

Zdeněk Jankovský

Zur Laguerreschen Ebenegeometrie

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 109 (1984), No. 3, 236--249

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/108443>

## Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1984

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

## ZUR LAGUERRESCHEN EBENEGEOMETRIE

ZDENĚK JANKOVSKÝ, Praha

(Eingegangen am 6. September 1982)

### 1. EINLEITUNG

Dieser Artikel hat Charakter des übersichtlichen Artikels.

In der Zahl der Geometrien im Kleinschen Sinn befindet sich auch die Laguerresche Geometrie ( $\mathcal{L}$ -Geometrie), die an einer Reihe von bekannten Modellen studiert wird. In diesem Artikel wird gezeigt, daß es sich tatsächlich um eine Geometrie im Kleinschen Sinn handelt und es werden hier die Zusammenhänge der einzelnen Modelle dieser Geometrie angedeutet. Weiter wird die zweckmäßige Ausnutzung des analytischen Apparats der dualen Zahlen gezeigt (die Laguerresche Gruppe wird durch die Gruppe der linearen gebrochenen Transformationen im dualen Bereich repräsentiert) und es werden hier die geometrischen Grunderkenntnisse als ein Grund für die Untersuchung der Laguerreschen Kinematik und der kinematischen Geometrie zusammengefaßt.

### 2. LAGUERRESCHES GEOMETRIE ALS EINE GEOMETRIE IM KLEINSCHEN SINNE

Sei  $P_3$  der 3-dimensionale reelle projektive Raum. Wählen wir beliebig (aber fest) eine Ebene  $v \subset P_3$  und einen regulären Kegelschnitt  $Q \subset v$ ,

$$Q \equiv q = 0,$$

wo  $q$  eine quadratische Form von der Signatur  $(2, 1)$  ist. Bezeichnen wir weiter durch  $A_3 = P_3 - v$  den reellen affinen Raum ( $v$  ist die uneigentliche Ebene).

Untersuchen wir die projektiven Transformationen des Raumes  $P_3$

$$(1) \quad qx_i = c_i^j x_j'; \quad i, j = 0, 1, 2, 3; \quad q, c_i^j \in R; \quad q \neq 0; \quad \text{Det} \|c_i^j\| \neq 0,$$

die  $v$  und  $Q$  invariant lassen (also alle affinen Transformationen des Raumes  $A_3$  mit dem Absolut  $Q$ ). Das System dieser projektiven Transformationen bildet eine

Gruppe (Untergruppe der Gruppe (1)). Diese Gruppe hängt von 7 reellen Parametern ab (die Forderung der Invarianz  $v$  macht die Zahl der freien Parametern in (1) um 4 niedriger und die Forderung der Invarianz  $Q$  gibt 5 weitere unabhängige reelle Bedingungen für die Parameter  $c_i^j$ ); diese 7-parametrische Gruppe bezeichnen wir  $A_7$  und nennen wir sie *die allgemeine Laguerresche Gruppe*.

Untersuchen wir die Bedingungen von der Forderung der Invarianz  $Q$ , bekommen wir für die quadratische Form  $q$  und die transformierte quadratische Form  $\lambda q$  die Beziehung:

$$q = \lambda q, \quad \text{wo} \quad \lambda = \sqrt[3]{|c_i^j|^2},$$

s. [1] und wir können durch die Auswahl  $\lambda = 1$  auf die Parameter  $c_i^j$  in (1) eine weitere reelle Bedingung legen. Wir bekommen die 6-parametrische Untergruppe  $A_6$  der Gruppe  $A_7$ , die die quadratische Form  $q$  reproduziert.  $A_6$  zerfällt in zwei Zusammenhangskomponenten  $A_6^+$ ,  $A_6^-$ , vgl. [2], bzw. [7] ( $A_6^+$  behält die Orientierung von  $Q$ ).

**Definition 1.**  $A_6$  nennen wir *die Laguerresche Gruppe im engen Sinn*,  $A_6^+$  *die direkte Laguerresche Gruppe* oder kurz *die  $\mathcal{L}$ -Gruppe*. Den Bereich, in welchem die  $\mathcal{L}$ -Gruppe operiert, nennen wir *Laguerresche Ebene  $L$* , kurz  *$\mathcal{L}$ -Ebene  $L$* . In unserem Fall ist  $L \equiv A_3$  und wir nennen diese Ebene das *affine Modell der  $\mathcal{L}$ -Ebene  $L$* , vgl. [2].

Die Laguerresche Ebenegeometrie im engen Sinn ( *$\mathcal{L}$ -Geometrie*) ist die Theorie der Invarianten der  $\mathcal{L}$ -Gruppe. Diese  $\mathcal{L}$ -Geometrie ist also eine Geometrie im Kleinschen Sinn.

### 3. $\mathcal{L}$ -GEOMETRIE UND IHR EUKLIDISCHES MODELL

Die  $\mathcal{L}$ -Geometrie hat ein einfaches euklidisches Modell in jeder Ebene  $\mu \subset A_3$ , in welcher der Kegelschnitt  $Q$  die euklidische Geometrie induziert. Wählen wir für die Vereinfachung der Konstruktion dieses Modells das Koordinatensystem in  $P_3$  so, daß:

$$v \equiv x_0 = 0, \\ Q \equiv x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0; \quad x_0 = 0,$$

d. h.

