Časopis pro pěstování matematiky, roč. 76 (1951)

LENINSKÁ DIALEKTIKA A MATEMATIKA

A. D. ALEKSANDROV, dopis. člen všesvazové Akademie věd.

Ruský originál vyšel v časopise Priroda, vydávaném všesvazovou Akademií věd, v roč. 40, 1951, seš. 1, str. 5 až 15.

Ačkoli v nesmírně bohaté literární pozůstalosti V. I. Lenina téměř není přímých zmínek o matematice, je nicméně jasné z universálního charakteru toho rozvoje, který Lenin dal filosofii marxismu, že se nutně najdou u V. I. Lenina i takové ideje, které se dají přímo užít v matematice. Když se mluví o filosofických pracích V. I. Lenina, má se obyčejně na mysli především dílo „Materialismus a empiriokriticismus". Význam této knihy je dostatečně jasný: ona je zbrojnicí theoretických základů marxismu, dialektického a historického materialismu a materialistickou synthesou všeho toho důležitého a podstatného, co vytěžilo vědecké bádání, především přírodní vědy, za celé historické údobí. Pátá kapitola „Materialismu a empiriokriticismu", věnovaná filosofii přírodních věd, filosofické krisi fysiky, objasňuje zároveň také podstatu krise matematiky, ačkoli o matematice samotné se tam přímo nemluví. Že tomu tak jest, to plyne z toho, že prameny a obsah krise vědy v buržoasní společnosti jsou v podstatě stejného rázu i pro fysiku i pro biologii i pro matematiku.

Vedle toho v četných dílech V. I. Lenina, která nejsou věnována speciálně filosofickým otázkám, jsou obsaženy a rozvedeny aplikace materialistické dialektiky na rozmanité problémy z politiky a ze společenských věd. Vzpomeňme na př. článku „Ještě jednou o odborech",*) kde Lenin rozvíjí dialektickou logiku, formuluje učení o vymezování pojmů. Je jasné, že tato otázka má přímý vztah také k matematice, jelikož k chápání matematiky nepostačují formální definice a formální logika. V daném případě Lenin přímo mluví o dialektice; ale i tam, kde o ní nemluví přímo, vždy usuzuje jako filosof, vždy řeší každou otázku z principiálního hlediska, užívá dialektické methody. Proto je možné a nutné učit se jeho filosofii ze všech jeho prací.

Zvláštní význam mají „Filosofické sešity" V. I. Lenina, sbírka jeho záznamů a poznámek z filosofie. Není v nich soustavný výklad, obsahují

*) Vyšlo česky ve sborníku: Odbory ve výstavbě socialismu, str. 265—301; vydala Práce v r. 1949.

však nedozírné bohatství hlubokých a bystrých myšlenek a ve svém celku dávají hluboký a všestranný obraz dialektiky. Ideje, které zde formuluje Lenin, neustále slouží jako základ k chápání nejrozmanitějších problémů vědy.

V tomto článku nemůžeme ani z daleka podati úplný rozbor významu Leninových idejí pro matematiku, ba ani ne výčet jejich rozmanitých aplikací na problémy matematiky. Řešení takového úkolu značně přesahuje možnosti jednoho článku. Náš cíl je skromnější; spočívá v tom, abychom prokázali přímou souvislost matematiky s některými z idejí, které V. I. Lenin vyslovil ve „Filosofických sešitech" a zejména v poznámce „K otázce o dialektice".*) Chceme ukázat, že ve čtyřech stránkách, na kterých je umístěn tento znamenitý výtvor Leninova genia, je klíč k chápání hlubokých problémů filosofie matematiky.**) Podrobné rozvinutí idejí jen této jediné poznámky a jen co do jejího významu pro matematiku samo už je velkým a významným problémem, z něhož načrtneme jen některé rysy. Krátce, tento článek nelze považovat za soustavný rozbor otázky o souvislostech leninské dialektiky s matematikou, nýbrž pouze za formulaci této otázky a za námět k řešení některých jejích stránek.

I. O abstrakci.

Charakteristickým rysem matematiky je její abstraktnost. Už prostinké čítání představuje dalekosáhlou abstrakci. My stále operujeme abstraktními (nepojmenovanými) čísly, a nestaráme se o to, abychom čísla po každé spojovali s určitými předměty. Ve škole učíme abstraktní násobilce, a neučíme, jak násobit počet dětí počtem jablek, počet jablek cenou jednoho jablka a pod. Rovněž tak v geometrii uvažujeme prostorové tvary těles tak, že abstrahujeme od jejich materiálního obsahu. Tvary těles jsou studovány také na př. v krystalografii, ale ta na rozdíl od geometrie je studuje v souvislosti s jejich materiálním obsahem, od kterého se v geometrii naprosto abstrahuje. Tedy už počty a geometrie vycházejí od dalekosáhlých abstrakcí: od pojmu celého čísla, bodu, přímky, obrazce a pod. Matematika vůbec je věda o vztazích a formách skutečnosti, uvažovaných v jejich čistém tvaru, t. j. bez přihlížení ke konkretnímu a věcnému obsahu.

