POZNÁMKA K POVRCHU MNOŽIN

VÁCLAV PFEFFER, Praha

(Došlo dne 31. října 1961 — v nové úpravě dne 10. října 1962)

V práci je odvozen jistý dolní odhad pro povrch omezené měřitelné množiny.

Nejdříve zavedeme některé úmluvy a označení. Je-li A množina a V výrok závislý na $x \in A$, je $\{x \in A : V(x)\}$ množina všech $x \in A$, pro něž platí $V(x)$. Budiž $\{a_k\}$ libovolná posloupnost. Bez obavy z nedorozumění budeme symbolem $\{a_k\}$ značiti také množinu všech členů této posloupnosti. *Kartézský součin* množin $A_1, A_2, \ldots, A_m$ označíme $\mathop{\mathsf{X}}_{i=1}^{n} A_i$ nebo $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$.

Je-li n přirozené číslo, je E_n *n-rozměrný Euklidův prostor*. V dalším pevně zvolme celé číslo $m \geqq 2$. Budiž i celé, $1 \leqq i \leqq m$, a $z = [z_1, \ldots, z_{i-1}, z_{i+1}, \ldots, z_m] \in E_{m-1}$. Místo $[z_1, \ldots, z_{i-1}, t, z_{i+1}, \ldots, z_m] \in E_m$ budeme psáti $[t, z]_i$, nebo, jestliže $i = 1$, pouze $[t, z]$. *Řezem* množiny $A \subset E_m$ bodem $z \in E_{m-1}$ ve směru i-té osy nazveme množinu $A^{i,z} = \{t \in E_1 : [t, z]_i \in A\}$. *Uzávěr* resp. *vnitřek* resp. *hranici* množiny $A \subset E_m$ označíme $\bar{A}$ resp. A° resp. $\dot{A}$.

Označme μ $(m - 1)$-rozměrnou *Lebesgueovu míru* a $\int_A f \, d\mu$ $(m - 1)$-rozměrný *Lebesgueův integrál* z funkce f na množině $A \subset E_{m-1}$ (pokud existuje). Řekneme, že množiny $A, B \subset E_1$ jsou *ekvivalentní* a píšeme $A \doteq B$, má-li množina $(A - B) \cup \cup (B - A)$ jednorozměrnou Lebesgueovu míru nula.

Systém všech omezených *borelovských funkcí* resp. *vektorů* definovaných na *borelovské množině* $A \subset E_m$ označíme $\mathfrak{F}(A)$ resp. $\mathfrak{V}(A)$. Je-li $A \subset E_m$ omezená měřitelná množina a $v = [v_1, \ldots, v_m] \in \mathfrak{V}(\dot{A})$, definujeme symboly $\|A\|$, $\mathfrak{A}$, $P(A, v)$ a $P_i(A, v_i)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, stejně jako byly definovány v práci [3].

Položme

$$G_1 = (0, \infty) \times \mathop{\mathsf{X}}_{i=2}^{m-1} (0, \pi) \times \langle -3\pi/2, \pi/2) , \quad G_2 = (0, \infty) \times \mathop{\mathsf{X}}_{i=2}^{m-1} (0, \pi) \times \langle -\pi/2, 3\pi/2) ,$$

$$H = \mathop{\mathsf{X}}_{i=2}^{m-1} (0, \pi) \times \langle -\pi, \pi) , \quad G = (0, \infty) \times H$$

a pro $\varepsilon \in (0, \pi/2)$ ještě

$$K_\varepsilon = (\varepsilon, \infty) \times \mathop{\mathsf{X}}_{i=2}^{m-1} (\varepsilon, \pi - \varepsilon) \times \langle -\pi, \pi) .$$