$$q \equiv x_1^2 + x_2^2 - x_3^2,$$

gilt. Dann gilt:

$$\mu \equiv x_3 = 0.$$

Das euklidische Modell der  $\mathcal{L}$ -Geometrie bekommen wir durch die isotrope Projektion  $\pi_1$  des Kegelschnittes  $Q$  aus den Punkten des affinen Modells  $A_3$  in die Grundebene  $\mu$ :

$$\pi_1 : A_3 \rightarrow \mu:$$

$$\pi_1[x_1^0, x_2^0, x_3^0] \equiv (x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 = (x_3^0)^2 \equiv \begin{cases} Z^+ \Leftrightarrow x_3^0 > 0 \\ Z^- \Leftrightarrow x_3^0 < 0 \\ Z^0 \Leftrightarrow x_3^0 = 0 \end{cases}$$

$Z^+$ , bzw.  $Z^-$  sind positiv, bzw. negativ orientierte Kreise in  $\mu$ ,  $Z^0 \equiv [x_1^0, x_2^0] \in \mu$  sind die Punkte. Das System  $\mathcal{Z}_\mu$  aller orientierten Kreise und der Punkte (die Kreise mit dem Null-Durchmesser) in  $\mu$  bildet ein Modell der  $\mathcal{L}$ -Ebene. Die orientierten Kreise und die Punkte in  $\mu$  sind die geometrischen Grundobjekte in diesem Modell der  $\mathcal{L}$ -Geometrie; sie werden Zyklen genannt. Es gilt:

$$\pi_1 : A_3 \xrightarrow{\text{bij.}} Z_\mu$$

Die inverse Abbildung

$$\pi_1^{-1} : \mathcal{Z}_\mu \rightarrow A_3$$

ist die bekannte *zyklographische Projektion*.

Die projizierende Kegelfläche des Punktes  $[x_1^0, x_2^0, x_3^0] \in A_3$  bei der isotropen Projektion  $\pi_1$

$$(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 = (x_3 - x_3^0)^2$$

wird *der isotrope Kegel des Punktes*  $[x_1^0, x_2^0, x_3^0]$  genannt.

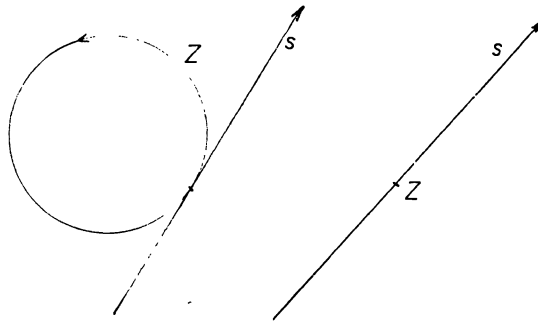


Abb. 1.

Die Geraden  $p$ , bzw. die Berührungsebenen  $\alpha$  des isotropen Kegel werden *isotrope Geraden*, bzw. *isotrope Ebenen* genannt, s. Abb. 2.

**Bemerkung 1.** Der räumliche Analog der  $\mathcal{L}$ -Gruppe ist die bekannte *Lorentzsche Gruppe von der speziellen Relativitätstheorie* (s. [1], S. 141–142).

Die gegebene orientierte Gerade  $s \subset \mu$  berührt den gegebenen Zykel  $Z \subset \mu$  dann und nur dann, wenn ihre Träger sich berühren und wenn sie im Berührungspunkt die gleichsinnigen Orientationen besitzen. Im Falle, daß der Zykel ein Punkt ist, hat die Inzidenz die Bedeutung der Berührung, s. Abb. 1.

Zu allen Punkten einer isotropen Ebene  $\alpha$  werden alle Zyklen, die die Durchschnittsgeraden  $s = \alpha \cap \mu$  berühren, zugeordnet. Orientieren wir  $s$  gleichsinnig mit diesen

Zykeln, dann können wir zu jeder isotropen Ebene eine orientierte Gerade (*einen Speer*) zuordnen.

$$\pi_1 : \alpha \rightarrow s,$$

analogisch:

$\pi_1 : p \rightarrow$  ein parabolisches Büschel von der Zyklen, s. Abb. 2.

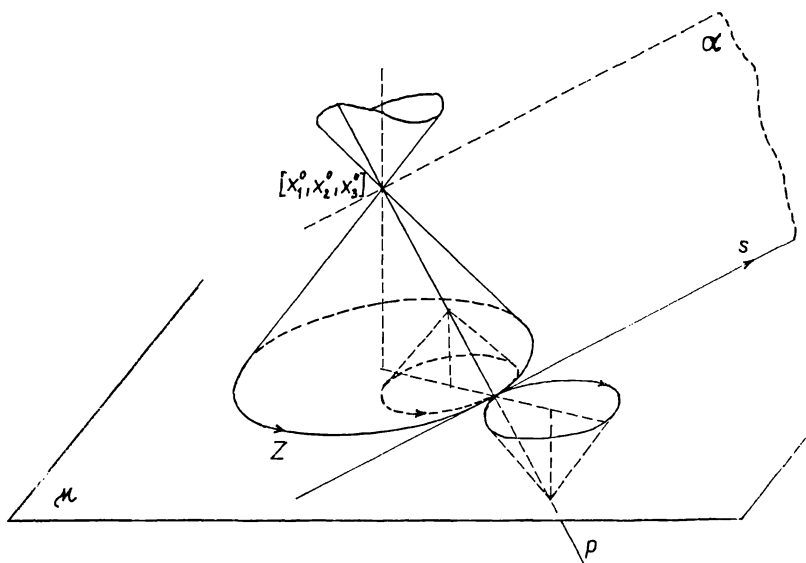


Abb. 2.

Die isotrope Ebenen in  $A_3$ , bzw. die Speere in  $\mu$  sind die geometrischen Grundobjekte zweiter Art der  $\mathcal{L}$ -Geometrie. Die  $\mathcal{L}$ -Gruppe bildet sich in die auf die Menge der Zyklen und Speere in  $\mu$  transitiv operierende Gruppe ab (s. [1], [3]). Die Geometrie dieser Gruppe in  $\mu$  ist das bekannte euklidische Modell der  $\mathcal{L}$ -Geometrie.

