

Časopis pro pěstování matematiky

Jiří Fábera

Dvacet pět let Matematického ústavu Československé akademie věd

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 102 (1977), No. 4, 321--333

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/108525>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1977

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY

Vydává Matematický ústav ČSAV, Praha

SVAZEK 102 * PRAHA 21. 11. 1977 * ČÍSLO 4

DVACET PĚT LET MATEMATICKÉHO ÚSTAVU ČESKOSLOVENSKÉ AKADEMIE VĚD

Jiří FÁBERA, Praha*)

V listopadu 1977 uplynulo dvacet pět let od založení Československé akademie věd; její vznik měl mimořádný význam pro rozvoj vědy v naší zemi. Současně se založením Československé akademie věd vznikl Matematický ústav Československé akademie věd z tehdejšího Ústředního ústavu matematického. Prvním ředitelem Matematického ústavu ČSAV byl akademik EDUARD ČECH, nositel Řádu republiky a Řádu práce, jehož vědecké výsledky byly dvakrát oceněny Státní cenou Klementa Gottwalda. Eduard Čech koncipoval a postupně realizoval velkorysý plán výchovy mladých pracovníků v řadě matematických disciplín, v nichž se do té doby v Československu nepracovalo. To umožnilo pozdější rychlý rozvoj československé matematiky. Po odchodu Eduarda Čecha na Karlovu univerzitu se stal ředitelem Matematického ústavu ČSAV člen korespondent ČSAV VLADIMÍR KNICHAL, nositel Řádu práce. Vladimír Knichal stál v čele Matematického ústavu ČSAV osmnáct let; měl plné pochopení pro potřebu a význam aplikací matematiky a sám na tomto poli aktivně pracoval. Za jeho působení Matematický ústav ČSAV vzrostl asi trojnásobně a získal svůj dnešní profil. V letech 1972–1976 byl ředitelem Matematického ústavu akademik JOSEF NOVÁK, nositel Řádu práce. Josef Novák vedl dlouhá léta oddělení teorie pravděpodobnosti a matematické statistiky Matematického ústavu ČSAV a významně ovlivnil rozvoj práce v topologii. Zastával řadu vysokých funkcí v Československé akademii věd a v současné době je předsedou vědeckého kolegia matematiky ČSAV. Od r. 1976 je ředitelem Matematického ústavu ČSAV Prof. Jiří FÁBERA.

Matematický ústav ČSAV je dnes mezinárodně uznávané vědecké pracoviště a významně se podílí na řešení úkolů Státního programu základního výzkumu. Má tato vědecká oddělení:

oddělení obyčejných diferenciálních rovnic,

oddělení parciálních diferenciálních rovnic,

oddělení konstruktivních metod pro řešení diferenciálních rovnic,

*) Na přípravě tohoto článku spolupracovali M. FIEDLER, Z. FROLÍK, J. KURZWEIL, M. PRÁGER, V. PTÁK, O. VEJVODA, J. VYŠÍN, F. ZÍTEK.

oddělení numerických metod, teorie grafů a matematické logiky,
oddělení funkcionální analýzy,
oddělení teorie pravděpodobnosti a matematické statistiky,
oddělení základních matematických struktur.

Součástí Matematického ústavu ČSAV je pobočka Matematického ústavu ČSAV v Brně a Kabinet pro modernizaci vyučování matematice.

Pokusíme se nyní přiblížit čtenáři, v kterých hlavních směrech pracují vědecká oddělení a jak se tato práce vyvíjela. Tento přehled však zdaleka není vyčerpávající.

Již v Ústředním ústavu matematickém se malá skupina pracovníků zabývala obyčejnými diferenciálními rovnicemi. Seminář k této problematice se začal pravidelně scházet v r. 1954 a oddělení obyčejných diferenciálních rovnic bylo ustaveno v r. 1955. Témata, na která se soustřeďovalo nejvíce pozornosti, byla (i) periodická řešení nelineárních soustav a (ii) l'japunovská teorie stability. Obě témata byla zvolena šťastně. Poměrně brzy bylo dosaženo výsledků o existenci a stabilitě periodického řešení v závislosti na parametrech a o charakterizaci různých variant pojmu „stabilní řešení“ pomocí l'japunovských funkcí odpovídajících vlastností. Kromě toho obě témata podnítila práci v dalších směrech. Na téma (i) navázalo vyšetřování periodických řešení parciálních diferenciálních rovnic; o tom se ještě zmíníme v odstavci, věnovaném parciálním diferenciálním rovnicím. Má-li autonomní diferenciální rovnice nekonzstantní periodické řešení, pak má jednoparametrickou soustavu periodických řešení, která z daného řešení vzniknou posunutím v čase. Proto s tématem (i) souvisí vyšetřování tzv. invariantních variet, tj. variet, které jsou vyplněny trajektoriemi (resp. charakteristikami) řešení dané diferenciální rovnice. Zejména zajímavá je ta situace, kdy invariantní varieta se jen málo změní při malých změnách diferenciální rovnice. Přitom u neautonomních rovnic lze významným způsobem zeslabit pojem „malá změna“; souvisí to s tzv. rychlými a pomalými pohyby v teorii oscilací. Od zeslabení pojmu „malá změna diferenciální rovnice“ vede přímá cesta k zobecnění pojmu „diferenciální rovnice“; v podstatě jde o jisté „zúplnění“ množiny klasických diferenciálních rovnic. Toto zúplnění lze provést rozmanitým způsobem; např. lze zavést třídu diferenciálních rovnic, jejichž řešení nejsou nutně absolutně spojitá, mají však omezenou variaci. Za tyto výsledky byl člen korespondent ČSAV J. KURZWEIL vyznamenán Státní cenou Klementa Gottwalda v r. 1964. Metoda invariantních variet byla později uplatněna při vyšetřování diferenciálních rovnic se zpožděným argumentem. Zobecněné diferenciální rovnice a studium obecných okrajových úloh vyústily ve vyšetřování jistých operátorových rovnic a integrálních rovnic v prostoru funkcí s omezenou variací. Z tématu (ii) se vyvinul zájem o vliv stochastických poruch na řešení deterministických diferenciálních rovnic a později byla soustavně vyšetřována Itoova diferenciální rovnice; byla vypracována metoda odhadu difúze a nalezeny nové souvislosti s parciálními diferenciálními rovnicemi parabolického typu. Snaha oslabit předpoklad, že pravá strana diferenciální rovnice spojitě závisí na závisle proměnné, vede k diferenciálním relacím; s jejich vyšetřováním bylo započato nedávno.