---

*) *Vl. I. Lenin,* Filosofické sešity, rusky 1947, str. 327—330. Poznámka „K otázce o dialektice" vyšla česky jako dodatek ke knize „Materialismus a empiriokriticismus", 2. vyd., 1945, str. 281—284 a otiskujeme ji na str. 231 až 234.

**) Na toto thema a pod týmž titulem napsal autor kratičkou publikaci, která vyšla ve „Věstníku leningradské university" (č. 4, 1950). V tomto článku se poněkud podrobněji rozvíjejí načrtnuté tam úvahy, ale zavádí se zde také podstatně nový materiál. Otázka o kořenech idealismu v matematice, které se rovněž dotýkám na citovaném místě, bude předmětem jiného článku, který vyjde v jednom z následujících čísel tohoto časopisu. (Pozn. překl.: Běží o následující článek „O idealismu v matematice".) Mimo to autor dbal o to, aby opravil některé nepřesnosti, kterých se dopustil v uvedené publikaci.

Z toho, co bylo právě řečeno, je patrné, že pro pochopení matematiky je rozhodující otázka o původu, roli a místě abstrakce při poznávání přírody. Obecné řešení této otázky bylo dáno V. I. Leninem: „Poznání je odrazem přírody v člověku. Není to však prostý, bezprostřední, celistvý odraz, nýbrž proces řady abstrakcí, formulací, tvoření pojmů, zákonů etc., kteréžto pojmy, zákony etc. ... *zahrnují* podmínečně, přibližně universální zákonitost věčně se pohybující a vyvíjející přírody... Člověk nemůže shrnout = odrazit = vyjádřit přírodu *celou*, úplně, postihnout její „bezprostřední celost", nýbrž může jen *věčně* se tomu blížit tím, že vytváří abstrakce, pojmy, zákony, vědecký obraz světa atd. a pod."*) A na jiném místě Lenin píše: Myšlení, přecházejíc od konkretního k abstraktnímu, nevzdaluje se — ačli je *správné*... — *od* pravdy, nýbrž naopak k ní vede. Abstrakce *hmoty*, přírodního *zákona*, abstrakce *hodnoty* atd., jedním slovem *veškeré* vědecké (správné, seriosní, ne prázdné) abstrakce odrážejí přírodu hlouběji, věrněji, *úplněji*. Od živého vnímání k abstraktnímu myšlení *a od něho k praxi*, to jest dialektická cesta k poznávání *pravdy*, poznávání objektivní skutečnosti".**)

V těchto slovech je shrnuta podstata učení dialektického materialismu o abstrakci. Předně, poznání je složitý historický proces a abstrakce je nezbytný, důležitý stupeň neboli stránka poznání: abstrakce odrážejí přírodu a vědecké, správné abstrakce ji odrážejí hlouběji, věrněji, úplněji. Za druhé, každá abstrakce je pouze stupněm k přiblížení k úplnému poznání přírody. Tudíž ji nesmíme absolutisovat a odtrhnout ji od obecných souvislostí, od obecného rozvoje poznání. Za třetí, správnost odrážení přírody abstrakcemi se prověřuje praxí. „Praxí musí člověk prokázat správnost svého myšlení" (Marx).

Všecko to má přímý vztah také k matematickým abstrakcím. Chápání těchto abstrakcí s hlediska dialektického materialismu tedy spočívá v tom, že předně je třeba vidět v abstrakcích odraz přírody, nikoli „svobodné výtvory rozumu" a pod.; za druhé spočívá v tom, že je třeba si uvědomit složitost a mnohotvárnost procesu poznání, tedy také speciálně i složitost a mnohotvárnost vývoje matematiky; za třetí spočívá v tom, že je třeba chápat nezbytnost a důležitost matematických abstrakcí; dále spočívá v tom, že se nesmějí tyto abstrakce absolutisovat, že se nesmějí odtrhnout od jejich skutečného pramene a vytrhovat je z obecných souvislostí matematiky, vědy vůbec a všeho celku poznání, a posléze spočívá v tom, nejenom si uvědomovat reálné prameny abstrakcí, nýbrž také prověřovat správnost abstrakcí na praxi, zaměřovat matematiku k praxi, a ne pokoušet se najít zdůvodnění matematických abstrakcí v samotné ryzí matematice, hromadit jednu abstrakci na druhou a stále se vzdalovat od praxe.