Bemerkung 2. Die geometrischen Grundobjekte 1. Art der  $\mathcal{L}$ -Geometrie in diesen Modellen sind die Punkte in  $A_3$ , bzw. die Zyklen in  $\mu$ .

#### 4. BLASCHKE-ABBILDUNG. ZYLINDRISCHES MODELL

Die isotrope Ebene  $\alpha$  hat im gegebenen Koordinatensystem (vgl. 3) die homogenen Koordinaten

$$(2) \quad \alpha \equiv (a_0, a_1, a_2, a_3),$$

wo

$$(2') \quad a_3^2 = a_1^2 + a_2^2; \quad a_3 \neq 0$$

(für  $a_3 = 0$  ist auch  $a_1 = a_2 = 0$  und wir bekommen die Ebene  $v$ ). Wir haben (2)

angesichts (2') zu normieren:

$$\alpha \equiv (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, 1).$$

$$(3) \quad s \equiv \alpha \cap \mu \equiv \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = 0; \quad \alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1,$$

ist die analytische Darstellung der orientierten Geraden  $s$  in der Grundebene  $\mu$  von der durch den Vektor  $\mathbf{s}$  bestimmten Orientierung.

$$(\mathbf{n}, \mathbf{s}), \quad \text{wo } \mathbf{n} = (\alpha_1, \alpha_2),$$

ist ein mit der Orientierung des gegebenen Koordinatensystems gleichsinnig orientiertes System.

Ein Zykel  $Z$  hat im gegebenen Koordinatensystem die homogenen Koordinaten

$$Z = (x_0, x_1, x_2, x_3), \quad x_0 \neq 0,$$

die können wir normieren:

$$Z = (1, u, v, w).$$

**Definition 2.** Die Abbildung

$$\pi_2 : R^4 \rightarrow R^3 : \pi_2(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, 1) = (-\alpha_2, \alpha_1, -\alpha_0)$$

nennen wir *die Blaschke-Abbildung*.

Die Blaschke-Abbildung  $\pi_2$  bildet die isotropen Ebenen, bzw. die Speere der Grundebene  $\mu$  bijektiv auf die Punkte der Zylinderfläche

$$V \equiv x_1^2 + x_2^2 = 1$$

ab (es folgt aus (3) und D 2, s. Abb. 3).

$$\pi_2 : \mathcal{L}_\mu \xrightarrow{\text{bij.}} \mathcal{L}_V,$$

wo  $\mathcal{L}_V$  ist die Menge aller regulären Ebenenschnitte auf  $V$ , s. [3], S. 18–19.

Die Zylinderfläche  $V$  ist das sog. *zylindrische Modell* der  $\mathcal{L}$ -Ebene. Die Punkte, die auf derselben Geraden des Zylinders  $V$  liegen, nennen wir *die parallelen Punkte* (sie werden zu den parallelen, gleichsinnig orientierten Geraden in  $\mu$  beigeordnet).

Wählen wir den Punkt  $M = [0, 1, 0] \in V$  und bilden wir  $V$  durch die stereographische Projektion  $\pi_3$  aus dem Zentrum  $M$  in die Ebene

$$\eta \equiv x_2 = 0$$

ab, s. Abb. 3

$$\pi_3 : (V - \{g\}) \rightarrow \eta; \quad g = V \cap \{x_2 = 1\}; \quad (M \in g),$$

$$\pi_3[x_1, x_2, x_3] \equiv \left[ \frac{x_1}{1 - x_2}; \frac{x_3}{1 - x_2} \right] \in \eta.$$

Die Abbildung  $\pi_3 \circ \pi_2 \circ \pi_1$ , bzw.  $\pi_3 \circ \pi_2 : A_3$ , bzw.  $\mu \rightarrow \eta \cup R$  bildet die isotropen Ebenen, bzw. die Sphäre in die Punkte der Ebene  $\eta$  oder der Menge der reellen Zahlen  $R$  und die Zyklen in *die isotropen Kreise*  $k$

$$(4) \quad k \equiv \{[x, y] \mid y + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0; \alpha, \beta, \gamma \in R\} \cup \{\alpha\} \subset \eta \cup R$$