Rovnicemi

$$x_1 = \xi_1 \cos \xi_2,\ x_2 = \xi_1 \sin \xi_2 \cos \xi_3,\ \ldots,\ x_{m-1} = \xi_1 \sin \xi_2 \ldots \sin \xi_{m-1} \cos \xi_m,$$
$$x_m = \xi_1 \sin \xi_2 \ldots \sin \xi_{m-1} \sin \xi_m$$

definujeme zobrazení Φ prostoru E_m do sebe. Snadno se zjistí, že parciální zobrazení Φ/G_1, Φ/G_2 a Φ/G jsou prostá, takže k nim existují zobrazení inversní, která po řadě označíme Ψ_1, Ψ_2 a Ψ. Budiž M matice, jejíž řádky tvoří vektory

$$\left[\frac{\partial x_i}{\partial \xi_1}, \ldots, \frac{\partial x_i}{\partial \xi_m}\right], \quad i = 1, 2, \ldots, m\,.$$

Podle [2], str. 267 je $\det M(\xi) = \xi_1^{m-1} \sin \xi_2^{m-1} \ldots \sin \xi_{m-1}$ pro všechna $\xi \in E_m$. Tedy zobrazení Φ je v oborech G_1^0, G_2^0 a G^0 *regulární* (viz [1], kap. VIII, § 2). Přitom platí:

$$\Phi(G_1) = \Phi(G_2) = \Phi(G) = E_m - \{x \in E_m : x_{m-1} = x_m = 0\}\,,$$
$$\Phi(G_1^0) = E_m - \{x \in E_m : x_{m-1} = 0,\ x_m \geqq 0\}\,,$$
$$\Phi(G_2^0) = E_m - \{x \in E_m : x_{m-1} = 0,\ x_m \leqq 0\}\,,$$
$$\Phi(G^0) = E_m - \{x \in E_m : x_{m-1} \leqq 0,\ x_m = 0\}\,.$$

Uzavřenou polopřímku vycházející z počátku a jdoucí bodem $\Phi([1, \zeta])$, kde $\zeta \in H$, označíme p_ζ.

Nakonec ještě definujme zobrazení Ω prostoru E_m do E_1 předpisem $\Omega(x) = (\sum_{i=1}^{m} x_i^2)^{1/2}$ pro všechna $x \in E_m$. Pro všechna $\zeta \in H$ je zřejmě $\Omega(p_\zeta) = \langle 0, \infty)$.

Lemma. *Budiž $A \in \mathfrak{A}$ a $f \in \mathfrak{F}(E_m)$. Položme $w = [f, 0, \ldots, 0]$ a*

$$v = |\det M * \Psi|^{-1} \,.\, M * \Psi \,.\, w * \Psi\,.^{1})$$

Jestliže existuje takové $\varepsilon \in (0, \pi/2)$, že $A \subset \Phi(K_\varepsilon)$, je $B = \Psi(A) \in \mathfrak{A}$, $v \in \mathfrak{B}(\bar{A})$ a platí

$$P(A, v) = P(B, w)\,.$$

Důkaz. Nechť existuje $\varepsilon \in (0, \pi/2)$, pro něž $A \subset \Phi(K_\varepsilon)$. Položme $A_i = \{x \in A : : (-1)^i x_m \geqq 0\}$, $i = 1, 2$. Z [3], 35 plyne, že $A_i \in \mathfrak{A}$. Avšak $\bar{A}_i \subset \Phi(G_i^0)$, takže vzhledem k [3], 50 a 35 je $B = \Psi_1(A_1) \cup \Psi_2(A_2) \in \mathfrak{A}$.

Poněvadž $\Psi(\bar{A}) \subset K_{\varepsilon/2}$ a $\inf |\det M(\xi)| > 0$ $(\xi \in K_{\varepsilon/2})$, je vektor v omezený na $\bar{A}$. Je-li $B \subset G$ borelovská, jsou množiny

$$B_i = \{\xi \in B : 0 \leqq (-1)^i \xi_m \leqq \pi\} \subset G_i^0\,, \quad i = 1, 2\,,$$

také borelovské. Tudíž i $\Phi(B) = \Phi(B_1) \cup \Phi(B_2)$ je borelovská množina. Odtud již snadno vyplývá, že $v \in \mathfrak{B}(\bar{A})$.