V Matematickém ústavu ČSAV v Brně v letech 1970–1972 a od r. 1972 v pobočce Matematického ústavu ČSAV v Brně pokračovalo vyšetřování disperzí a transformací lineární rovnice druhého řádu, zahájené na přírodovědecké fakultě Univerzity J. E. Purkyně v Brně začátkem padesátých let. Byla vytvořena úplná teorie globálních transformací lineární diferenciální rovnice druhého řádu, vyjasněna souvislost těchto transformací s řešením jisté nelineární diferenciální rovnice třetího řádu a byly odkryty hluboké algebraické zákonitosti v této třídě transformací. Tento jednotící přístup k lineárním diferenciálním rovnicím druhého řádu umožnil řešit celou řadu speciálních problémů. Za vytvoření této teorie byl poctěn Státní cenou Klementa Gottwalda v r. 1968 akademik O. BORŮVKA. V poslední době byla teorie globálních transformací rozšířena na lineární diferenciální rovnice n -tého řádu.

Oddělení parciálních diferenciálních rovnic se v ústavu konstituovalo roku 1955. Problematika, jíž se oddělení zabývalo, byla v úzké souvislosti s obecnou mechanikou kontinua a někdy i se speciálními problémy technického charakteru (např. vývin tepla při stavbě přehrad). Velká pozornost byla věnována numerickým metodám, jak o tom bude ještě řeč níže. Na konci padesátých let se od tohoto oddělení oddělila skupina pracovníků, jež si za svůj hlavní cíl kladla soustavné vyšetřování především rovnic eliptického a parabolického typu. Z počátku byly studovány především kvalitativní vlastnosti řešení lineárních rovnic. Hlavní pozornost byla věnována tzv. zobecněným (slabým) řešením, která jsou z fyzikálního hlediska přirozenější než řešení klasická, i když vyžadují náročnější funkcionálně-analytický aparát. Těžištěm činnosti této skupiny byl (a vlastně dosud je) výzkum rovnic eliptického typu. Jde o tyto problémy: rozvíjení teorie slabých řešení, a to pro rovnice i pro soustavy rovnic, aplikace této teorie na konkrétní úlohy (především z teorie pružnosti), zkoumání funkcionálních prostorů, souvisejících se zobecněnými řešeními, a konečně podrobné zkoumání regularity slabých řešení (což souvisí velice úzce s devatenáctým Hilbertovým problémem). Shrnutí výsledků dosažených v teorii lineárních eliptických rovnic představuje monografie J. NEČASE *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques* (Academia, Praha, 1967).

Od roku 1965 se těžiště bádání přesunuje na nelineární eliptické rovnice. Jde především o systematické vyšetřování moderních metod řešení těchto rovnic, založených na hlubokých výsledcích z funkcionální analýzy (variační metoda, metoda monotónních operátorů). Předmětem zkoumání nebyly jen konkrétní rovnice; ve vší obecnosti byly vyšetřovány obecné nelineární operátory, podrobně byly popsány jejich spektrální vlastnosti a v posledních letech byla nemalá pozornost věnována i aktuální problematice tzv. variačních nerovnic. Lze říci, že v oboru nelineárních operátorových rovnic vznikla v ČSSR mezinárodně uznávaná škola, která vyvíjí činnost především v Matematickém ústavu ČSAV a na matematicko-fyzikální fakultě Karlovy university. Jisté shrnutí výsledků představuje monografie *Spectral analysis of nonlinear operators* (Lectures Notes in Mathematics No. 346, Springer Verlag 1973) autorů S. FUČÍKA, J. NEČASE, J. SOUČKA a V. SOUČKA.