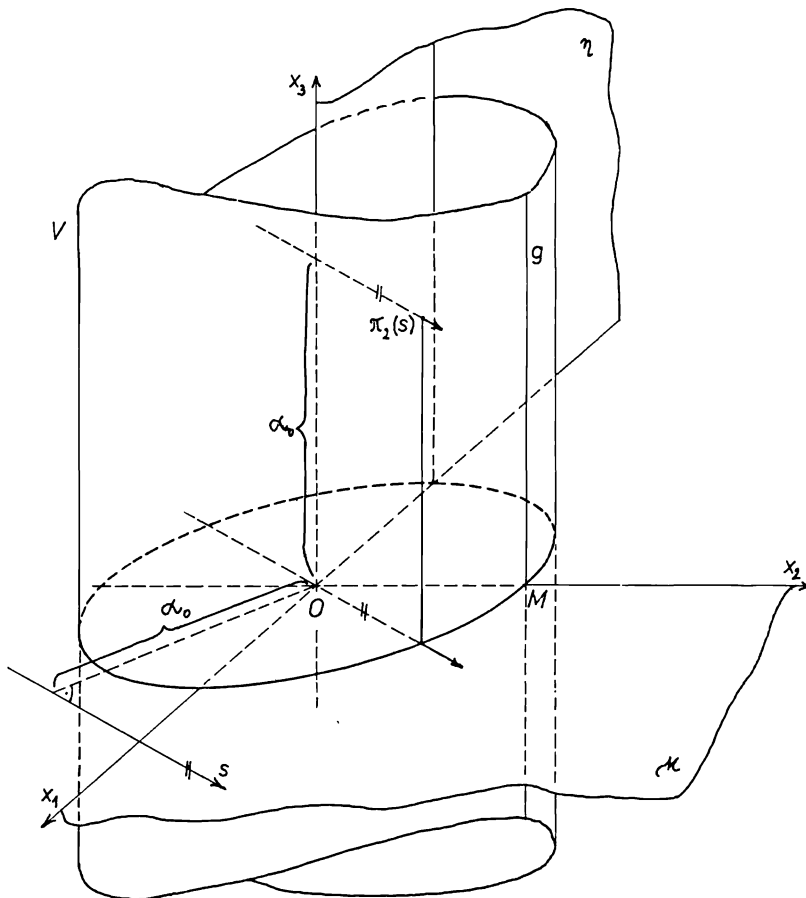


Abb. 3.

ab.  $k$  ist die Parabel in  $\eta$  mit der Achse  $o \parallel y(x_3)$ , die mit einer reellen Zahl  $\alpha$  ergänzt wird, bzw. die Gerade (im zylindrischen Modell  $M \in Z$ ,  $Z$  der Zykel), s. [3], S. 19.

Wir bekommen also *das isotrope Modell* der  $\mathcal{L}$ -Ebene in  $\eta \cup R$ . Dieses isotrope Modell der  $\mathcal{L}$ -Ebene kann man passend analytisch durch die erweiterte duale Ebene repräsentieren.

## 5. DIE ERWEITERTE DUALE EBENE $\bar{\Delta}$ ALS EIN MODELL DER $\mathcal{L}$ -EBENE

Sei

$$\Delta = \{a \mid a = a_1 + \varepsilon a_2; a_1, a_2 \in \mathbb{R}, \varepsilon^2 = 0\}$$

der Ring der dualen Zahlen. Wir nennen

$$a_1 = \Re a, \quad \text{bzw.} \quad a_2 = \Im a$$

den *reellen*, bzw. *dualen Teil der dualen Zahl*  $a$ ;  $\bar{a} = a_1 - \varepsilon a_2$  nennen wir die *dual konjugierte duale Zahl* zu  $a$ . Es gilt

$$a\bar{a} = (a_1 + \varepsilon a_2)(a_1 - \varepsilon a_2) = a_1^2$$

und wir können analogisch zur komplexen Zahl *ein Modul*

$$|a| = \sqrt{(a\bar{a})} = |a_1|$$

der dualen Zahl  $a$  definieren. Die duale Zahl  $a$  mit  $|a| \neq 0$  können wir in der Exponentialform

$$a = a_1(1 + \varepsilon\varphi) = a_1 e^{\varepsilon\varphi},$$

wo

$$\varphi = \arg a = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\Im a}{\Re a} \in \mathbb{R},$$

darstellen. Es gilt:

$$\frac{a_1 + \varepsilon a_2}{b_1 + \varepsilon b_2} = \frac{(a_1 + \varepsilon a_2)(b_1 - \varepsilon b_2)}{(b_1 + \varepsilon b_2)(b_1 - \varepsilon b_2)} = \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{b_1^2} \varepsilon; \quad |b| \neq 0.$$

$\Delta$  hat eigene Nullteiler; *die Menge der Nullteiler*

$$\mathfrak{N} = \mathbb{R}\varepsilon = \{x\varepsilon \mid x \in \mathbb{R}, \varepsilon^2 = 0\}$$

bildet einen nichttrivialen Ideal des Ringes  $\Delta$ ;  $a \in \mathfrak{N} \Leftrightarrow |a| = 0$ .

Definieren wir die Äquivalenz  $\sim$ :

$$(z_1, z_2) \sim (z_1', z_2') \Leftrightarrow z_i = \sigma z_i', \quad i = 1, 2; \quad \sigma \in \Delta - \mathfrak{N},$$

für  $(z_1, z_2) \in \{\Delta \times \Delta - \mathfrak{N} \times \mathfrak{N}\}$ , dann bekommen wir eine Repräsentation einer dualen projektiven Geraden

$$\mathcal{P}_1 = \{\Delta \times \Delta - \mathfrak{N} \times \mathfrak{N}; \sim\}.$$

Die projektive Geometrie der projektiven dualen Geraden ist eine Geometrie angesichts der Gruppe der regulären linearen Transformationen

$$(5) \quad z_i = c_i^j z_j; \quad i, j = 1, 2; \quad c_i^j \in \Delta; \quad \text{Det} \|c_i^j\| \notin \mathfrak{N}.$$



Nach dem Übergang

$$(6) \quad \mathcal{F}[(z_1, z_2)] = \frac{z_1}{z_2} = z \begin{cases} z \in \Delta \dots z_2 \notin \mathfrak{R} \\ \infty \dots z_2 = 0 \\ c \frac{1}{\varepsilon} \dots z_2 \in \mathfrak{R}, \quad z_2 \neq 0, \quad c = \frac{\mathcal{R}z_1}{\mathcal{D}z_2} \end{cases}$$

zu den nichthomogenen Koordinaten bekommen wir:

$$\bar{\Delta} = \left\{ z \mid z \in \Delta \vee z = \frac{1}{0} = \infty \vee z = \frac{c}{\varepsilon} = c\omega; \quad c \in \mathfrak{R}, \quad c \neq 0, \quad \varepsilon^2 = 0 \right\}.$$

$\bar{\Delta}$  können wir also durch die Erweiterung des Ringes  $\Delta$ , analogisch wie die Erweiterung des Körpers der komplexen Zahlen  $K$  auf die erweiterte Gaußsche Ebene  $G = K \cup \{\infty\}$ , bekommen.  $\bar{\Delta}$  nennen wir *die erweiterte duale Ebene*.

