Časopis pro pěstování matematiky, roč. 93 (1968), Praha

KINEMATICKÁ GEOMETRIE GRUPY EUKLIDOVSKÝCH PODOBNOSTÍ V ROVINĚ

ADOLF KARGER, Praha

(Došlo dne 23. května 1967)

1. ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI

Práce navazuje na autorův článek [1], ve kterém byly zavedeny základní pojmy a definice kinematické geometrie, studované pomocí Lieových grup. V této práci budeme, bez zvláštních odkazů, používat označení a pojmů tam zavedených.

Označme G grupu všech přímých podobností v rovině E_2, $\mathfrak{g}$ její Lieovu algebru. $\mathfrak{g}$ je algebra všech matic tvaru

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_4 & a_3 \\ a_2 & -a_3 & a_4 \end{pmatrix}; \quad \text{pišme} \quad \boldsymbol{X} = a_1\boldsymbol{X}_1 + a_2\boldsymbol{X}_2 + a_3\boldsymbol{X}_3 + a_4\boldsymbol{X}_4 .$$

Formu $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{X}) = a_3^2 + a_4^2$, která je invariantní při ad$G$, zvolme za základní kvadratickou formu. Ideál v $\mathfrak{g}$, generovaný vektory $\boldsymbol{X}_1$ a $\boldsymbol{X}_2$, označme $\boldsymbol{V}$. Snadno se zjistí, že rovina $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{V} - \boldsymbol{X}_4$ je invariantní při ad$G$ a že zúžení zobrazení ad$G$ na tuto invariantní rovinu v ní působí stejně jako grupa G v E_2. Tím je dána isomorfní representace grupy G v $\boldsymbol{A}$ a pohyb v grupě G lze tedy studovat pomocí této representace, což v dalším učiníme.

Nechť nyní $g(t)$ je pohyb z G třídy C^4 bez singulárních bodů ([1]). Je-li $\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{A}$, a je-li $\mathbf{R}$ pevný řídicí kužel pohybu $g(t)$ a $\overline{\mathbf{R}}$ jeho hybný řídicí kužel, je pevná polodie dána rovnicí $[\mathbf{R}, \boldsymbol{X}] = 0$ a hybná polodie rovnicí $[\overline{\mathbf{R}}, \boldsymbol{X}] = 0$. Řešme rovnici $[\mathbf{R}, \boldsymbol{X}] = 0$. To je soustava dvou rovnic o dvou neznámých s pravou stranou a determinantem rovným $(\mathbf{R}, \mathbf{R}) = 1$. Má tedy jediné řešení, označme je $\boldsymbol{M} = \alpha\boldsymbol{X}_1 + \beta\boldsymbol{X}_2 - \boldsymbol{X}_4$. Najděme dále isotropickou algebru $\mathfrak{h}_{\mathbf{R}}$ bodu $\boldsymbol{M}$ pevné polodie, tj. řešme rovnici $[\mathbf{R}, \boldsymbol{M}] = 0$ pro neznámé $\mathbf{R}$. To jsou dvě lineární homogenní rovnice pro čtyři neznámé, $\mathfrak{h}_{\mathbf{R}}$ má tedy dimensi 2 a je generována např. těmito vektory: $\mathfrak{h}_{\mathbf{R}} = \{\boldsymbol{N}, -\boldsymbol{M}\}$, kde $\boldsymbol{N} = -\beta\boldsymbol{X}_1 + \alpha\boldsymbol{X}_2 + \boldsymbol{X}_3$. Tím je každý vektor $\mathbf{R}$ s $(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \neq 0$ vnořen do podalgebry $\mathfrak{h}_{\mathbf{R}}$, isotropické algebry bodu $\boldsymbol{M}$. (Pozn.: Říkáme stručně

„isotropická algebra", místo „Lieova algebra isotropické grupy", neboť nemůže dojít k nedorozumění.)