[1]) $M * \psi(x) = M(\psi(x))$ pro všechna x, pro něž $M(\psi(x))$ má smysl. Podobně definujeme $w * \psi$.

Položíme-li ${}^i v = |\det M * \Psi_i|^{-1} . M * \Psi_i . w * \Psi_i,^1)$ plyne z [3], 50 vztah

$$P(A_i, v^i) = P(\Psi_i(A_i), w) = P(\Psi(A_i), w)\,, \quad i = 1, 2\,.$$

Avšak $v = {}^1v$ na $\bar{A}_1$, takže $P(A_1, v) = P(A_1, {}^1v)$. Budiž $x = [x_1, \ldots, x_m] \in \bar{A}_2$. Označme $\Psi(x) = \xi = [\xi_1, \ldots, \xi_m]$ a $\Psi_2(x) = \eta = [\eta_1, \ldots, \eta_m]$. Je-li $x_m > 0$, je $\xi = \eta$ a tedy $v(x) = {}^2v(x)$. Je-li $x_m = 0$, zjistí se snadno přímým výpočtem, že $v_m(x) = {}^2v_m(x) = 0$. Tedy $P_m(A_2, v_m) = P_m(A_2, {}^2v_m)$. Zvolme pevně celé číslo j, $1 \leqq j \leqq m - 1$. Z [3], 33 plyne, že pro skoro všechna $z \in E_{m-1}$ existuje celé číslo $r_z \geqq 0$ a taková reálná čísla $a_1^z < b_1^z < \ldots < a_{r_z}^z < b_{r_z}^z$, že $A_2^{j,z} \doteq \bigcup_{k=1}^{r_z} (a_k^z, b_k^z)$. Pro všechna $z \in E_{m-1}$ položme

$$h(z) = \sum_{k=1}^{r_z} [v_j([b_k^z, z]_j) - v_j([a_k^z, z]_j)]\,, \quad {}^2h(z) = \sum_{k=1}^{r_z} [{}^2v_j([b_k^z, z]_j) - {}^2v_j([a_k^z, z]_j)]\,,$$

jakmile mají pravé strany smysl, a $h(z) = {}^2h(z) = 0$ jinak. Pak je $h(z) = {}^2h(z)$ pro všechna $z \in E_{m-1}$, pro něž $z_m \neq 0$. Použitím [3], 20 dostaneme

$$P_j(A_2, v_j) = \int_{E_{m-1}} h \,\mathrm{d}\mu = \int_{E_{m-1}} {}^2h \,\mathrm{d}\mu = P_j(A_2, {}^2v_j)\,.$$

Z [3], 14, pozn. 2, nyní plyne

$$P(A, v) = P(A_1, v) + \sum_{j=1}^{m} P_j(A_2, v_j) = P(A_1, {}^1v) + \sum_{j=1}^{m} P_j(A_2, {}^2v_j) =$$
$$= P(A_1, {}^1v) + P(A_2, {}^2v) = P(\Psi(A_1), w) + P(\Psi(A_2), w) = P(B, w)\,.$$

Věta. *Budiž $A \in \mathfrak{A}$. Potom existuje borelovská množina $N \subset E_{m-1}$ s těmito vlastnostmi: $\mu(N) = 0$ a ke každému $\zeta \in H - N$ lze nalézti celé číslo $r_\zeta \geqq 0$ nebo $r_\zeta = \infty$ a taková reálná čísla $b_1^\zeta > a_1^\zeta > b_2^\zeta > a_2^\zeta > \ldots \geqq 0$, že $\Omega(A \cap p_\zeta) \doteq \bigcup_{j=1}^{r_\zeta} (a_j^\zeta, b_j^\zeta)$.*