Zu den Transformationen (5) werden durch (6) die Transformationen

$$(5') \quad z = \frac{c_1^1 z + c_1^2}{c z_2^1 + c_2^2}; \quad c_i^j \in \Delta; \quad \text{Det } \|c_i^j\| \notin \mathfrak{R}$$

zugeordnet. Definieren wir angesichts (5') die Grundoperationen auch für die „uneigenen dualen Zahlen  $\infty, c\omega$ “:

- 1)  $z + \infty = \infty + z = \infty$ ; für  $z \in \bar{\Delta}$
- 2)  $z - \infty = \infty - z = \infty$ ; für  $z \in \bar{\Delta}$ ;  $z \neq \infty$
- 3)  $z \cdot \infty = \infty \cdot z = \infty$ ; für  $z \in \bar{\Delta}$ ;  $z \notin \mathfrak{R}$
- 4)  $\frac{\infty}{z} = \infty$ ; für  $z \in \Delta$
- 5)  $\frac{z}{\infty} = 0$ ; für  $z \in \Delta$
- 6)  $z \pm c\omega = \pm c\omega + z = (\pm c)\omega$ ; für  $z \in \Delta$
- 7)  $z \cdot c\omega = c\omega \cdot z = (c\mathcal{R}z)\omega$ ; für  $z \in \Delta - \mathfrak{R}$
- 7')  $z \cdot c\omega = c\omega \cdot z = (\mathcal{D}z \cdot \varepsilon) \cdot c\omega = c \cdot \mathcal{D}z$ ; für  $z \in \mathfrak{R} - \{0\}$
- 8)  $\frac{c\omega}{z} = \frac{c}{\mathcal{R}z}\omega$ ; für  $z \in \Delta - \mathfrak{R}$
- 8')  $\frac{c\omega}{z} = \infty$ ; für  $z \in \mathfrak{R}$
- 9)  $\frac{z}{c\omega} = \frac{\mathcal{R}z}{c}\varepsilon$ ; für  $z \in \Delta$
- 10)  $c\omega \pm d\omega = (c \pm d)\omega$ ; für  $c \pm d \neq 0$
- 11)  $c\omega \cdot d\omega = \infty$

Nicht definiert wird:

- 1)  $\infty - \infty$ ;    2)  $z \cdot \infty$ , für  $z \in \mathfrak{R}$ ;    3)  $\frac{\infty}{\infty}$ ;  
 4)  $\frac{0}{0}$ ;    5)  $\frac{\infty}{\omega}$ ;    6)  $\frac{\omega}{\infty}$ ;  
 7)  $0 \cdot \omega$ ;    8)  $\frac{\omega}{\omega}$ ;    9)  $\omega - \omega$ ,

vgl. [5], [6].

Zur Modellierung der  $\mathcal{L}$ -Ebene durch die erweiterte duale Ebene  $\bar{\mathcal{A}}$  konstruieren wir eine bijektive Abbildung

$$\pi_4 : \eta \cup R \rightarrow \bar{\mathcal{A}} :$$

- (i)  $\pi_4[x, y] = z = x + y\varepsilon$ , für  $[x, y] \in \eta$ ;  
 (ii)  $\pi_4[\alpha] = 1/\alpha\varepsilon = (1/\alpha)\omega$ , für  $\alpha \in R$ ,  $\alpha \neq 0$ ;  
 (iii)  $\pi_4[0] = \infty$ .

Die isotropen Kreise (4) (d. h. die Zykeln) haben in  $\bar{\mathcal{A}}$  eine Darstellung:

$$(7) \quad \pi_4(k) = \alpha\varepsilon z\bar{z} + \frac{1}{2}(1 + \beta\varepsilon)z - \frac{1}{2}(1 - \beta\varepsilon)\bar{z} + \varepsilon\gamma = 0.$$

(7) genügt der einzige uneigene Punkt:  $(1/\alpha)\omega$ ;  $\alpha \neq 0$ , bzw.  $\infty$  für  $\alpha = 0$ . (7) schreiben wir in der Form:

$$(7') \quad A\varepsilon z\bar{z} + Bz - \bar{B}\bar{z} + C\varepsilon = 0; \quad A = \bar{A}, \quad C = \bar{C}, \quad B \cdot \bar{B} \neq 0.$$

Zu den isotropen Ebenen (zu den Speeren) werden durch die Abbildung  $\pi_4 \circ \pi_3 \circ \pi_2 \circ \pi_1$  (bzw.  $\pi_4 \circ \pi_3 \circ \pi_2$ ) die Punkte in  $\bar{\mathcal{A}}$  zugeordnet. Die parallelen Punkte werden durch duale Zahlen mit gleichen reellen Teilen (gleichen Modulen) dargestellt. Alle uneigenen Punkte in  $\bar{\mathcal{A}}$  sind einander parallel.

**Bemerkung 3.** Die Benennung „duale“ Ebene fassen wir folgendermaßen auf: Zu den geometrischen Grundobjekten des affinen Modells  $A_3$  der  $\mathcal{L}$ -Ebene werden die „duale“ Objekte in  $\bar{\mathcal{A}}$  beigeordnet (isotrope Ebene  $\rightarrow$  Punkt; Punkt  $\rightarrow$  isotroper Kreis).