Důležitým aparátem v teorii parciálních diferenciálních rovnic je teorie funkčních

prostorů. V této problematice bylo v oddělení dosaženo významných výsledků především při zavádění nových prostorů (váhových, anisotropních apod.) a při jejich užití pro řešení okrajových úloh.

Od roku 1965 se v oddělení také systematicky studuje teorie potenciálu. Významných výsledků bylo dosaženo při vyšetřování okrajového chování potenciálů v souvislosti s jejich aplikacemi na rovnice matematické fyziky i v abstraktní teorii harmonických prostorů. Značná pozornost byla věnována vyšetřování vlivu geometrické struktury v oblasti na chování potenciálů a jejich aplikabilitě na řešení okrajových úloh eliptického i parabolického typu. Tato problematika je studována v semináři, na jehož práci se podstatně podílejí rovněž pracovníci vysokých škol, zejména matematicko-fyzikální fakulty Karlovy university.

V rámci oddělení obyčejných diferenciálních rovnic byla na začátku šedesátých let studována existence periodických řešení lineární i slabě nelineární vlnové rovnice. S přibývajícím počtem pracovníků, zabývajících se touto tematikou, vznikla nakonec samostatná skupina, jež se později stala součástí oddělení parciálních diferenciálních rovnic. Tato skupina soustavně vyšetřila existenci periodických řešení všech základních typů rovnic matematické fyziky (rovnice vlnové, telegrafní, difúzní, rovnice tyče, desky, atd.). Postupně bylo zkoumáno užití rozličných metod (metoda Poincarého, Günzlerova, Fickenova-Fleischmannova aj.) a různé modifikace metody Fourierovy a hodnocena jejich vlastnost v problémech lineárních i slabě nelineárních. Velká pozornost byla věnována resonančním případům, (tj. případům, kdy perioda „vnějších sil“ je v racionálním poměru k vlastním kmitům limitní rovnice), jež zpravidla vedou na řešení obtížných silně nelineárních úloh. Mnoho výsledků, platných pro shora uvedené speciální typy rovnice, se podařilo přenést na abstraktní diferenciální rovnice typu

$$(1) \quad u' + Au = g + \varepsilon F(u),$$

$$(2) \quad u'' + Au = g + \varepsilon F(u),$$

$$(3) \quad u'' + (\alpha + \beta A)u' + Au = g + \varepsilon F(u),$$

kde A je neohraničený lineární operátor v Banachově prostoru a F je obecně nelineární operátor „podřízený“ operátoru A . Dosažené výsledky byly shrnuty do rozsáhlé připravované monografie o periodických řešeních parciálních diferenciálních rovnic, na níž pracovala většina členů skupiny. Kromě řešení periodických byla pro obdobné problémy vyšetřována i existence řešení skoroperiodických. Bylo zde dosaženo významných výsledků, a to často na základě hlubokých vět z funkcionální analýzy. Studium markovovských procesů, zejména procesů difúzních, dalo v padesátých letech podnět ke studiu teorie semigrup operátorů, která úzce souvisí s teorií počátečního problému pro rovnici (1) (pro $g = 0$ a $\varepsilon = 0$). Zároveň s touto teorií byla v šedesátých letech vypracována teorie „kosinových“ funkcí, která úzce souvisí

s počátečním problémem pro rovnici (2) (pro $g = 0$ a $\varepsilon = 0$). V posledních letech je studována korektnost a stabilita počátečního problému pro rovnici n -tého řádu

$$(4) \quad u^{(n)}(t) + A_1 u^{(n-1)}(t) + \dots + A_n u(t) = 0,$$

kde A_1, \dots, A_n jsou neohraničené operátory.

Při rozdělení původního oddělení parciálních diferenciálních rovnic počátkem šedesátých let vzniklo oddělení konstruktivních metod řešení diferenciálních rovnic. Již od založení ústavu však probíhal výzkum v oblasti aplikací matematiky a numerického řešení diferenciálních rovnic. V následujícím uvádíme i tyto výsledky. V padesátých letech, po založení ústavu, se v oddělení řešily matematické problémy, spojené s výstavbou vodního díla Orlik. Pro urychlení výstavby se uvažovaly dvě varianty, a to stavba ve vysokých pracovních vrstvách a za druhé umělé chlazení vodou proudící v trubkách, uložených v betonovém masivu. Beton při tvrdnutí vyvíjí dosti značné množství tepla a bylo nutno posoudit nebezpečí vzniku trhlin v důsledku tohoto procesu. Původním úmyslem bylo aplikovat již dříve rozvíjenou matematickou teorii rovinné pružnosti na základě teorie funkcí komplexní proměnné. Problematika se však ukázala být velmi rozsáhlou a vedla v podstatě ke studiu eliptických rovnic zejména vyšších řádů (biharmonické rovnice) a parabolických rovnic (rovnice pro vedení tepla) včetně metod jejich numerického řešení. Přitom bylo v některých případech nutno uvažovat i nelineární vlivy, které vedly k formulaci a studiu speciálních integrodiferenciálních rovnic. V těchto souvislostech se začínaly pěstovat variační metody řešení parciálních diferenciálních rovnic. V oblasti numerického řešení zmíněných typů rovnic se rozvíjela metoda sítí. Tento velký komplex problémů, na němž práce skončila koncem padesátých let, dal vznik i několika kandidátským pracím a určil i nadále po značnou dobu tématické zaměření práce.