Dále budiž $\{\varrho_k\}$ konečná nebo nekonečná klesající posloupnost kladných čísel, $\varrho_0 = \infty$. Pro $k = 1, 2, \ldots$ a každé $\zeta \in H - N$ označme symbolem $\varphi_k(\zeta)$ mohutnost množiny $(\{a_j^\zeta\} \cup \{b_j^\zeta\}) \cap \langle \varrho_k, \varrho_{k-1})$. Potom existují integrály $\int_H D . \varphi_k \,\mathrm{d}\mu$, kde $D(\zeta) = \sin \zeta_2^{m-2} \ldots \sin \zeta_{m-1}$ pro všechna $\zeta \in H$, a platí

$$\sum_k \varrho_k^{m-1} \int_H D . \varphi_k \,\mathrm{d}\mu \leqq \|A\|\,.$$

Důkaz. Položme $A_n = A \cap \Phi(K_{1/n})$, $B_n = \Psi(A_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, $A_0 = A \cap \Phi(G)$ a $B_0 = \Psi(A_0)$. Snadno se zjistí, že $A_n \in \mathfrak{A}$ a vzhledem k předchozímu lemmatu tedy také $B_n \in \mathfrak{A}$, $n = 1, 2, \ldots$ Podle [3], 33 existují borelovské množiny $N_n \subset E_{m-1}$, $n = 1, 2, \ldots$, s těmito vlastnostmi: $\mu(N_n) = 0$ a ke každému $\zeta \in H - N_n$ lze nalézti celé číslo $r_{\zeta,n} \geqq 0$ a taková reálná čísla $b_1^{\zeta,n} > a_1^{\zeta,n} > \ldots > b_{r_{\zeta,n}}^{\zeta,n} > a_{r_{\zeta,n}}^{\zeta,n} > 0$, že

$B_n^{1,\zeta} \doteq \bigcup_{j=1}^{r_{\zeta,n}} (a_j^{\zeta,n}, b_j^{\zeta,n})$. Množina $N = \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n$ je borelovská a $\mu(N) = 0$. Zvolme $\zeta \in H - N$. Pak je $r_{\zeta,n+1} \geqq r_{\xi,n}$ a $a_j^{\zeta,n+1} = a_j^{\zeta,n}$, $b_j^{\zeta,n+1} = b_j^{\zeta,n}$, $j = 1, 2, \ldots, r_{\zeta,n} - 1$. Tedy položíme-li $r_\zeta = \sup_n r_{\zeta,n}$, můžeme pro $j < r_\zeta$ definovati: $a_j^\zeta = a_j^{\zeta,n}$ a $b_j^\zeta = b_j^{\zeta,n}$, kde n je libovolné přirozené číslo, pro něž $r_{\zeta,n} > j$. Je-li $r_\zeta < \infty$, položme ještě $a_{r_\zeta}^\zeta = \lim_{n\to\infty} a_{r_{\zeta,n}}^{\zeta,n}$ a $b_{r_\zeta}^\zeta = \lim_{n\to\infty} b_{r_{\zeta,n}}^{\zeta,n}$. Nyní je zřejmě $b_1^\zeta > a_1^\zeta > b_2^\zeta > a_2^\zeta > \ldots \geqq 0$ a $B_0^{1,\zeta} \doteq \bigcup_{j=1}^{r_\zeta} (a_j^\zeta, b_j^\zeta)$. Avšak $\Omega(A \cap p_\zeta) = B_0^{1,\zeta}$, čímž je první část věty dokázána.

