для всех i).
2. Воспользуемся оценкой коэффциентов $a_{j,m} \leqq c$ (лемма 4).

При этом

$$x_i^2 = |x_i|^2 \quad \text{и} \quad \Big(\sum_{m=0}^{M} d_{j,m} x_m\Big)^2$$

может всего лишь увеличиться.

$$g^{\sim}(x_{-M}, \ldots, x_M) \geqq (A^2 - 1) \sum_{m=-M}^{M} y_m^2 -$$

$$- \frac{4A^2c^2}{A^2 - 1} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{M} \lambda^{(j+m)/2} \frac{|(-1)^j + (-1)^m|}{2} y_m \right)^2 = h(y_{-M}, \ldots, y_M).$$

Таким образом, мы получили квадратичную форму h, из положительной определенности которой вытекает положительная определенность $g^{\sim}$.

Коэффициенты квадратичной формы h имеют вид:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial y_i \, \partial y_j} = \begin{cases} (A^2 - 1)\,\delta_{i,j} - \dfrac{4c^2\lambda^2}{1 - \lambda^2} \dfrac{A^2}{A^2 - 1} \lambda^{n+k}, & \text{где} \quad i = 2n \quad \text{и} \\ j = 2k \quad \text{или} \quad i = 2n + 1 \quad \text{и} \quad j = 2k + 1 & \text{для} \quad i \geqq 0 \quad \text{и} \quad j \geqq 0, \\ (A^2 - 1)\,\delta_{i,j}, & \text{в остальных случаях}. \end{cases}$$

Специфика четных и нечетных элементов в нашей оценке исчезла и поэтому достаточно оценить $\|S\|_{L_2^{н}(\Gamma)}$; эта оценка будет верна для $\|S\|_{L_2^{н}(\Gamma)}$, и по теореме 2 и для $\|S\|_{L_2(\Gamma)}$.

Пусть $C(i,j) = 4 \sum_{k=1}^{\infty} d_{k,i} d_{k,j}$, где i и j неотрицательные целые числа и $d_{k,i}$ константы из выражения (7).

Теорема 3. *Норма сингулярного интегрального оператора S вычисляется по формуле*

$$\|S\|_{L_2(\Gamma)} = \sqrt{\left(1 + \frac{B + \sqrt{(B^2 + 4B)}}{2}\right)},$$

где $B = \sup\left\{\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} C(i,j)\, x_i x_j:\ x_0, x_1, \ldots,\right.$ *произвольные вещественные числа, для которых* $\left.\sum_{j=0}^{\infty} x_j^2 = 1\right\}$.

Доказательство. Коэффициенты квадратичной формы $g^{\sim}$ имеют вид:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g^{\sim}}{\partial x_i\, \partial x_j} = \begin{cases} (A^2 - 1)\,\delta_{i,j} - \dfrac{A^2}{A^2 - 1}\, C(i,j)\,, & \text{для} \quad i \geqq 0 \quad \text{и} \quad j \geqq 0\,, \\ (A^2 - 1)\,\delta_{i,j}\,, & \text{в остальных случаях}\,. \end{cases}$$

Выделим все элементы квадратичной формы $g^{\sim}$ на положительную константу $A^2/(A^2 - 1)$; это не меняет определенность квадратичной формы. Таким образом мы получим коэффициенты для новой квадратичной формы g^*.

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g^*}{\partial x_i\, \partial x_j} = \begin{cases} \dfrac{(A^2 - 1)^2}{A^2}\,\delta_{i,j} - C(i,j)\,, & \text{для} \quad i \geqq 0 \quad \text{и} \quad j \geqq 0\,, \\ \dfrac{(A^2 - 1)^2}{A^2}\,\delta_{i,j}\,, & \text{в остальных случаях}\,. \end{cases}$$

Выражение $D = (A^2 - 1)^2/A^2$ для $A > 1$ монотонно возрастает, т. к. его производная по A положительна для $A > 1$.

Для $f(z) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x_i\, e_i(z)$, где $\sum_{j=-\infty}^{\infty} x_j^2 = 1$

$$g^*(f) = D \sum_{j=-\infty}^{-1} x_j^2 + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} (D\delta_{i,j} - C(i,j))\, x_i x_j =$$

$$= D \sum_{j=-\infty}^{\infty} x_j^2 - \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} C(i,j)\, x_i x_j\,.$$

Из неотрицательной определенности g^* следует неотрицательная определенность $g^{\sim}(x_{-M}, \ldots, x_M)$ для любого неотрицательного целого M и вещественных $x_{-M}, \ldots, x_M$, таких, что $\sum_{j=-M}^{M} x_j^2 = 1$ и наоборот.