Dalším důležitým faktorem, který ovlivnil volbu problematiky, byl příchod samočinných počítačů. Část poslední fáze výpočtů, souvisejících s vodním dílem Orlik, byla prováděna, zároveň ještě s rozsáhlými výpočty na stolních kalkulačkách, na počítači URAL I. V pozdějším období, začátkem šedesátých let, bylo dosaženo zajímavých výsledků při vyšetřování závislosti řešení okrajových úloh pro eliptické rovnice na malé změně definiční oblasti. Tato problematika je totiž důležitá z hlediska aplikací i numerického řešení. Dalšími výsledky bylo dosaženo při vyšetřování chování řešení při zmenšování jednoho rozměru oblasti. Jiným zajímavým výsledkem bylo vybudování teorie diskrétní Fourierovy transformace. Této metody bylo použito k řešení nekonečných soustav algebraických rovnic, vznikajících v teorii pružnosti. Kromě toho byla tímto aparátem studována problematika dislokací v molekulární mřížce, které slouží jako model pro výklad pružného chování materiálů.

Od poloviny šedesátých let, v podstatě až dodnes, ovlivňuje zaměření a práci oddělení problematika numerického řešení diferenciálních rovnic na počítačích a problematika numerických výpočtů vůbec. V této době přicházejí i mladí pracovníci, jejichž studium bylo zaměřeno na využívání počítačů. Výzkum v tomto období je

charakterizován studiem dvou velkých problémů: numerické stability a optimalizace. Příchod problematiky numerické stability s výkonnými počítači byl zcela přirozený. Velké množství prováděných operací nese sebou nebezpečí ovlivnění, případně i úplného znehodnocení výpočtu zaokrouhlovacími chybami. Pro studium této problematiky při numerickém řešení diferenciálních rovnic byla vybudována teorie numerických procesů. Výpočet je zde chápán jako jeden celek, tj. diskrétní verze původního spojitého problému i metoda jeho řešení se považují za numerický proces, jehož závislost na diskretizačním parametru se vyšetřuje. Při tomto studiu bylo nutno upřesnit některé dřívější názory na problematiku zaokrouhlovacích chyb. Výsledky, v této oblasti dosažené, byly shrnuty v knižní publikaci. Problematika optimalizace vycházela z prací S. L. SOBOLEVA o kvadraturních vzorcích, ale svým pojetím univerzální aproximace i aplikacemi na výpočet obecnějších funkcionalů přispěla podstatnou měrou k rozvoji této teorie. I zde stimulačním faktorem byla možnost získat výsledky, které by byly užitečné při aplikaci pro výpočty na počítači.

Koncem šedesátých let se objevila problematika metody přesunu podmínek, která se rozvinula začátkem sedmdesátých let. Tato metoda, již dříve ve speciálních případech aplikovaná, je metoda numericky stabilního převodu okrajových úloh na počáteční úlohy (na rozdíl od metody střelby). Metoda přesunu podmínek byla vypracována pro velmi obecný okrajový problém pro lineární soustavu obyčejných diferenciálních rovnic s vnitřními a přechodovými podmínkami. Podrobně byla studována numerická stabilita metody a vypracován příslušný výpočetní algoritmus. Pozornost byla věnována i matematickým modelům v mechanice tuhé fáze. Jistá nelineární evoluční úloha z teorie vazkopružných těles byla řešena v souvislosti s návrhem teplotního řízení při žhání nádoby jaderného reaktoru. Výsledky byly realizovány při výstavbě jaderné elektrárny A 1 v Jaslovských Bohunicích.

V tomto období ve světovém měřítku zároveň začíná rozvoj matematické teorie metody konečných prvků. K rozvoji této metody přispěla řada prací, které rozpracovávají užití duálních a smíšených variačních principů. Tato problematika zasahuje až do současnosti, kdy je velká pozornost věnována úlohám s jednostrannými okrajovými podmínkami i úlohám kontaktním. Tyto úlohy spadají do obecné problematiky variačních nerovnic. Teoretických výsledků bylo použito při výstavbě pražského metra a ke konstrukci turbin. Kromě toho byla vypracována metodika konstrukce aproximačních funkcí v metodě konečných prvků, které dávají řád aproximace, závislý jen na aproximované funkci.

V posledním období se pěstuje problematika numerického řešení evolučních problémů. Na základě vypracované silně implicitní metody bylo dosaženo užitečných výsledků pro numerické řešení soustav obyčejných diferenciálních rovnic s velmi rozdílnými časovými konstantami (stiff systémy) a pro numerické řešení parabolických rovnic. Tato metodika umožnila zkonstruovat metody s libovolným řádem aproximace vzhledem k časovému kroku dělení. Tato práce se nyní dále rozvíjí při aplikaci metody na abstraktní rovnice. V oblasti aplikací se řeší problematika chlazení transformátorů s velkým výkonem.