Položme $r_{\zeta,0} = r_\zeta$, $a_j^{\zeta,0} = a_j^\zeta$, $b_j^{\zeta,0} = b_j^\zeta$, $\zeta \in H - N$, $j = 1, 2, \ldots$, a

$$A_{n,k}^+ = \{[\tau, \zeta] \in \langle \varrho_k, \varrho_{k-1}) \times (H - N) : \tau \in \{b_j^{\zeta,n}\}_j\}\,,$$
$$A_{n,k}^- = \{[\tau, \zeta] \in \langle \varrho_k, \varrho_{k-1}) \times (H - N) : \tau \in \{a_j^{\zeta,n}\}_j\}\,,$$

$n = 0, 1, \ldots$, $k = 1, 2, \ldots$. Pomocí [3], 33 se snadno dokáže, že množiny $A_{n,k}^+$, $A_{n,k}^-$, $n, k = 1, 2, \ldots$, jsou borelovské. Avšak množiny $A_{0,k}^+$, $A_{0,k}^-$, $k = 1, 2, \ldots$, jsou také borelovské, neboť

$$A_{0,k}^+ = \bigcup A_{n,k}^+\,, \quad A_{0,k}^- = \bigcup A_{n,k}^- \quad (n > \varrho_k^{-1})\,.$$

Pro $k = 1, 2, \ldots$ a $\xi \in E_m$ položme

$$f_k(\xi) = 1 \quad \text{resp.} \quad = -1 \quad \text{resp.} \quad = 0$$

podle toho, je-li $\xi \in A_{0,k}^+$ resp. $\xi \in A_{0,k}^-$ resp. $\xi \notin A_{0,k}^+ \cup A_{0,k}^-$. Pak je množina $\{\xi \in E_m : f_k(\xi) \geqq c\}$ rovna $\emptyset$ resp. E_m resp. $A_{0,k}^+$ resp. $E_m - A_{0,k}^-$ podle toho, je-li $c > 1$ resp. $c \leqq -1$ resp. $0 < c \leqq 1$ resp. $-1 < c \leqq 0$. Tedy $f_k \in \mathfrak{F}(E_m)$ a tudíž i $D \,.\, f_k \in \mathfrak{F}(E_m)$. Položme

$${}^k w = [D \,.\, f_k, 0, \ldots, 0] \quad \text{a} \quad {}^k v = |\det M * \Psi|^{-1} \,.\, M * \Psi \,.\, w * \Psi\,,^1)$$

$k = 1, 2, \ldots$. Budiž $x \in \Phi(G)$ a $\Psi(x) = \xi = [\tau, \zeta]$. Přímým výpočtem se zjistí

$$|{}^k v(x)| = |\det M(\xi)|^{-1}\, |f_k(\xi)|\, D(\xi) = \tau^{1-m} |f_k([\tau, \zeta])|\,.$$

Je-li $\tau \geqq \varrho_k$, je $|{}^k v(x)| \leqq \varrho_k^{1-m} |f_k(\xi)|$. Je-li však $\tau < \varrho_k$, je $\xi \notin A_{0,k}^+ \cup A_{0,k}^-$, takže $f_k(\xi) = 0$ a tudíž opět $|{}^k v(x)| = 0 \leqq \varrho_k^{1-m} |f_k(\xi)|$. Poněvadž množiny $A_{0,k}^+ \cup A_{0,k}^-$ jsou po dvou disjunktní, existuje nejvýše jedno přirozené číslo k_ξ, pro něž $\xi \in A_{0,k_\xi}^+ \cup A_{0,k_\xi}^-$. Proto

$$\sum_k \varrho_k^{m-1} |{}^k v(x)| \leqq \sum_k |f_k(\xi)| = |f_{k_\xi}(\xi)| \leqq 1\,.$$

Tedy vektor $v = \sum_k \varrho_k^{m-1}\, {}^k v$ je borelovský a $|v(x)| \leqq 1$ pro všechna $x \in \Phi(G)$. Pro $\zeta \in H - N$, $k = 1, 2, \ldots$ a $n = 0, 1, \ldots$ položme

$$h_{n,k}(\zeta) = \sum_{j=1}^{r_{\zeta,n}} [D(\zeta)\, f_k([b_j^{\zeta,n}, \zeta]) - D(\zeta)\, f_k([a_j^{\zeta,n}, \zeta])]\,.$$