V každé podalgebře $\mathfrak{h}_{\mathbf{R}}$ lze najít invariantní basi např. takto: Buď $\boldsymbol{X} = r\boldsymbol{N} + s\boldsymbol{M}$ libovolný vektor z $\mathfrak{h}_{\mathbf{R}}$. Pak ad$\boldsymbol{X}$ má kořeny $\lambda_{1,2} = 0$, $\lambda_{3,4} = r \pm is$, což jsou komplexní lineární formy na $\mathfrak{h}_{\mathbf{R}}$. Vezmeme-li jejich lineární kombinaci $f_1 = r$ a $f_2 = s$, jsou f_1 a f_2 invariantní reálné lineární formy na $\mathfrak{h}_{\mathbf{R}}$ a platí

$$f_1(\boldsymbol{X}) = (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{N}) \quad \text{a} \quad f_2(\boldsymbol{X}) = (\boldsymbol{X}, -\boldsymbol{M}).$$

Z toho je vidět, že původně zvolená base $-\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{N}$ v $\mathfrak{h}_{\mathbf{R}}$ je invariantní.

2. FRENETOVY FORMULE PRO $\mathfrak{h}_{\mathbf{R}}$

Vzhledem k existenci invariantní base v $\mathfrak{h}_{\mathbf{R}}$ lze tedy pro daný pohyb $g(t)$ psát

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_1 \cos\varphi + \mathbf{R}_2 \sin\varphi\,, \quad \text{kde} \quad \mathbf{R}_1 = \boldsymbol{N}\,, \quad \mathbf{R}_2 = -\boldsymbol{M}\,,$$
$$\cos\varphi = a_3 \quad \text{a} \quad \sin\varphi = a_4\,.$$

Pevná polodie je pak dána kuželem $-\mathbf{R}_2$.

Vektor $\ddot{\mathbf{R}}_1$ je lineární kombinací vektorů $\dot{\mathbf{R}}_1$ a $[\mathbf{R}_1, \dot{\mathbf{R}}_1]$, protože $\dot{\mathbf{R}}_1 \in \boldsymbol{V}$ a $\boldsymbol{V}$ je ideál v $\mathfrak{g}$. Platí tedy

$$\ddot{\mathbf{R}}_1 = k_1\dot{\mathbf{R}}_1 + k_2[\mathbf{R}_1, \dot{\mathbf{R}}_1]\,. \tag{1}$$

Derivujeme-li v (1) podle kanonického parametru, jsou k_1 a k_2 invarianty pohybu. Nejsou to ovšem ještě geometrické invarianty soustavy algeber $\mathfrak{h}_{\mathbf{R}}$ a tedy ani invarianty polodie. Chceme-li najít invarianty soustavy $\mathfrak{h}_{\mathbf{R}}$, které nezávisí na kanonickém parametru, stačí si všimnout, že lineární diferenciální forma $\omega = k_2\,\mathrm{d}t$ je nezávislá na změně parametru t. Lze tedy zvolit vektory $\mathbf{T}_1$ a $\mathbf{T}_2$ tak, aby bylo

$$\dot{\mathbf{R}}_1 = \varkappa_1\mathbf{T}_1\,, \quad \dot{\mathbf{R}}_2 = \varkappa_1\mathbf{T}_2\,, \quad \varkappa_1 > 0\,. \tag{2}$$

Pak je $\dot{\mathbf{T}}_1 = \varkappa_2\mathbf{T}_1 + \varkappa_1\mathbf{T}_2$, $\dot{\mathbf{T}}_2 = -\varkappa_1\mathbf{T}_1 + \varkappa_2\mathbf{T}_2$ a ovšem $k_2 = \varkappa_1$.