Algebraické numerické metody se v Matematickém ústavu ČSAV pěstovaly již od doby jeho založení. Podněty ze semináře V. Knichala vedly k prvním výsledkům. Ustavila se malá skupina pracovníků, která se v r. 1955 stala oddělením numerických metod. Bylo dosaženo výsledků o řešení polynomiální rovnice, hlavní náplní však byla, a zčásti je dosud, problematika iteračních metod a s ní spojené otázky rychlosti konvergence. Významných výsledků bylo dosaženo ve vyšetřování Gaussovy-Seidelovy metody pro řešení soustav lineárních rovnic určitého typu, později i o řešení soustav nelineárních rovnic, problému vlastních čísel atd. Byla vybudována teorie zobecněných (vektorových) norem a rozvinuta teorie M -matic (matic třídy K). Obou směrů bylo použito k získání velmi silných odhadů vlastních čísel matic.

Další směr, který upoutal a dosud poutá pozornost pracovníků oddělení, byla problematika souvislosti kombinatorické struktury nenulových prvků matice s některými charakteristikami matice. Zde se uplatnila terminologie a metody teorie grafů, ostatně již dříve použité ke studiu simplexů v n -rozměrném euklidovském prostoru. Tak bylo nalezeno vyjádření hlavních minorů matice pomocí ohodnoceného grafu matice, vyjádření struktury inverzní matice k matici dané kombinatorické struktury a struktury matic, které vznikají při aplikaci eliminační metody. V poslední době je v této souvislosti věnována pozornost lineárním problémům s velkou řídkou maticí, tj. s maticí, která má jen malé procento nenulových prvků. Takové problémy se vyskytují v ekonomii, ve stavebnictví, v jaderné technice i jinde.

Řada výsledků se týkala speciálních tříd matic, maticových nerovností a nově zavedených maticových funkcí (např. zobecněných složených matic). Zejména byly vyšetřovány nezáporné matice, jejich spektrální vlastnosti, jakož i zobecnění těchto matic na operátory zachovávající konvexní kužel.

Důležitých výsledků bylo dosaženo i v samotné teorii grafů. Pracovalo se zde mj. v problematice koster grafů a vnořování grafů do grafů speciálního typu (např. do grafu hran n -rozměrné krychle).

Součástí oddělení numerických metod je také skupina matematické logiky. Matematická logika měla v Matematickém ústavu ČSAV vynikajícího představitele v předčasně zesnulém doc. L. RIEGROVI, který pracoval v intuicionistickém výrokovém počtu, v algebraických metodách logiky a v axiomatické teorii množin. Jeho žáci navázali zejména na výzkum v teorii množin a podíleli se na studiu metamatematických vlastností teorie množin (důkazy nezávislosti různých tvrzení na axiomech teorie množin) a na vybudování systémů teorií množin zobecňujících nebo nahrazujících.

Důležitý byl rovněž rozvoj logických aspektů informatiky (Computer Science) a obecných matematických základů této disciplíny. Byly studovány formální jazyky a rozvinuta obecná teorie algoritmických struktur. Jako aplikace matematické logiky v informatice byly vyvinuty některé metody automatické formace hypotéz.

Některí pracovníci dnešního oddělení numerických metod, teorie grafů a matematické logiky mají hlavní podíl na spolupráci MÚ ČSAV s n. p. Aritma. V minulých letech byl zde vypracován překladač programovacího jazyka Fortran pro počítač

A 1010, v současné době se pracuje na problematice programového vybavení nového výpočetního systému KA 10 pro práci s databázemi.

Funkcionální analýzou se zabývala malá skupina pracovníků již v Ústředním ústavu matematickém. V padesátých letech se začal pravidelně scházet seminář z funkcionální analýzy, později se konstitovalo oddělení topologie a funkcionální analýzy; od něj se v r. 1977 oddělila skupina topologie. Od samého počátku se kladl velký důraz na souvislosti s numerickou matematikou. Vznikla celá řada prací ve spolupráci s oddělením numerických metod, věnovaných otázkám lineární algebry, důležitým pro aplikace, zejména v numerické matematice, ale i v jiných oborech, jako je např. teorie pravděpodobností nebo matematická ekonomie. Jejich význam však zasahuje i dále, např. do navrhování obvodů s transistory. Zároveň se studovaly některé základní souvislosti úplnosti topologických lineárních prostorů s otevřeností lineárních zobrazení. Jedním z významných výsledků těchto vyšetřování, je charakterizace prvků úplného obalu lokálně konvexního prostoru, kterého se u nás dosáhlo nezávisle na francouzském badateli A. GROTHENDIECKOVI.

V téže době vznikla myšlenka studia doplňování topologických prostorů formálními lineárními kombinacemi bodů. Uzávěr takto vzniklého lineárního prostoru lze potom interpretovat jako jistou množinu měr. Takové lineární kombinace lze přirozeným způsobem považovat za lineární funkcionály na prostoru spojitých funkcí, takže daný topologický prostor S je vnořen do duálního prostoru $C(S)'$. Vyvrcholením těchto vyšetřování je věta, která podává nutné a postačující podmínky pro to, aby separátně spojitá funkce na kartézském součinu dvou topologických prostorů $S \times T$ měla rozšíření na $C(S)' \times C(T)'$, které je separátně spojitou bilineární formou. Tato věta obsahuje jako speciální případ obě klasické věty o slabé kompaktnosti, větu Eberleinovu i větu Krejnovu o slabé kompaktnosti konvexního obalu. V interpretaci teorie her jde v podstatě o to, aby příslušná funkce, definovaná jen na čistých strategiích, měla separátně spojitě bilineární rozšíření na smíšené strategie. Za výsledky v teorii lineárních prostorů byla udělena Státní cena Klementa Gottwalda Prof. V. PTÁKOVI.

