Úlohy a problémy

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 84 (1959), No. 2, 198--199

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108535`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 84 (1959), Praha

ÚLOHY A PROBLÉMY

2. V rozšířeném eukleidovském prostoru nechť je dána hyperbolická lineární kongruence $\mathfrak{R}$ s jednou ohniskovou přímkou nevlastní. Ohniska kongruence $\mathfrak{R}$ nazveme též singulárními body 1. druhu. Dále nechť je dána rovina ϱ, která obsahuje pouze dva singulární body 1. druhu: jeden vlastní a jeden nevlastní. Body ležící na spojnici obou těchto singulárních bodů 1. druhu nazveme singulárními body 2. druhu.

Každému nesingulárnímu bodu v prostoru přiřaďme průsečík roviny ϱ s tou přímkou kongruence $\mathfrak{R}$, která prochází daným bodem. Takové zobrazení množiny nesingulárních bodů prostoru do množiny bodů roviny ϱ nazveme $\mathfrak{R}$-*zobrazením.*

Snadno lze dokázat tato tvrzení: $\mathfrak{R}$-obrazem nevlastního bodu je opět nevlastní bod. Úplným $\mathfrak{R}$-vzorem nesingulárního bodu roviny ϱ je přímka*) kongruence $\mathfrak{R}$. Úplným $\mathfrak{R}$-vzorem nevlastního nesingulárního bodu roviny ϱ je nevlastní přímka*) kongruence $\mathfrak{R}$. Jestliže přímka p neobsahuje žádný singulární bod, pak jejím $\mathfrak{R}$-obrazem je jednoduchá kuželosečka p', která prochází oběma singulárními body 1. druhu v rovině ϱ. $\mathfrak{R}$-obrazem orientované úsečky na p je orientovaný oblouk na p', který neobsahuje nesingulární nevlastní bod kuželosečky p'.

Formulace problému: V dané rovině ϱ mějme vlastní bod F a nevlastní bod G. Jednoduché kuželosečky, jdoucí body F a G, nazveme „přípustnými". Jestliže orientovaný oblouk na přípustné kuželosečce neobsahuje nevlastní bod různý od G, pak jej prohlásíme též za „přípustný". Mějme nyní tři přípustné oblouky $\bar{\mathfrak{q}}$, $\bar{\mathfrak{y}}$, $\bar{\mathfrak{z}}$, které leží na vzájemně různých přípustných kuželosečkách a které vycházejí z téhož bodu. Existují potom vzájemně kolmé vektory $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ téže délky a hyperbolická kongruence $\mathfrak{R}$ o ohniskovém bodu F a nevlastní ohniskové přímce jdoucí bodem G tak, že $\mathfrak{R}$-obrazem vektorů $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ jsou oblouky $\bar{\mathfrak{q}}$, $\bar{\mathfrak{y}}$, $\bar{\mathfrak{z}}$? Lze otázku upravit i tehdy, když hyperbolická kongruence $\mathfrak{R}$ je nahrazena parabolickou?

(Problém byl formulován dne 3. 12. 1958 v brněnském semináři deskriptivní geometrie.)

Václav Havel, Brno

3. Nechť je dán systém ekvivalentních množin B_i, kard $B_i = \mathfrak{n}$ pro $i \in I$, kard $I = \mathfrak{m}$ ($B_i \neq B_j$ pro $i \neq j$), kde $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{m}$ jsou libovolné mohutnosti. Transmutace (tj. prostá zobrazení) množiny B_i na B_j označujme φ_{ij}. Udejte nutné a postačující podmínky na typ nedisjunktnosti množin B_i, aby existoval transmutační Brandtův grupoid daného systému množin, který má hodnost $\mathfrak{m}$ a který je vytvořen transmutacemi splňujícími podmínku

$$\varphi_{ij}(x) = x \quad \text{pro} \quad x \in B_i \cap B_j\,. \tag{1}$$

*) bez singulárních bodů.

Předepíšeme-li pro $\mathfrak{n} = 2$ a $\mathfrak{m} = 5$ systém množin $B_i = \{a_i, a_{i+1}\}$ pro $i = 1, 2, 3, 4$ a $B_5 = \{a_5, a_1\}$, pak podmínkou (1) jsou již jednoznačně určeny transmutace $\varphi_{i,i+1}$ pro $i = 1, 2, 3, 4$ i $\varphi_{1,5}$, ale $\varphi_{12}\varphi_{23}\varphi_{34}\varphi_{45} \neq \varphi_{15}$, takže žádaný Brandtův grupoid hodnosti $\mathfrak{m}$ neexistuje.

Nutnou podmínkou pro existenci takového grupoidu je, aby neexistovala taková množina $B \subset \bigcup_{i \in I} B_i$, že

$$\operatorname{kard} B > \mathfrak{n} \tag{2}$$

a

$$x, y \in B \Rightarrow \text{existuje taková } B_i, \text{ že } x, y \in B_i\,, \tag{3}$$

(srv. K. Čulík: *Charakterisace Brandtových grupoidů pomocí přímých součinů*, referát na str. 200—202). Z předešlého příkladu však plyne, že tato podmínka není postačující.

Položená otázka souvisí s určováním chromatického čísla grafu a pro $\mathfrak{n} = 2$ je odpověď známa.

Karel Čulík, Brno