$\varkappa_1\,\mathrm{d}t$ a $\varkappa_2$ jsou hledané invarianty soustavy $\mathfrak{h}_{\mathbf{R}}$. Uvážíme-li, že pevná polodie je dána kuželem $-\mathbf{R}_2$, snadno najdeme souvislost mezi těmito invarianty a podobnostním obloukem s a podobnostní křivostí k pevné polodie:

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \varkappa_1\,, \quad k = \frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}. \tag{3}$$

Tím je dokázána následující

Věta 1. *Buď $g(t)$ pohyb z G třídy C^4 bez singulárních bodů. Pak*

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{d}\mathbf{P} = \mathrm{d}t\,.\,\mathbf{R}\,, && \dot{\mathbf{T}}_1 = \varkappa_2\mathbf{T}_1 + \varkappa_1\mathbf{T}_2\,,\\
&\mathbf{R} = \mathbf{R}_1\cos\varphi + \mathbf{R}_2\sin\varphi\,, && \dot{\mathbf{T}}_2 = -\varkappa_1\mathbf{T}_1 + \varkappa_2\mathbf{T}_2\,.\\
&\dot{\mathbf{R}}_1 = \varkappa_1\mathbf{T}_1\,,\quad \dot{\mathbf{R}}_2 = \varkappa_1\mathbf{T}_2\,,
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Přitom

$$
\begin{aligned}
&[\mathbf{R}_1,\mathbf{T}_1] = \mathbf{T}_2\,, \quad [\mathbf{R}_1,\mathbf{T}_2] = -\mathbf{T}_1\,, \quad [\mathbf{R}_1,\mathbf{R}_2] = 0\,,\\
&[\mathbf{R}_2,\mathbf{T}_1] = \mathbf{T}_1\,, \quad [\mathbf{R}_2,\mathbf{T}_2] = \mathbf{T}_2\,, \quad [\mathbf{T}_1,\mathbf{T}_2] = 0\,.
\end{aligned}
$$

t, φ, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ jsou invarianty pohybu.

Najděme ještě geometrický význam parametrů t a φ: Je-li $\boldsymbol{B} = -\mathbf{R}_2 + \boldsymbol{X}$ bod z $\boldsymbol{A}$, je tečný vektor trajektorie bodu $\boldsymbol{B}$ v bodě $\boldsymbol{B}$ roven $[\mathbf{R}, \boldsymbol{B}]$.

$$
\begin{aligned}
[\mathbf{R}, \boldsymbol{B}] = [\mathbf{R}, -\mathbf{R}_2 + \boldsymbol{X}] = [\mathbf{R}_1\cos\varphi + \mathbf{R}_2\sin\varphi, \boldsymbol{X}] =\\
= [\mathbf{R}_1, \boldsymbol{X}]\cos\varphi + [\mathbf{R}_2, \boldsymbol{X}]\sin\varphi\,.
\end{aligned}
$$

Označíme-li ψ úhel tečného vektoru a pólového paprsku, je

$$
\cos\psi = \frac{\boldsymbol{X}\,.\,[\mathbf{R}, \boldsymbol{X}]}{\boldsymbol{X}^2} = \frac{\boldsymbol{X}\,.\,[\mathbf{R}_2, \boldsymbol{X}]\sin\varphi}{\boldsymbol{X}^2} = \sin\varphi = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right).
$$

Kanonický parametr t je pak takový parametr, při němž je $\dot{\boldsymbol{X}}^2/\boldsymbol{X}^2 = 1$.

3. SOUVISLOST MEZI INVARIANTY $\mathfrak{h}_{\mathbf{R}}$ A $\mathfrak{h}_{\bar{\mathbf{R}}}$

Podle (1) je $\ddot{\mathbf{R}}_1 = k_1\dot{\mathbf{R}}_1 + k_2\dot{\mathbf{R}}_2$, neboť $[\mathbf{R}_1, \dot{\mathbf{R}}_1] = \dot{\mathbf{R}}_2$.