Dalším velikým celkem, který úzce souvisí s numerickou matematikou, jsou otázky konvergence iteračních procesů. V této souvislosti vznikla myšlenka tzv. kritického exponentu. V podstatě jde o tuto otázku: pro řadu iteračních procesů jsou známy teoretické podmínky, jejichž splnění zaručuje konvergenci procesu. Jejich verifikace může však být velmi obtížná, dokonce někdy obtížnější než řešení samého problému. Myšlenka kritického exponentu spočívá, zhruba řečeno, v tomto: Jestliže kritický exponent uvažovaného procesu je roven číslu q , znamená to, že lze o konvergenci tohoto procesu rozhodnout na základě chování prvních q kroků, aniž se verifikují jakékoli podmínky konvergence. Pozdější výsledky umožňují dokonce získat nejen kvalitativní výsledek, zda metoda konverguje, ale dokonce i kvantitativní informaci o rychlosti konvergence.

Měření rychlosti konvergence iteračních procesů je předmětem dalšího rozsáhlého souboru prací, věnovaného mírám konvergence.

Byly položeny základy k nové teorii existenčních vět iterativního typu, tzv. metoda spojitě matematické indukce, která umožňuje vyšetřování procesu převést na řešení jistých systémů funkcionálních nerovností. Zejména se touto metodou podařilo poprvé v historii získat odhady pro Newtonův proces ostré v každém kroku.

V šedesátých letech se oddělení rozrostlo o některé mladší pracovníky; z jejich příspěvků vynikly zejména cenné práce z teorie lineárních operátorů a jejich aplikací; v novější době vznikly některé práce z nelineární analýzy, z nich je nutno jmenovat práce týkající se problémů podrelaxovaných metod a tzv. malých dělitelů, které zobecňují výsledky KOLMOGOROVA a ARNOLDA. Mezi cenné aplikace metod funkcionální analýzy patří též studium rozpadu nestabilních částic (ve spolupráci s Fyzikálním ústavem ČSAV).

Také v teorii pravděpodobnosti a v matematické statistice se v Matematickém ústavu ČSAV pracuje od počátku jeho existence; ostatně již v Ústředním ústavu matematickém byla nevelká skupina pracovníků, která se zabývala především aplikacemi metod matematické statistiky.

Tato tradice úzké spolupráce s praxí a s aplikovaným výzkumem, zvláště v zemědělských, biologických a lékařských vědách, trvá dodnes. Pohled na dlouholetou činnost v tomto směru a její konkrétní výsledky nás přesvědčují o účelnosti a účinnosti těchto aplikací. Pracovníci Matematického ústavu se tu podíleli na rozsáhlých průzkumech antropologických, na výzkumu kazivosti zubů, na řadě šlechtitelských výzkumů v zemědělské rostlinné i živočišné výrobě.

Nešlo ovšem jen o pouhé použití známých metod. Pro účely hodnocení výsledků složitých experimentů, např. polních pokusů, byly vypracovány nové modely a postupy, mj. metoda vyloučení půdních trendů v blokových pokusech, včetně odvození nutných a postačujících podmínek existence řešení pro příslušný matematický model.

V souvislosti s aplikacemi matematické statistiky v zemědělství má zvláštní význam genetický seminář, v němž se mnoho let zkoumala problematika genetiky populací; účast pracovníků Matematického ústavu na tomto semináři byla podstatná.

Plodná spolupráce s praxí ovlivnila také práci v matematicko-statistické teorii. Za hlavní směry výzkumné činnosti Matematického ústavu ČSAV v tomto oboru lze označit jednak teorii výběrových šetření, zejména teorii výběru z konečné populace, kde byla vykonána skutečně průkopnická práce, jednak teorii neparametrických testů, kde byla hlavně vybudována asymptotická teorie požadovaných testů. Získané výsledky, např. odvození nutných a postačujících podmínek pro asymptotickou normalitu požadovaných testů, přitom dosáhly opravdu světového uznání. V současné době se výzkumná činnost v Matematickém ústavu orientuje na tematiku lineárních modelů a mnohorozměrných statistických problémů.

Druhou součástí práce v oddělení je výzkum ve vlastní teorii pravděpodobnosti. Také zde lze vyčlenit tři hlavní směry, které tu byly v průběhu uplynulého čtvrtstoletí pěstovány.

Poměrně nejstálejším byl směr, který se – v podstatě po celou dobu existence ústavu – orientoval na topologické základy teorie pravděpodobnosti a teorie míry

a který nakonec vyústil v relativně samostatné studium tzv. konvergenčních struktur.