**Bemerkung 4.**  $\mathcal{P}_1$  ist angesichts (6) ein Modell der  $\mathcal{L}$ -Ebene. Der isotrope Kreis (7') hat in diesem Modell die folgende homogene Darstellung:

$$(7'') \quad A\varepsilon z_1\bar{z}_1 + Bz_1\bar{z}_2 - \bar{B}\bar{z}_1z_2 + C\varepsilon z_2\bar{z}_2 = 0; \quad A = \bar{A}, \quad C = \bar{C}, \quad B\bar{B} \neq 0.$$

## 6. DIE $\mathcal{L}$ -GRUPPE

Wir benutzen die Abbildungen  $\pi_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) auf die einzelnen entsprechenden Repräsentationen der  $\mathcal{L}$ -Gruppe ( $\pi_1$  auf (1), usw.) und wir bekommen am Ende die Repräsentation der  $\mathcal{L}$ -Gruppe, die auf der erweiterten dualen Ebene  $\bar{\Delta}$  operiert, s. [1], bzw. [3]. Die direkte  $\mathcal{L}$ -Transformation  $\mathcal{L} \in A_6^+$  hat dann eine Darstellung

$$(8) \quad \mathcal{L}(\zeta) = z = \frac{\alpha\zeta + \beta}{\gamma\zeta + \delta},$$

wo  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \Delta$ ;  $\alpha\delta - \beta\gamma \notin \mathfrak{N}$ ;  $\zeta, z \in \bar{\Delta}$ . Die  $\mathcal{L}$ -Gruppe von der Repräsentation (8) bezeichnen wir  $\mathcal{G}(\Delta)$ . (8) transformiert einen beliebigen isotropen Kreis in einen isotropen Kreis; die  $\mathcal{L}$ -Transformation (8) ist also eine Kreisverwandtschaft. Die Parallelität der Punkte ist  $\mathcal{L}$ -invariant (in  $\bar{\Delta}$  invariant angesichts  $\mathcal{G}(\Delta)$ ).

**Satz 1.** Sind  ${}^i\zeta \in \bar{\Delta}$ ,  $i = 1, 2, 3$  paarweise nicht parallele Punkte und ebenso  ${}^iz \in \bar{\Delta}$ , dann existiert eine einzige  $\mathcal{L}$ -Transformation  $\mathcal{L}$  von der Eigenschaft:

$${}^iz = \mathcal{L}({}^i\zeta); \quad i = 1, 2, 3$$

Zum Beweis. 1) Seien  ${}^iz, {}^i\zeta \in \Delta$ , dann gilt:

$${}^iz = \frac{\alpha {}^i\zeta + \beta}{\gamma {}^i\zeta + \delta}; \quad \alpha\delta - \beta\gamma \notin \mathfrak{N}; \quad i = 1, 2, 3,$$

daraus folgt

$$(9) \quad \alpha {}^i\zeta + \beta - \delta {}^iz = \gamma {}^i\zeta {}^iz$$

(9) sind 3 lineare Gleichungen in 4 dualen Unbekannten  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ . Aus der Diskussion des Systems (9) folgt: Die Lösungen des Systems (9) sind abhängig von einem dualen Parameter, d. h. es existiert eine einzige  $\mathcal{L}$ -Transformation unserer Eigenschaft. 2) Ist ein aus den Punkten  ${}^i\zeta$ , bzw.  ${}^iz$  uneigen, dann können wir auch die Parameter  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  durch die gegebenen Tripel darstellen (bis auf einen von Null verschiedenen dualen Faktor). Vgl. [3], S. 88–89.

**Satz 2.** Durch 3 paarweise nicht parallele Punkte wird ein einziger isotroper Kreis bestimmt.

Zum Beweis. Die Richtigkeit des Satzes folgt unmittelbar im zylindrisches Modell.

**Satz 3.**  $\mathcal{G}(\Delta)$  operiert transitiv auf der Menge der isotropen Kreise.

Beweis. Folgt aus Satz 2 und Satz 1.

$\mathcal{G}(\Delta)$  kann man angesichts (5'), (6) und (5) durch die Matrixdarstellung

$$(10) \quad {}^iZ = CZ; \quad |C| = 1,$$

d. h. durch die Gruppe  $SL(2, \Delta)$ , repräsentieren. In dieser Repräsentation kann man unmittelbar zeigen, daß die  $\mathcal{L}$ -Gruppe eine Liesche Gruppe ist.

Angesichts der einfachen analytischen Darstellung (8), bzw. (10), der  $\mathcal{L}$ -Gruppe, sind diese Darstellungen für die Untersuchung der  $\mathcal{L}$ -Geometrie und  $\mathcal{L}$ -Kinematik passend.

## 7. TRANSFORMATION DES KOORDINATENSYSTEMS UND ALGEBRAISCHE GRUNDINVARIANTEN

Jedes geordnete Tripel  $A_1, A_2, A_3$  paarweise nicht paralleler Punkte in der  $\mathcal{L}$ -Ebene  $L$  nennen wir ein Koordinatensystem  $S$  in  $L$ . Unter den dualen Koordinaten angesichts  $S$  verstehen wir die bijektive Abbildung

$$\mathcal{F} : L \leftrightarrow \bar{\Delta},$$

die die Struktur der  $\mathcal{L}$ -Ebene  $L$  reproduziert;  $\mathcal{F}(A_i) = {}^i z$ ,  ${}^i z \in_f \bar{\Delta}$  nichtparallel,  $i = 1, 2, 3$ ; die Bezeichnung

$$S = \langle ({}^1 z), ({}^2 z), ({}^3 z) \rangle, \quad A_i = ({}^i z).$$

Seien  $S = \langle ({}^1 z), ({}^2 z), ({}^3 z) \rangle$ ,  $\Sigma = \langle ({}^1 \zeta), ({}^2 \zeta), ({}^3 \zeta) \rangle$  zwei Koordinatensysteme in  $L$ ,  $\mathcal{F}$ , bzw.  $\Phi$  die Koordinaten angesichts  $S$ , bzw.  $\Sigma$  und eine  $\mathcal{L}$ -Transformation  $\mathcal{L} \in \mathcal{G}(\Delta)$ , die durch 2 entsprechende Tripel

$$\Phi(({}^1 \zeta)), \Phi(({}^2 \zeta)), \Phi(({}^3 \zeta)) \quad \dots \quad \text{Vorbilder}$$

$$\mathcal{F}(({}^1 \zeta)), \mathcal{F}(({}^2 \zeta)), \mathcal{F}(({}^3 \zeta)) \quad \dots \quad \text{Bilder}$$

festgestellt wird. *Die Transformation der Koordinaten* wird durch die Beziehung

$$(11) \quad \mathcal{F} = \mathcal{L} \circ \Phi$$

dargestellt.