---

*) *V. I. Lenin*, Filosofické sešity. Rusky 1947, str. 156.

**) *V. I. Lenin*, Filosofické sešity. Rusky 1947, str. 146—147.

Skutečný obsah matematických abstrakcí byl odhalen Engelsem v „Anti-Dühringu“: „Ryzí matematika má za svůj předmět prostorové tvary a kvantitativní vztahy skutečného světa, tedy velmi reálnou látku. Skutečnost, že se tato látka jeví v nejvýš abstraktní formě, může jen povrchně zastřít její původ z vnějšího světa. Abychom mohli zkoumat tyto formy a vztahy v jejich ryzím tvaru, musíme je úplně odloučit od jejich obsahu a ten jako lhostejný ponechat stranou. Tak dostaneme body bez rozměru, čáry bez tloušťky a šířky, a a b, x a y, konstanty a proměnné...“*) A dále: „Jako všechny ostatní vědy, vznikla i matematika *z potřeb lidí*: z měření země a objemu nádob, z počítání času a z mechaniky.“

V těchto hlubokých poznámkách, vystihujících podstatu matematiky, Engels nejen vysvětluje vznik matematických abstrakcí, nýbrž také zdůrazňuje jejich nezbytnost, neboť praví, že prostorové tvary a kvantitativní vztahy skutečného světa je nutné odloučit od jejich obsahu, aby bylo možné je zkoumat v ryzím tvaru.

Význam abstrakce vysvětluje J. V. Stalin ve své práci „Marxismus a otázky jazykovědy“: „Gramatika je výsledkem úporné abstrahující činnosti lidského myšlení, ukazatelem ohromných úspěchů myšlení.“ A dále: „Gramatika nám v tomto ohledu připomíná geometrii, která vytváří své zákony, abstrahujíc od konkretních předmětů a zkoumajíc předměty jako tělesa bez konkretnosti a určujíc vztahy mezi nimi nikoliv jako vztahy konkretní, jakýchsi konkretních předmětů, nýbrž jako vztahy mezi tělesy vůbec bez jakékoliv konkretnosti.“**)

V těchto slovech je se vší J. V. Stalinovi vlastní jednoduchostí a zřetelností vyjádřena podstata geometrie. Geometrie tak jako gramatika je výsledkem dlouhotrvající činnosti lidského myšlení, ukazatelem ohromných úspěchů myšlení. Klasikové marxismu vždycky zdůrazňovali jak reálný obsah, tak ohromný význam vědeckých abstrakcí.

U prvých matematických pojmů jest jejich původ z vnějšího světa na základě dlouhé praktické zkušenosti řady generací dostatečně zřejmý. Na příklad pojem celého čísla vyjadřuje reálnou vlastnost souborů předmětů, jíž jest počet předmětů souboru. Ale odraz přírody u člověka je složitý historický proces a dalekosáhlé abstrakce současné matematiky nevznikají jako jednoduché bezprostřední kopie skutečnosti, nýbrž prostřednictvím řady postupných kroků založených na dříve provedených abstrakcích; často dochází k jejich potvrzení praxí ne naráz, nýbrž zase řadou postupných kroků. Stačí vzpomenout imaginárních čísel, jejichž sám název (imaginární = pomyslný, zdánlivý) ukazuje, že po dlouhou dobu nedocházelo k jejich praktické motivaci. Avšak na počátku minulého století bylo nalezeno jejich vyjádření pomocí bodů nebo vektorů

*) *K. Marx* a *B. Engels*, Spisy, rusky, sv. XIV, str. 39. Viz též český překlad Anti-Dühringa, Velká knihovna marxismu-leninismu, sv. 5, 1949, str. 36—37.

**) Česky na př. v Tvorbě, roč. 19, č. 25, 1950, str. 590.

v rovině, a tehdy nejenom na trvalo vešla imaginární čísla do matematiky, nýbrž časem došlo k mnohotvárnému jich využití, zasahujícímu do elektrotechniky a aerodynamiky. Tak na př. theorie křídla letadla, vybudovaná N. Je. Žukovským, užívá podstatně theorie funkcí komplexní proměnné.