Druhou velkou oblastí teorie pravděpodobnosti, k níž pracovníci Matematického ústavu ČSAV přispívali, je teorie stochastických procesů, zejména procesů markovovských. Byly podrobně studovány otázky podmíněných limitních pravděpodobností za předpokladu, že proces zůstává v určité množině stavů, teorie větvících se procesů se spojitým systémem stavů a otázky klasifikace a ergodických vlastností Markovových řetězců s obecným systémem stavů. Zde bylo mj. dokázáno, že u nerozložitelných Markovových řetězců lze provést obdobnou klasifikaci jako v klasickém případě, ale jejich spektrální vlastnosti se výrazně liší.

K tomuto směru lze připojit též studium některých aplikovaných partií teorie stochastických procesů, např. teorie hromadné obsluhy, kde jsou markovovské procesy hlavním pracovním nástrojem.

Třetí významný směr práce tohoto oddělení Matematického ústavu leží na pomezí teorie pravděpodobnosti a matematické statistiky. Tvoří jej výzkum statistických problémů ve stochastických procesech, jednak gaussovských, jednak integrovatelných s kvadrátem. Zde byla originálním způsobem vybudována teorie obecných regresních odhadů. Byly odvozeny jak ryze teoretické výsledky, tak i metody vhodné pro konkrétní výpočty.

Vedle těchto hlavních směrů vznikla v Matematickém ústavu ČSAV řada prací, orientovaných k jednotlivým problémům teorie pravděpodobnosti. Za zvláštní zmínku stojí především práce o podmíněných pravděpodobnostech a podmíněných středních hodnotách.

Mezi topologická témata, na která se od r. 1962 zaměřovala pozornost skupiny topologů (nyní oddělení základních matematických struktur) patřilo

- (i) zkoumání obecných struktur spojitosti,
- (ii) zkoumání filtrů, a to mj. v souvislosti s problematikou klasifikace nespojitých funkcí.

Ve směru (i) byly především zkoumány merotopické prostory, jež zahrnují jako speciální případ prostory topologické a uniformní (merotopické prostory se fakticky vyskytly již u E. Čecha, jenž však je nezkoumal jako zvláštní druh prostorů). Byly získány důležité obecné poznatky o těchto prostorech, jež, jak se ukázalo, lze dostat jako kvocienty uniformních prostorů. Mj. byla nalezena jednoduchá „universální“ třída těchto prostorů, tj. taková třída, kde každý úplně regulární merotopický prostor lze vnořit do vhodného prostoru z této třídy, a bylo dokázáno, že – při omezení na jistou třídu merotopických prostorů – lze přirozeným způsobem zavést prostory zobrazení (což, jak známo, nejde pro topologické prostory). Ve směru (ii) byla mj. dosti podrobně zkoumána konvergence podle filtrů (i jiné druhy konvergence), což je ostatně pojítkem obou zmíněných tematických směrů. Na základě filtrové konvergence byla podána úplná klasifikace těch nespojitých funkcí, jež jsou společně dosažitelné spojitými funkcemi; tato klasifikace zahrnuje klasické Baireovo třídění. V této souvislosti byly též zkoumány součiny filtrů a byly konstruovány součinně idempotentní filtry, což mj. poskytuje jednotnou proceduru pro vytváření všech Baireových funkcí.

Od roku 1965 se soustředila pozornost mimo jiné též na tzv. separabilní deskriptivní teorii množin a na teorii ultrafiltrů.

Za práce v deskriptivní teorii množin byla v roce 1972 RNDr. Z. FROLÍKOVÍ, DrSc., udělena Státní cena Klementa Gottwalda. Bylo např. dokázáno, že bairovsky měřitelné zobrazení analytického (k -analytického v terminologii G. Choqueta) do metrického prostoru lze bez újmy na obecnosti pokládat za spojitě, což je silné tvrzení, které má aplikace např. na projektivní limity měř.

V teorii ultrafiltrů byla zavedena a studována dvě základní uspořádání R - K a R - F a problém nehomogenosti extrémálně nesouvislých kompaktních prostorů byl redukován na otázku linearity uspořádání R - F .

Od roku 1968 byla značná pozornost věnována studiu uniformních struktur motivovaná aplikacemi v neseperabilní teorii množin a v teorii míry (v návaznosti na práce RAJKOVA a LECAMA byly studovány tzv. uniformní míry a volné uniformní míry; tato teorie obsahuje velkou část topologické teorie míry a cylindrické míry). V obou zaměřeních bylo dosaženo řady hlubokých výsledků. Ve vlastní teorii uniformních prostorů bylo např. dokázáno, že lokálně jemné prostory jsou subjemné, což řešilo jeden z centrálních problémů v monografii J. ISBELLA. Vyšetřování uniformních měř bylo nosným programem pro studium teorie míry z nejrůznějších hledisek; v poslední době se objevily první výsledky v deskriptivní kvantové teorii pole.

V posledních letech se začaly zkoumat otázky, související s aplikacemi matematiky v psychologických a biologických oborech, a to

- (i) po stránce matematické tematiky motivované problémy zmíněných oborů,
- (ii) po stránce matematického modelování některých jevů z oblasti psychologie a lékařství.