Věta 2. *Platí*

$$
k_2 = \varkappa_1\,, \quad k_1 = \varkappa_2 + \frac{\dot{\varkappa}_1}{\varkappa_1}\,.
$$

Důkaz. Porovnáme-li (1) s (2), dostaneme

$$
\begin{aligned}
\ddot{\mathbf{R}}_1 = (\dot{\mathbf{R}}_1)^{\cdot} = (\varkappa_1\mathbf{T}_1)^{\cdot} = \dot{\varkappa}_1\mathbf{T}_1 + \varkappa_1(\varkappa_2\mathbf{T}_1 + \varkappa_1\mathbf{T}_2) =\\
= \dot{\varkappa}_1\mathbf{T}_1 + \varkappa_1\varkappa_2\mathbf{T}_1 + \varkappa_1^2\mathbf{T}_2 = \left(\varkappa_2 + \frac{\dot{\varkappa}_1}{\varkappa_1}\right)\dot{\mathbf{R}}_1 + \varkappa_1\dot{\mathbf{R}}_2\,,
\end{aligned}
$$

což dává tvrzení věty.

Věta 3. *Pro invarianty k_1, k_2 a $\bar{k}_1$, $\bar{k}_2$ soustav $\mathfrak{h}_{\mathbf{R}}$ a $\mathfrak{h}_{\bar{\mathbf{R}}}$ platí*

$$
k_1 - \bar{k}_1 = \sin\varphi\,, \quad k_2 - \bar{k}_2 = \cos\varphi\,. \tag{5}
$$

Důkaz. $\ddot{\overline{\mathbf{R}}}_1 = \bar{k}_1\dot{\overline{\mathbf{R}}}_1 + \bar{k}_2\dot{\overline{\mathbf{R}}}_2$, $\ddot{\mathbf{R}}_1 = k_1\dot{\mathbf{R}}_1 + k_2\dot{\mathbf{R}}_2$. Podle (4) z [1] máme $\dot{\overline{\mathbf{R}}}_1 = \mathrm{ad}g^{-1}\dot{\mathbf{R}}_1$, $\dot{\overline{\mathbf{R}}}_2 = \mathrm{ad}g^{-1}\dot{\overline{\mathbf{R}}}_2$ a $\ddot{\overline{\mathbf{R}}}_1 = -[\overline{\mathbf{R}}, \dot{\overline{\mathbf{R}}}_1] + \mathrm{ad}g^{-1}\ddot{\mathbf{R}}_1$. Po dosazení je $\bar{k}_1\dot{\overline{\mathbf{R}}}_1 + \bar{k}_2\dot{\overline{\mathbf{R}}}_2 = -[\overline{\mathbf{R}}; \dot{\overline{\mathbf{R}}}_1] + \mathrm{ad}g^{-1}(k_1\dot{\mathbf{R}}_1 + k_2\dot{\mathbf{R}}_2)$. Uvážíme-li, že $\mathbf{R} = \mathbf{R}_1 \cos\varphi + \mathbf{R}_2 \sin\varphi$, dostaneme $\bar{k}_1\dot{\overline{\mathbf{R}}}_1 + \bar{k}_2\dot{\overline{\mathbf{R}}}_2 = -\dot{\overline{\mathbf{R}}}_2 \cos\varphi - \dot{\overline{\mathbf{R}}}_1 \sin\varphi + k_1\dot{\overline{\mathbf{R}}}_1 + k_2\dot{\overline{\mathbf{R}}}_2$ a odtud už snadno plyne (5).