Suchen wir die geometrischen  $\mathcal{L}$ -Eigenschaften, so müssen wir *die algebraischen Grundinvarianten* der  $\mathcal{L}$ -Gruppe untersuchen.

**Satz 4. Das Doppelverhältnis**

$$(12) \quad D = \frac{{}^1 z - {}^3 z}{{}^2 z - {}^3 z} : \frac{{}^1 z - {}^4 z}{{}^2 z - {}^4 z} = ({}^1 z, {}^2 z, {}^3 z, {}^4 z)$$

der beliebigen 4 nach 2 nichtparallelen Punkte  ${}^i z \in \bar{\Delta}$ ;  $i = 1, 2, 3, 4$ , ist eine algebraische Invariante der  $\mathcal{L}$ -Gruppe  $\mathcal{G}(\Delta)$ .

Beweis. Sei  ${}^i z = \mathcal{L}({}^i \zeta)$ ;  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathcal{G}(\Delta)$ ; aus (12) und (8) folgt:

$$\begin{aligned} ({}^1 z, {}^2 z, {}^3 z, {}^4 z) &= \frac{\frac{\alpha^1 \zeta + \beta}{\gamma^1 \zeta + \delta} - \frac{\alpha^3 \zeta + \beta}{\gamma^3 \zeta + \delta}}{\frac{\alpha^2 \zeta + \beta}{\gamma^2 \zeta + \delta} - \frac{\alpha^4 \zeta + \beta}{\gamma^4 \zeta + \delta}} : \frac{\frac{\alpha^1 \zeta + \beta}{\gamma^1 \zeta + \delta} - \frac{\alpha^4 \zeta + \beta}{\gamma^4 \zeta + \delta}}{\frac{\alpha^2 \zeta + \beta}{\gamma^2 \zeta + \delta} - \frac{\alpha^3 \zeta + \beta}{\gamma^3 \zeta + \delta}} = \dots \\ \dots &= \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)({}^1 \zeta - {}^3 \zeta)}{(\alpha\delta - \beta\gamma)({}^2 \zeta - {}^3 \zeta)} : \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)({}^1 \zeta - {}^4 \zeta)}{(\alpha\delta - \beta\gamma)({}^2 \zeta - {}^4 \zeta)} = \frac{{}^1 \zeta - {}^3 \zeta}{{}^2 \zeta - {}^3 \zeta} : \frac{{}^1 \zeta - {}^4 \zeta}{{}^2 \zeta - {}^4 \zeta} = \\ &= ({}^1 \zeta, {}^2 \zeta, {}^3 \zeta, {}^4 \zeta), \quad \text{qed.} \end{aligned}$$

Die algebraische  $\mathcal{L}$ -Invariante  $D$  nennen wir *das duale Doppelverhältnis*. Jede duale Funktion der beliebigen algebraischen  $\mathcal{L}$ -Invariante ist wieder eine  $\mathcal{L}$ -Invariante; daraus folgt:

$$\arg D = \arg (D_1 + \varepsilon D_2) = \arg \left[ D_1 \left( 1 + \varepsilon \frac{D_2}{D_1} \right) \right] = \arg [D_1(1 + \varepsilon\varphi)] = \varphi = \frac{D_2}{D_1}$$

ist auch eine  $\mathcal{L}$ -Invariante. Diese  $\mathcal{L}$ -Invariante kann man durch die Beziehung

$$\arg D = \arg \left( \frac{{}^1 z - {}^3 z}{{}^2 z - {}^3 z} : \frac{{}^1 z - {}^4 z}{{}^2 z - {}^4 z} \right) = \arg \frac{{}^1 z - {}^3 z}{{}^2 z - {}^3 z} - \arg \frac{{}^1 z - {}^4 z}{{}^2 z - {}^4 z} = \text{tg } \psi_3 - \text{tg } \psi_4$$

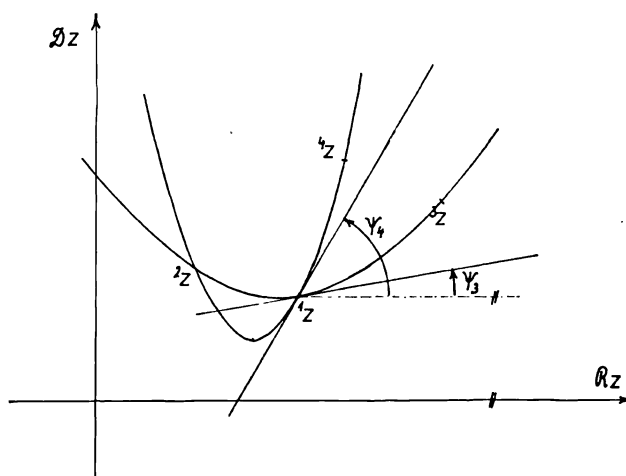


Abb. 4.

darstellen;  $\psi_3$ , bzw.  $\psi_4$  ist (im isotropen Modell) der Winkel (im euklidischen Sinn) des isotropen Kreises  $\{({}^1 z), ({}^2 z), ({}^3 z)\}$ , bzw.  $\{({}^1 z), ({}^2 z), ({}^4 z)\}$ , (die Parabel) im Punkt  ${}^1 z$  mit der reellen Achse, s. Abb. 4.

