Jaromír Abrham

O jistém zobecnění dopravního problému

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 84 (1959), No. 2, 183--187

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108538

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 84 (1959), Praha

O JISTÉM ZOBECNĚNÍ DOPRAVNÍHO PROBLÉMU

JAROMÍR ABRHAM, Praha

(Došlo dne 8. srpna 1958)

DT:330.609.1

V práci je podáno řešení zobecněného dopravního problému lineárního programování, v němž předpoklad rovnosti výroby a spotřeby je nahrazen předpokladem, že možnosti výroby převyšují spotřebu.

Nejprve podáme stručnou ekonomickou formulaci naší úlohy podle [1]:

Máme dán jistý druh kvalitativně homogenního zboží, které je vyráběno v m výrobních střediscích o kapacitách $a_1, \ldots, a_m$ a odebíráno n spotřebními středisky v množstvích $b_1, \ldots, b_n$. Předpokládáme přitom, že $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$. Náklad na výrobu jednotkového množství uvažovaného zboží v i-tém výrobním středisku a jeho dopravu do j-tého spotřebního střediska budiž c_{ij}. Úkolem je sestavit plán výroby a dopravy daného zboží, tj. rozhodnout, kolik zboží se má v každém výrobním středisku vyrobit a kam a v jakých množstvích je třeba je rozvézt, aby přitom byly splněny požadavky všech spotřebních středisek a aby celkové výrobní a dopravní náklady byly minimální.

Řešit uvedenou úlohu znamená tedy najít čísla $x_{ij} \geqq 0$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, pro něž $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leqq a_i$, $i = 1, \ldots, m$, $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j$, $j = 1, \ldots, n$, $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} = \min$. x_{ij} přitom značí množství zboží, které má býti dodáno z i-tého výrobního do j-tého spotřebního střediska.

Zobecnění ve srovnání s „klasickým" dopravním problémem spočívá v tom, že původní předpoklad rovnosti $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$ je nahrazen předpokladem $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$, který umožňuje počítat nejen se skutečným stavem výroby, ale i s kapacitami jednotlivých výrobních center.

Pojem M-systému, kterého budeme v dalším používat, má týž smysl jako např. v [2] nebo [3].

Než přistoupíme k matematickému řešení uvedené úlohy, zavedeme si několik pojmů.

Zobecněný M-systém $\mathcal{M}(a_1, \ldots, a_m; b_1, \ldots, b_n)$ je uspořádaná množina $m + n$ kladných čísel $a_1, \ldots, a_m; b_1, \ldots, b_n$, pro něž $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$. *Řešením zobecněného M-systému* $\mathcal{M}(a_1, \ldots, a_m; b_1, \ldots, b_n)$ nazveme libovolnou matici $X = (x_{ij})$ typu m, n s nezápornými prvky, pro něž $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j$, $j = 1, \ldots, n$, $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leqq a_i$, $i = 1, \ldots, m$.

Označme $\mathfrak{M}$ množinu všech řešení daného zobecněného M-systému. Pak platí

1. $\mathfrak{M} \neq \emptyset$. Zvolme libovolně m kladných čísel $a'_1, \ldots, a'_m$ tak, aby bylo $a'_i \leqq a_i, i = 1, \ldots, m, \sum_{i=1}^{m} a'_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$. Pak čísla $a'_1, \ldots, a'_m; b_1, \ldots, b_n$ tvoří M-systém, jehož každé řešení je i řešením daného zobecněného M-systému.

2. Množina $\mathfrak{M}$ je omezená ve smyslu metriky $m \,.\, n$-rozměrného euklidovského prostoru. Označíme-li totiž O nulovou matici typu m, n, je $\varrho^2(X, O) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij}^2$. Je však $0 \leqq x_{ij} \leqq b_j$ a tedy $\varrho^2(X, O) \leqq m \sum_{j=1}^{n} b_j^2$.

3. Množina $\mathfrak{M}$ je konvexní. Buďtež $X, Y \in \mathfrak{M}$, $0 < \alpha < 1$. Označme $Z = \alpha X + (1 - \alpha) Y$. Pak $\sum_{i=1}^{m} z_{ij} = \alpha \sum_{i=1}^{m} x_{ij} + (1 - \alpha) \sum_{i=1}^{m} y_{ij} = b_j$, $j = 1, \ldots, n$, a podobně $\sum_{j=1}^{n} z_{ij} \leqq a_i$, $i = 1, \ldots, m$. Odtud plyne $Z \in \mathfrak{M}$.

4. Množina $\mathfrak{M}$ je uzavřená.

Označme nyní $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j > 0$. Pak čísla $a_1, \ldots, a_m; b_1, \ldots, b_n, b_{n+1}$ tvoří M-systém, který nazveme sdružený s daným zobecněným M-systémem $\mathcal{M}(a_1, \ldots, a_m; b_1, \ldots, b_n)$.