4. PŘÍBUZNOST MEZI BODY A STŘEDY OSKULAČNÍCH KRUŽNIC

Buď $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}$ bod. Označme $\{\boldsymbol{T}_1^x, \boldsymbol{T}_2^x\}$ průvodní repér trajektorie bodu $\boldsymbol{x}$ v bodě $\boldsymbol{x}$. Vektor $\boldsymbol{T}_2^x$ má invariantní význam; bod $\boldsymbol{S}_x = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{T}_2^x$ je střed oskulační kružnice trajektorie bodu $\boldsymbol{x}$ v bodě $\boldsymbol{x}$. Nalezněme jeho vyjádření pomocí invariantů pevné polodie: Především je $\boldsymbol{T}_1^x = \dot{\boldsymbol{x}}/\varkappa_1^x$, $\boldsymbol{T}_2^x = [\boldsymbol{X}_3, \boldsymbol{T}_1^x]$, $\ddot{\boldsymbol{x}} = \alpha\dot{\boldsymbol{x}} + \varkappa_2^x[\boldsymbol{X}_3, \dot{\boldsymbol{x}}]$, a tedy $\varkappa_1^x = \ddot{\boldsymbol{x}}[\boldsymbol{X}_3, \dot{\boldsymbol{x}}]/(\dot{\boldsymbol{x}})^2 = \langle \dot{\boldsymbol{x}}, \ddot{\boldsymbol{x}} \rangle/\dot{\boldsymbol{x}}^2$, kde $\langle , \rangle$ značí antisymetrický součin vektorů. Dále je $\dot{\boldsymbol{x}} = (\mathrm{ad}\mathbf{R})\,\boldsymbol{x}$ a $\ddot{\boldsymbol{x}} = (\mathrm{ad}\dot{\mathbf{R}})\,\boldsymbol{x} + (\mathrm{ad}\mathbf{R})^2\,\boldsymbol{x}$. Celkem tedy máme

$$\boldsymbol{S}_x = \boldsymbol{x} + \frac{\dot{\boldsymbol{x}}^2}{\langle \dot{\boldsymbol{x}}, \ddot{\boldsymbol{x}} \rangle}[\boldsymbol{X}_3, \dot{\boldsymbol{x}}] = \boldsymbol{x} - \frac{((\mathrm{ad}\mathbf{R})\,\boldsymbol{x})^2}{\langle (\mathrm{ad}\mathbf{R})\,\boldsymbol{x} + (\mathrm{ad}\mathbf{R})^2\,\boldsymbol{x}, (\mathrm{ad}\mathbf{R})\,\boldsymbol{x} \rangle}[\boldsymbol{X}_3, (\mathrm{ad}\mathbf{R})\,\boldsymbol{x}]\,.$$

Označíme-li dále $\boldsymbol{x} = -\mathbf{R}_2 + x_1\mathbf{T}_1 + x_2\mathbf{T}_2$ a $\boldsymbol{S}_x = -\mathbf{R}_2 + x_1'\mathbf{T}_1 + x_2'\mathbf{T}_2$ souřadnice bodů $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{S}_x$ v repéru pevné polodie, bude po dosazení

$$x_1' = x_1 + \frac{\varrho^2}{\varrho^2(\cos\varphi - \dot{\varphi}) + \varkappa_1(x_1 \cos 2\varphi + x_2 \sin 2\varphi)} \cdot (-x_1 \cos\varphi - x_2 \sin\varphi)\,, \quad \varrho^2 = x_1^2 + x_2^2\,,$$

$$x_2' = x_2 + \frac{\varrho^2}{\varrho^2(\cos\varphi - \dot{\varphi}) + \varkappa_1(x_1 \cos 2\varphi + x_2 \sin 2\varphi)} \cdot (x_1 \sin\varphi - x_2 \cos\varphi)\,.$$

To jsou rovnice příbuznosti mezi body a středy oskulačních kružnic jejich trajektorií. Nepříjemné je, že bod $\boldsymbol{S}_x$ neleží na pólové přímce bodu $\boldsymbol{x}$. Abychom toho dosáhli, otočme vektor $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{S}_x$ o úhel $-\varphi$. Tím bod $\boldsymbol{S}_x$ přejde do jiného bodu, označme jej $\tilde{\boldsymbol{S}}_x$, a zabývejme se příbuzností mezi body $\boldsymbol{x}$ a $\tilde{\boldsymbol{S}}_x$.