Z [3], 16, 20 a z předchozího lemmatu plyne

$$\|A_n\| \geqq P(A_n, v) = \sum_k \varrho_k^{m-1} P(A_n, {}^k v) = \sum_k \varrho_k^{m-1} P(B_n, {}^k w) =$$

$$= \sum_k \varrho_k^{m-1} P_1(B_n, D \, . \, f_k) = \sum_k \varrho_k^{m-1} \int_H h_{n,k} \, d\mu \, ,$$

$n = 1, 2, \ldots.$ Pro $k = 1, 2, \ldots$ a $\zeta \in H - N$ platí

$$\lim_{n \to \infty} h_{n,k}(\zeta) = h_{0,k}(\zeta) = D(\zeta) \, . \sum_{j=1}^{r_\zeta} [f_k([b_j^\zeta, \zeta]) - f_k([a_j^\zeta, \zeta])] = D(\zeta) \, \varphi_k(\zeta) \, .$$

Poněvadž $\{h_{n,k}\}_{n=1}^{\infty}$ jsou neklesající posloupnosti nezáporných funkcí, je

$$\lim_{n \to \infty} \sum_k \varrho_k^{m-1} \int_H h_{n,k} \, d\mu = \sum_k \varrho_k^{m-1} \int_H D \, . \, \varphi_k \, d\mu \, .$$

Avšak

$$\|A\| - \|A - A_n\| \leqq \|A_n\| \leqq \|A\| + \|A - A_n\| \, ,$$

$n = 1, 2, \ldots,$ a $\lim \|A - A_n\| = 0$ (viz [3], 35 a [4]). Tedy

$$\|A\| = \lim \|A_n\| \geqq \sum_k \varrho_k^{m-1} \int_H D \, . \, \varphi_k \, d\mu \, .$$

Poznámka. Předchozí věta je velmi názorná. Na hranici otevřené koule S_k o středu v počátku a poloměru ϱ_k centrálně promítneme tu část $\dot{A}$, která leží v množině $S_{k-1} - S_k$, a spočítáme plošný obsah průmětu, vážený jeho „násobností" (tj. funkcí φ_k). Součet všech těchto vážených obsahů pak dává dolní odhad pro povrch množiny A.

Literatura

[1] *V. Jarník:* Diferenciální počet. Praha 1953.
[2] *V. Jarník:* Integrální počet II. Praha 1955.
[3] *J. Mařík:* The surface integral. Чехословацкий мат. журнал *6 (81)*, 1956, 522—558.
[4] *J. Mařík, J. Matyska:* O jednom zobecnění Lebesgueova integrálu v E_m. Vyjde v časopise Чехословацкий мат. журнал.

Резюме

ЗАМЕТКА К ПОВЕРХНОСТИ МНОЖЕСТВ

ВАЦЛАВ ПФЕФФЕР (Václav Pfeffer), Прага

Если n — натуральное число, то E_n есть n-мерное евклидово пространство. Пусть $m \geqq 2$ — целое число. Предположим, что в пространстве E_n введены сферические координаты $[\xi_1, \ldots, \xi_m]$ (см. [2], стр. 267). Пусть H — множество всех $\zeta = [\zeta_2, \ldots, \zeta_m]$, для которых $0 < \zeta_i < \pi$, $i = 2, 3, \ldots, m - 1$, и $-\pi \leqq \zeta_m < \pi$. Замкнутую полупрямую, выходящую из начала координат и проходящую через точку $[1, \zeta_2, \ldots, \zeta_m] = [1, \zeta]$, $\zeta \in H$, будем обозначать символом p_ζ. $\|A\|$ есть площадь поверхности ограниченного измеримого множества $A \subset E_m$ (см. [3], 2). Лебеговскую меру в E_{m-1} обозначим через μ. Теперь справедлива теорема:

Пусть $A \subset E_m$ — ограниченное измеримое множество, для которого $\|A\| < \infty$. Тогда имеется борелевское множество $N \subset E_{m-1}$, обладающее следующими свойствами: $\mu(N) = 0$ и для каждого $\zeta \in H - N$ можно найти целое число $r_\zeta \geqq 0$ или $r_\zeta = \infty$ и такие действительные числа $b_1^\zeta > a_1^\zeta > b_2^\zeta > a_2^\zeta > \ldots \geqq 0$, что множества $A \cap p_\zeta$ и $\bigcup_{j=1}^{r_\zeta} (a_j^\zeta, b_j^\zeta)$ эквивалентны в смысле одномерной лебеговской меры на полупрямой p_ζ.