Budiž $M^* = M(a_1, \ldots, a_m; b_1, \ldots, b_n, b_{n+1})$ M-systém sdružený se zobecněným M-systémem $M = \mathcal{M}(a_1, \ldots, a_m; b_1, \ldots, b_n)$. Pak existuje jednojednoznačné a oboustranně spojité zobrazení množiny $\mathfrak{M}^*$ všech řešení M-systému M^* na množinu $\mathfrak{M}$ všech řešení zobecněného M-systému M.

Budiž dáno $X^* \in \mathfrak{M}^*$. Přiřadíme mu $X \in \mathfrak{M}$, kde X je matice, která vznikne z matice X^* vynecháním $n + 1$-tého sloupce. Naopak každé matici $X = (x_{ij}) \in \mathfrak{M}$ přiřadíme matici $X^* \in \mathfrak{M}^*$, která vznikne z X přidáním $n + 1$-vého sloupce, jenž obsahuje prvky $a_1 - \sum_{j=1}^{n} x_{1j}, \ldots, a_m - \sum_{j=1}^{n} x_{mj}$. Takto je zřejmě definováno jednojednoznačné zobrazení $X \longleftrightarrow X^*$. Dokážeme, že toto zobrazení je oboustranně spojité ve smyslu konvergence podle prvků matic (která je ovšem ekvivalentní s konvergencí podle metriky $m \cdot n$-rozměrného euklidovského prostoru).

Budiž $\{X_r^*\}_{r=1}^{\infty}$ konvergentní posloupnost matic z množiny $\mathfrak{M}^*$. Je-li $X^* = \lim_{r\to\infty} X_r^*$, je zřejmě také $X = \lim_{r\to\infty} X_r$, kde $X \leftrightarrow X^*$, $X_r \leftrightarrow X_r^*$, $r = 1, 2, \ldots$

Nechť naopak $\{X_r\}_{r=1}^{\infty}$ je konvergentní posloupnost matic z množiny $\mathfrak{M}$ a nechť $X = \lim_{r\to\infty} X_r$. Budiž dále $X^* \leftrightarrow X$, $X_r^* \leftrightarrow X_r$, $r = 1, 2, \ldots$ Označme $X_r^* = (x_{ij}^{(r)*})$, $X_r = (x_{ij}^{(r)})$, $r = 1, 2, \ldots$ Je pak $x_{ij}^{(r)*} = x_{ij}^{(r)}$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, $x_{i,n+1}^{(r)*} = a_i - \sum_{j=1}^{n} x_{ij}^{(r)}$, $i = 1, \ldots, m$ pro všechna r. Odtud a z předpokladu $X = \lim_{r\to\infty} X_r$ plyne ihned $X^* = \lim_{r\to\infty} X_r^*$.

Budiž $X \in \mathfrak{M}$. Pak řekneme, že matice X je *základním řešením* daného zobecněného M-systému, je-li $X \leftrightarrow X^*$, kde X^* je nějaké základní řešení M-systému sdruženého s daným zobecněným M-systémem. (Pojem „základní řešení M-systému" je užíván ve smyslu pojmu „einfache Lösung" z [2].)

Je známo (viz [3]), že množina všech řešení daného M-systému je konvexním obalem množiny všech základních řešení tohoto M-systému. Snadno zjistíme, že tato věta zůstává v platnosti i pro zobecněné M-systémy.

Obrátíme se nyní k řešení dříve uvedené úlohy. Budiž dán zobecněný M-systém $M = \mathscr{M}(a_1, \ldots, a_m; b_1, \ldots, b_n)$ a matice $C = (c_{ij})$ typu m, n. Úkolem je najít aspoň jedno C-minimální řešení daného zobecněného M-systému, tj. takové jeho řešení X_0, pro něž $(C, X_0) = \min_{X \in \mathfrak{M}} (C, X)$, kde $(C, X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$.

Nechť $M^* = M(a_1, \ldots, a_m; b_1, \ldots, b_n, b_{n+1})$ je M-systém sdružený s M. Označme C^* matici, která vznikne z matice C připojením $n + 1$-vého sloupce obsahujícího vesměs nulové prvky. Budiž X_0^* takové řešení M-systému M^*, že $(C^*, X_0^*) = \min_{X^* \in \mathfrak{M}^*} (C^*, X^*)$. Nechť $X_0 \in \mathfrak{M}$, $X_0 \leftrightarrow X_0^*$. Pak zřejmě platí $(C, X_0) = (C^*, X_0^*) \leqq (C^*, X^*) = (C, X)$, kde X^* je libovolný prvek množiny $\mathfrak{M}^*$ a $X \leftrightarrow X^*$. Odtud $(C, X_0) = \min_{X \in \mathfrak{M}} (C, X)$. Tento vztah umožňuje převést řešení zobecněného dopravního problému na řešení původního problému.

Ze známých vlastností M-systémů plyne pak, že existuje vždy aspoň jedno C-minimální základní řešení daného zobecněného M-systému.