Ve směru (i) byly získány některé věty o soustavách prahově lineárních transformací a jejich souvislostech s klasifikací nespojitých funkcí, v poslední době pak věty o charakteristikách konečných metrizovaných pravděpodobnostních polí (v souvislosti s teorií informace). Ve směru (ii) se nyní na konkrétním materiálu zkoumá problematika modelů onemocnění, v jejichž průběhu se vyskytují jak prudké oscilace, tak i povlnná deteriorace.

V roce 1970 vznikla pobočka Matematického ústavu ČSAV v Brně. Má sice jen malý počet pracovníků, vyvíjí však bohatou činnost. Kromě problematiky obyčejných diferenciálních rovnic, o níž již byla řeč, se pěstuje diferenciální geometrie (teorie jetů a prostorů s konexí) a algebraická lingvistika. V obou těchto disciplínách bylo dosaženo hlubokých výsledků.

Součástí Matematického ústavu ČSAV je též Kabinet pro modernizaci vyučování matematice. Vznikl v roce 1969 přiřazením matematické části tehdejšího Kabinetu pro modernizaci vyučování matematice a fyzice k Matematickému ústavu ČSAV. Kabinet provádí základní výzkum ve vyučování matematice. Spolupracuje s třinácti

experimentálními školami (10 základními, 3 gymnázii) a se šesti vysokoškolskými fakultami. Byly vypracovány pokusné osnovy a učební texty pro všechny ročníky ZDŠ i gymnázií. Zkušenosti získaných při vyučování na experimentálních školách se využívá při tvorbě osnov a učebnic pro ZDŠ a gymnázia.

Práce Kabinetu tématicky navazuje na práci oddělení elementární matematiky, které bylo v Matematickém ústavu ČSAV v letech 1952–1964. Toto oddělení mělo významnou úlohu ve dvou směrech. Především přispělo prací na poli elementární a školské matematiky k zvýšení úrovně školské matematiky a zájmu o ni jak v Matematickém ústavu, tak i v širší veřejnosti. Pracovníku oddělení doc. J. HOLUBÁŘOVI byla udělena Komenského medaile. Dále pak mělo toto oddělení hlavní podíl na organizaci matematické olympiády. Tato již všeobecně známá soutěž byla založena z podnětu akademika E. Čecha v roce 1951 a od svého vzniku je Matematický ústav ČSAV jejím spoluorganizátorem.

Vědecko-výzkumnou činností se zdaleka nevyčerpává práce ústavu. Matematický ústav se také podílí na zpracování a kontrole matematických úkolů státních programů základního výzkumu a na organizaci vědecké práce v matematice vůbec. Je významným školícím pracovištěm, na kterém vyrostlo a vyrůstá mnoho mladých vědeckých pracovníků československých i zahraničních. Věnuje také velkou pozornost mezinárodní vědecké spolupráci. Uzavřel celou řadu dohod s matematickými pracovišti zemí RVHP, pravidelně pořádá „Pražská topologická symposia – TOPOSYM“ a „Porady československých a sovětských matematiků“, společně s jinými matematickými pracovišti v ČSSR pak „Československé konference o diferenciálních rovnicích a jejich aplikacích – EQUADIFF“, „Československá symposia o teorii grafů“, konference „Základní problémy numerické matematiky“ a mnoho dalších konferencí a symposií.

Matematický ústav ČSAV vydává časopisy *Czechoslovak Mathematical Journal* a *Časopis pro pěstování matematiky*, které jsou pokračováním původního Časopisu pro pěstování matematiky a fyziky, vydávaného Jednotou československých matematiků a fyziků, a časopis *Aplikace matematiky*, založený roku 1955.

Knihovna Matematického ústavu, do níž byly v roce 1951 zařazeny knihy a časopisy z bývalé knihovny JČSMF a která je jednou z největších odborných matematických knihoven v ČSSR, slouží celé československé vědecké veřejnosti.

Uplynulé čtvrtstoletí bylo obdobím hlubokých přeměn celé naší společnosti. Součástí těchto přeměn byl i velký růst vědecko-výzkumné základny, který odpovídá stále rostoucí úloze vědy. Tento růst by nebyl možný bez všestranné a velkorysé podpory, kterou naše stranické a státní orgány trvale věnují rozvoji vědy.

Dokumentovalo to i jednání XV. sjezdu KSČ, kde byla jak v hlavní zprávě generálního tajemníka s. Gustáva Husáka tak i v diskusním vystoupení předsedy Československé akademie věd s. Jaroslava Kožešníka věnována pozornost problematice základního výzkumu, jeho efektivnosti a uplatnění v praxi i potřebě jeho dalšího rozvoje.

Závěry XV. sjezdu KSČ byly předmětem jednání vedoucích orgánů ČSAV, které je rozpracovaly do konkrétních úkolů pro vědecká pracoviště. Pracovníci Matematického ústavu, jsouce si vědomi toho, jak skvělé podmínky pro rozkvět vědy poskytuje socialistické zřízení, soustředí všechny své síly a schopnosti k tomu, aby se ctí splnili náročné úkoly, jež před naši matematickou vědu klade výstavba rozvinuté socialistické společnosti.