Пусть, далее, $\{\varrho_k\}$ — конечная или бесконечная строго убывающая последовательность положительных чисел, $\varrho_0 = \infty$. Для $k = 1, 2, \ldots$ и каждого $\zeta \in H - N$ пусть $\varphi_k(\zeta)$ — мощность множества всех a_j^ζ и b_j^ζ, содержащихся в интервале $\langle \varrho_k, \varrho_{k-1})$. Тогда существуют интегралы Лебега $\int_H D \cdot \varphi_k \,\mathrm{d}\mu$, где $D(\xi) = \sin \zeta_2^{m-2} \ldots \sin \zeta_{m-1}$ для всех $\xi \in H$, и имеет место неравенство

$$\sum_k \varrho_k^{m-1} \int_H D \cdot \varphi_k \,\mathrm{d}\mu \leqq \|A\| \,.$$

Summary

A NOTE ON THE SURFACE OF SETS

VÁCLAV PFEFFER, Praha

For positive integer n, let E_n denote the n-dimensional Euclidean space. Choose an integer $m \geqq 2$ and suppose that spherical coordinates $[\xi_1, \ldots, \xi_m]$ (see [2], p. 267) are introduced into E_m. Let H be the set of all $\zeta = [\zeta_2, \ldots, \zeta_m]$ for which $0 < \zeta_i < \pi$, $i = 2, 3, \ldots, m - 1$, and $-\pi \leqq \zeta_m < \pi$. We denote by p_ζ, $\zeta \in H$, the closed ray ex-

tending from the origin of coordinates and passing through the points $[1, \zeta] = [1, \zeta_2, \ldots, \zeta_m]$. If $A \subset E_m$ is a bounded measurable set, let $\|A\|$ be its surface area (see [3], 2). We denote by μ the Lebesgue measure in E_{m-1}. Now the following theorem holds:

Let $A \subset E_m$ be a bounded measurable set for which $\|A\| < \infty$. Then there exists a Borel set $N \subset E_{m-1}$ with the following properties: $\mu(N) = 0$, and for each $\zeta \in H - N$ there exist an integer $r_\zeta \geqq 0$ or $r_\zeta = \infty$ and real numbers $b_1^\zeta > a_1^\zeta > b_2^\zeta > a_2^\zeta > \ldots \geqq 0$ such that the sets $A \cap p_\zeta$ and $\bigcup_{j=1}^{r_\zeta} (a_j^\zeta, b_j^\zeta)$ are equivalent in the sense of the one-dimensional Lebesgue measure on the ray p_ζ.

Furthermore, let $\{\varrho_k\}$ be a finite or infinite sequence of positive numbers, $\varrho_0 = \infty$. For $k = 1, 2, \ldots$ and each $\zeta \in H - N$ let $\varphi_k(\zeta)$ be the cardinality of the set of all a_j^ζ and b_j^ζ which lie in the interval $\langle \varrho_k, \varrho_{k-1})$. Then there exist Lebesgue integrals $\int_H D \cdot \varphi_k \, \mathrm{d}\mu$, where $D(\zeta) = \sin \zeta_2^{m-2} \ldots \sin \zeta_{m-1}$ for all $\zeta \in H$, and the inequality

$$\sum_k \varrho_k^{m-1} \int_H D \cdot \varphi_k \, \mathrm{d}\mu \leqq \|A\|$$

holds.