Для $D = B$ мы имеем $\inf\{g^*(f)\colon f = \sum_{j=-\infty}^{\infty} x_j\, e_j(z)$, где x_j — такие вещественные константы, для которых $\sum_{j=-\infty}^{\infty} x_j^2 = 1\} = 0$, и, следовательно, также $\inf\{g^{\sim}(x_{-M}, \ldots, x_M)$: M — неотрицательное целое число, и $x_{-M}, \ldots, x_M$ — такие вещественные константы, что $\sum_{j=-M}^{M} x_j^2 = 1\} = 0$ и в силу теоремы 1 норма сингулярного интегрального оператора S на эллипсе Γ есть решение уравнения

$$\frac{(A^2 - 1)^2}{A^2} = B$$

относительно A, т. е.

$$\|S\|_{L_2(\Gamma)} = \sqrt{\left(1 + \frac{B + \sqrt{(B^2 + 4B)}}{2}\right)}.$$

Теорема 3 доказана.

Оценку нормы снизу мы можем получить, если в теореме 3 вместо B подставить выражение $\sup\{C(i, i): i = 0, 1, \ldots\}$.

Оценку нормы сверху мы получим с помощью критерия Сильвесера, если вычислить главные миноры I_n^m матрицы квадратичной формы h и определить условие, при котором все они положительные.

Сначала с каждой строки главного минора вынесем выражение $A^2/(A^2 - 1)$, потом вычтем из каждой строки с номером $j > 0$ строку с номером 0 умноженную на λ^j. После этого каждый столбец с номером $j > 0$, умноженный на λ^j присоединим к столбцу с номером 0. Таким образом мы получим определители треугольного вида. Поэтому:

$$\begin{aligned} I_n^m &= \left(\frac{A^2}{A^2 - 1}\right)^{n+m+1} D^{n+m}\left(D - \frac{4c^2\lambda^2}{1 - \lambda^2}(1 + \lambda^2 + \ldots + \lambda^{2n})\right) > \\ &> \left(\frac{A^2}{A^2 - 1}\right)^{n+m+1} D^{n+m}\left(D - \frac{4c^2\lambda^2}{1 - \lambda^2}(1 + \lambda^2 + \ldots)\right) = \\ &= \left(\frac{A^2}{A^2 - 1}\right)^{u+m+1} D^{n+m}\left(D - \frac{4c^2\lambda^2}{(1 - \lambda^2)^2}\right), \end{aligned}$$

где n — число положительных, m — число отрицательных строк с четными номерами матрицы квадратичной формы h, и $D = (A^2 - 1)^2 A^{-2}$.

Для того, чтобы $I_n^m > 0$ нужно, чтобы $D \geqq 4c^2\lambda^2/(1 - \lambda^2)^2$, где c — оценка коэффициентов разложения (лемма 4).

Итак оценку сверху нормы S мы получим, если в теореме 3 вместо B взять выражение $4c^2\lambda^2/(1 - \lambda^2)^2$.

В конечном счете имеет место

$$\sqrt{\left(1 + \frac{E + \sqrt{(E^2 + 4E)}}{2}\right)} \leqq \|S\|_{L_2(\Gamma)} \leqq \sqrt{\left(1 + \frac{F + \sqrt{(F^2 + 4F)}}{2}\right)},$$

где $E = \sup\{C(i, i): i = 0, 1, 2, \ldots\}$ и $F = 4c^2\lambda^2/(1 - \lambda^2)^2$.

Мы приводим эти оценки нормы потому, что точные значения нормы даже в таком виде довольно сложно вычисляются. Эти оценки были вычислены на ЭВМ и оказалось, что для $\lambda < 0.75$ они достаточно близки друг к другу.

Литература

[1] *А. В. Айзенштат:* Краевые задачи и сингулярные уравнения на счетном множестве замкнутых кривых, вложенных друг в друга. Кандидатская диссертация, Одесса, 1974.

[2] *Ф. Д. Гахов:* Краевые задачи. Москва, Физматгиз 1963.

[3] *Б. В. Хведелидзе:* Метод интегралов типа Коши в разрывных граничных задачах теории голоморфных функций одной комплексной переменной. Москва, 1975.

[4] *В. Н. Монахов:* Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений. Новосибирск, Наука 1977.

[5] *Н. И. Мусхелишвили:* Сингулярные интегральные уравнения. Москва, Наука 1968.

[6] *И. Е. Вербицкий, Н. Я. Крупник:* Точные константы в теоремах К. И. Бабенко и Б. В. Хведелидзе об ограниченности сингулярного оператора. Сообщения Акад. наук Груз. ССР, *85*, № 1, стр. 21—24.

Адрес автора: 040 01 Košice, Karpatská 5 (MÚ SAV).