Zavedeme polární souřadnice vztahy

$$x_1 = \varrho \cos\omega\,, \quad x_2 = \varrho \sin\omega\,; \quad x_1' = \varrho' \cos\omega'\,, \quad x_2' = \varrho' \sin\omega'\,,$$

kde $\varrho \in (-\infty, +\infty)$, $\omega \in (-\pi/2, \pi/2\rangle$. Pak platí:

$$\omega' = \omega\,, \quad \varrho' = \varrho\left(1 - \frac{\varrho}{\varrho(\cos\varphi - \dot{\varphi}) + \varkappa_1 \cos(\omega - 2\varphi)}\right).$$

Označíme-li $d_0 = \varkappa_1/(\cos\varphi - \dot{\varphi})$, $d_1 = \varkappa_1/(\cos\varphi - \dot{\varphi} - 1)$, $\omega - 2\varphi = \vartheta$, dostaneme

$$\varrho' = \frac{\varrho\, d_0 \cos\vartheta}{\varrho + d_0 \cos\vartheta}\left(1 + \frac{\varrho}{d_1 \cos\vartheta}\right).$$

Inflexní body tvoří kružnici o rovnici $\varrho + d_0 \cos\vartheta = 0$. Body, pro které je $\varrho' = 0$, leží na kružnici $\varrho + d_1 \cos\vartheta = 0$. Jestliže d_1 nemá smysl $(\cos\varphi - \dot{\varphi} - 1 = 0)$, dostaneme $\varrho' = (\varrho\, d_0 \cos\vartheta)/(\varrho + d_0 \cos\vartheta)$, což je podobná příbuznost jako v rovinné kinematice grupy shodností s kružnicí vratu o průměru d_0. Položíme-li $\varphi = 0$, dostaneme známou příbuznost z rovinné kinematiky. V obecném případě se uvažovaná příbuznost skládá ze dvou jednoduchých příbuzností:

$$\varrho_1 = \frac{\varrho\, d_0 \cos\vartheta}{\varrho + d_0 \cos\vartheta}, \quad \frac{\varrho'}{\varrho + d_1 \cos\vartheta} = \frac{\varrho_1}{d_1 \cos\vartheta}.$$

Seznam literatury

[1] *A. Karger:* Lieovy grupy a kinematická geometrie v rovině. Čas. pro pěst. mat. (v tisku).
[2] *П. А. Широков, А. П. Широков:* Аффинная дифференциальная геометрия, Москва 1959.

Adresa autora: Horská 4, Praha 2 (České vysoké učení technické).

Zusammenfassung

KINEMATISCHE GEOMETRIE DER GRUPPE EUKLIDISCHER ÄHNLICHKEITEN IN DER EBENE

ADOLF KARGER, Praha

In der Arbeit [1] wurde mittels der Theorie der Lieschen Gruppen die kinematische Geometrie der Gruppe aller euklidischen Kongruenzen in der Ebene untersucht. Die vorliegende Arbeit ist eine Fortsetzung der Arbeit [1]. Sie behandelt die kinematische Geometrie der einparametrischen Bewegungen in der Gruppe G der euklidischen Ähnlichkeiten.

Jeder Vektor des Bewegungsrichtkegels wird in den Zentralisator dieses Vektors eingebettet. Es wurden die Invarianten des auf diese Weise entstandenen Systems der linearen Unterräume in der Lieschen Algebra $\mathfrak{g}$ der Gruppe G gefunden. Es wird ihr Zusammenhang mit den Invarianten der Polbahnen, mit dem Ähnlichkeitsbogen und der Ähnlichkeitskrümmung gezeigt. Schließlich werden auch Eigenschaften der Punktverwandschaft zwischen den Punkten und den Krümmungsmittelpunkten ihrer Bahnkurven gezeigt.