Budiž nyní X základní řešení zobecněného M-systému M. Pak řekneme, že matice X je nerozložitelná, je-li $X \leftrightarrow X^* \in \mathfrak{M}^*$, kde X^* je nerozložitelná matice ve smyslu zavedeném v [2].

Budiž X_0 základní, nerozložitelné a C-minimální řešení zobecněného M-systému $\mathcal{M}(a_1, \ldots, a_m; b_1, \ldots, b_n)$, $X_0 \leftrightarrow X_0^* = (x_{ij}^{(0)*})$. Označme $\varrho(X_0) = \min\limits_{x_{ij}^{(0)*} > 0} x_{ij}^{(0)*}$.

Z věty 1 v [2] plyne pak následující věta:

Nechť matice $X_0 = (x_{ij}^{(0)})$ *je základním, nerozložitelným a C-minimálním řešením zobecněného M-systému* $\mathcal{M}(a_1, \ldots, a_m; b_1, \ldots, b_n)$. $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, $\beta_1, \ldots, \beta_n$ *buďtež taková reálná čísla, že*

$$\sum_{i=1}^{m}(a_i + \alpha_i) > \sum_{j=1}^{n}(b_j + \beta_j)\,, \quad \sum_{i=1}^{m}|\alpha_i| + \sum_{j=1}^{n}|\beta_j| + |\sum_{i=1}^{m}\alpha_i - \sum_{j=1}^{n}\beta_j| < \varrho(X_0)\,.$$

Pak existuje takové základní, nerozložitelné a C-minimální řešení $Y_0 = (y_{ij}^{(0)})$ *zobecněného M-systému* $\mathcal{M}(a_1 + \alpha_1, \ldots, a_m + \alpha_m; b_1 + \beta_1, \ldots, b_n + \beta_n)$, *že* $y_{ij}^{(0)} = 0$ *tehdy a jen tehdy, když* $x_{ij}^{(0)} = 0$.

Odtud plyne, že základní, nerozložitelná a C-minimální řešení zobecněného M-systému jsou stabilní ve smyslu práce [2].

LITERATURA

[1] *W. Tomaszewski:* Z zagadnień programowania liniowego, Ekonomista č. *3*, 1957, 169—186.

[2] *J. Abrham:* Über die Stabilität von Lösungen im Transportproblem der linearen Programmierung, Čechosl. mat. žurnal *8* (*83*), 1958, 131—138.

[3] *F. Nožička:* O jednom minimálním problému v theorii lineárního plánování; rozmnoženo v MÚ ČSAV, Praha 1956.

Резюме

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ТРАНСПОРТНОЙ ПРОБЛЕМЫ

Яромир Абргам (Jaromír Abrham), Прага

(Поступило в редакцию 8/VIII 1958 г.)

В классической транспортной проблеме решается следующая задача: найти минимум линейной формы $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$ на множестве всех матриц $X = (x_{ij})$ типа m, n с неотрицательными элементами, для которых $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i$, $i = 1, \ldots, m$, $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j$, $j = 1, \ldots, n$, где $a_1, \ldots, a_m$, $b_1, \ldots, b_n$ — данные положительные числа, для которых $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$. В этой работе решается более общая задача отыскания минимума линейной формы $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$ на

множестве всех неотрицательных матриц (x_{ij}) типа m, n, для элементов которых $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j$, $j = 1, \dots, n$, $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leqq a_i$, $i = 1, \dots, m$, где $a_1, \dots, a_m$, $b_1, \dots, b_n$ — данные положительные числа, для которых $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$. Показано, каким образом решение этой задачи можно свести к решению классической задачи.

Zusammenfassung

ÜBER EINE VERALLGEMEINERUNG DES TRANSPORTPROBLEMS

JAROMÍR ABRHAM, Praha

(Eingelangt am 8. August 1958)

Das „klassische" Transportproblem befasst sich mit der Aufgabe, das Minimum einer linearen Form $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$ in Bezug auf die Menge aller Matrizen (x_{ij}) vom Typus m, n mit nicht-negativen Elementen zu finden, für die $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i$, $i = 1, \dots, m$, $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j$, $j = 1, \dots, n$ gilt, wobei $a_1, \dots, a_m$, $b_1, \dots, b_n$ fest gegebene positive Zahlen sind, die die Bedingung $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$ erfüllen.

In der vorgelegten Arbeit wird die allgemeinere Aufgabe gestellt, das Minimum der linearen Form $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$ in Bezug auf die Menge aller nicht-negativen Matrizen (x_{ij}) vom Typus m, n zu finden, für deren Elemente $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j$, $j = 1, \dots, n$, $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leqq a_i$, $i = 1, \dots, m$ gilt, wobei $a_1, \dots, a_m$, $b_1, \dots, b_n$ solche positive Zahlen sind, dass $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$. Es wird gezeigt, wie sich das Lösen dieser Aufgabe auf das des klassischen Problems zurückführen lässt.