Im zycklographischen Modell (die Ebene  $\mu$ ) kann man die  $\mathcal{L}$ -Invariante  $\arg D$  wie die Tangentialentfernung zwei Zyklen  $\{(^1z), (^2z), (^3z)\}$ ,  $\{(^1z), (^2z), (^4z)\}$  mit genau 2 gemeinsamen Speeren  ${}^1z, {}^2z$  darstellen (s. [3], S. 30–35, bzw. s. [4], bzw. [5]); s. Abb. 5.

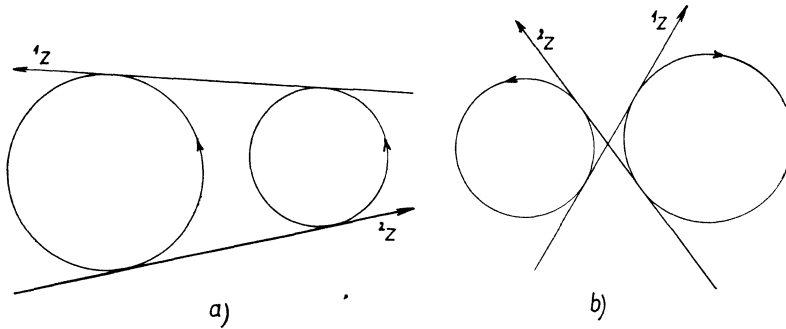


Abb. 5.

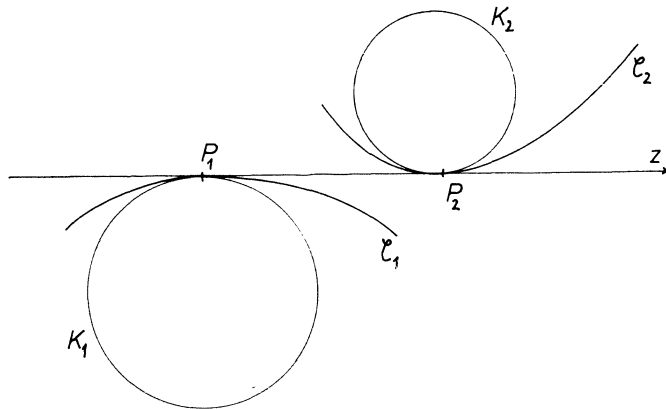


Abb. 6.

**Bemerkung 5.** Sind  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$  zwei beliebige Kurven in der Ebene mit der gemeinsamen Berührungslinie  $z$ , s. Abb. 6, so wird die Tangentialentfernung  $(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$  dieser Kurven als die Entfernung der Berührungspunkte  $P_1, P_2$  definiert. Sei  $K_i$  der in  $P_i$  die Kurve  $\mathcal{C}_i$  berührende Kreis,  $i = 1, 2$ , dann gilt für die Tangentialentfernung

$$(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2) = (K_1, K_2).$$

Fassen wir diese Situation in der Ebene  $\mu$  zusammen, dann behält eine beliebige  $\mathcal{L}$ -Transformation  $\mathcal{L}$ , die

$$\mathcal{C}_i \rightarrow \mathcal{C}'_i; \quad P_i \rightarrow P'_i; \quad K_i \rightarrow K'_i; \quad i = 1, 2$$

transformiert, die Tangentialentfernung beliebiger Kurven  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ . Die  $\mathcal{L}$ -Transformation gehört aus diesem Standpunkt aus zu den *equilongalen Transformationen*.

Eine weitere  $\mathcal{L}$ -Invariante ist das Modul des dualen Doppelverhältnisses  $D$ :

$$\text{mod } D = |D| = \Re D = D_1 .$$

Diese  $\mathcal{L}$ -Invariante wird *das Doppelverhältniss der Winkel 4 orientierter Geraden* (im zyklographischen Modell)  ${}^1z, {}^2z, {}^3z, {}^4z$  genannt, s. [5], S. 103.

#### *Literatur*

- [1] *W. Blaschke, G. Thomsen*: Differentialgeometrie III. Differentialgeometrie der Kreise und Kugeln. Verlag J. Springer, Berlin 1929.
- [2] *H. Frank*: Kinematik in der Laguerre-Ebene I. J. Geometry 7/2 (1976), S. 53—84.
- [3] *W. Benz*: Vorlesungen über Geometrie der Algebren. Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York, 1973.
- [4] *W. Benz*: Fährten in der Laguerregeometrie. Math. Annalen 150 (1963), S. 66—78.
- [5] *I. M. Jaglom*: Комплексные числа и их приложения в геометрии. Математическое просвѣщение, вып. 6, GIFML, Moskva 1961, S. 61—106 (russisch).
- [6] *Z. Jankovský*: Elemente der ebenen Laguerreschen Kinematik. Habilitationsschrift der elektrotechnischen Fakultät, ČVUT, Praha 1979 (tschechisch).
- [7] *U. Schober*: Zur Differentialgeometrie der Kurven in der Laguerre-Ebene. Diss. Karlsruhe 1966.
- [8] *И. М. Яглом*: Комплексные числа и их применение в геометрии. Москва 1963. (Englisch: *I. M. Yaglom*: Complex Numbers in Geometry. Leicester 1967.)

*Anschrift des Verfassers*: 166 27 Praha 6, Suchbatarova 2, katedra matematiky fakulty elektrotechnické ČVUT.