Druhý ne méně markantní příklad, demonstrující složitost rozvoje matematiky, poskytuje vybudování neeuklidovské geometrie provedené N. J. Lobačevským. Tento skvělý úspěch abstraktního myšlení vznikl z problému, vyjasnit logickou závislost či nezávislost axiomu o rovnoběžkách na ostatních základních vztazích Eukleidovy geometrie. Tento ryze matematický, ba v určitém smyslu logický problém, o který se mnoho geometrů zajímalo po dvě tisíciletí, v rukách Lobačevského vedl k podivuhodnému řešení, které se stalo východiskem zcela nového rozvoje geometrie. Zdánlivě naprosto abstraktní ideje neeukleidovské geometrie byly potom obsáhle zpracovány v různých směrech a bylo jich nejen užito mnohotvárným způsobem v matematice samotné, v mechanice a ve fysice, nýbrž posloužily také jako důležité vodítko k vytvoření některých fysikálních theorií, zejména obecné theorie relativity.

Příklady imaginárních čísel a neeukleidovské geometrie ukazují, že vnitřní potřeby matematiky samé, potřeby řešení jejích abstraktních problémů mohou vésti k nesmírně důležitým důsledkům, že se rozvoj matematiky, jako každé vědy vůbec, neredukuje na prostý, bezprostřední odraz přírody, nýbrž že vyžaduje tvoření dalekosáhlých abstrakcí, vznik nových pojmů, budování nových theorií atd.

Tyto příklady ukazují také, že souvislost matematiky s praxí a zaměření matematiky k praxi se nesmí vulgárně zjednodušovat, nesmí se pojímat ve smyslu pouhého bezprostředního užívání jednotlivých matematických vývodů. Matematika je celistvá věda, která se nerozpadá na separátní věty, ba ani na separátní theorie.

Matematika je spojena s praxí nejen jednotlivými úlohami a výsledky, nýbrž i ve svém celku, jakožto obecná methoda zkoumání problémů techniky a exaktní přírodovědy, nezbytná pro jejich rozvoj. Jednotlivé matematické výsledky mohou býti spojeny s praxí i nepřímo přes celou řadu mezistupňů.

Právě tak i sama praxe není pouhý soubor separátních technických úloh, nýbrž představuje souvislý historický proces, ve kterém je zahrnuta i technika i věda i politika. Proto zejména i obecné filosofické problémy matematiky mají rovněž konec konců praktický význam předně proto, že jsou důležité pro celkový rozvoj matematiky, a za druhé proto, že jejich ideologický obsah tak či onak je zapojen do ideologického, a tím i do politického boje.

V důsledku všeho, co bylo řečeno, nepochopení složitosti vývoje matematiky nevyhnutelně vede k vulgárním, nesprávně zjednodušujícím a konec konců falešným představám o této vědě. Nepochopení nezbytnosti a důležitosti matematických abstrakcí vede k negaci matematiky samé. Zároveň však přehánění role těchto abstrakcí, přikládání jim samoúčelného smyslu, vedoucí až k povyšování jich na absolutno, vede k idealismu, třeba i na příklad v duchu pythagorského tvrzení, že „čísla řídí svět". Vytrhování jednotlivých abstrakcí z organického celku vědy vede k formalismu, k rozpadu matematiky na jednotlivé theorie špatně stmelené navzájem. Nepochopení objektivních pramenů a skutečného obsahu abstrakcí zase vede k idealismu, který hledá původ matematických pojmů v intuici, v „apriorních formách myšlení" nebo třeba i v bohu. Posléze nepochopení toho, že matematické abstrakce docházejí konečného potvrzení praxí, vede k tomu, že matematika ztrácí svůj skutečný fundament a své pravé poslání: sloužit poznání a přeměně skutečnosti. „Od živého vnímání k abstraktnímu myšlení *a od něho k praxi*, to jest dialektická cesta poznávání *pravdy*, poznávání objektivní skutečnosti" (V. I. Lenin).

Takové jsou, jak se nám zdá, základní these o matematické abstrakci, přímo vyplývající z Leninových myšlenek.

2. Dialektika v nejjednodušších matematických pojmech a úsudcích.

V. I. Lenin v poznámce „K otázce o dialektice" objasňuje logický postup výkladu v Marxově „Kapitálu" a píše: „Právě taková má býti methoda výkladu (resp. studia) dialektiky vůbec (neboť dialektika buržoasní společnosti u Marxe je pouze zvláštním případem dialektiky). Začněme nejprostším, nejobvyklejším, nejběžnějším etc., libovolným *soudem*: listy stromu jsou zelené; Ivan je člověk; Alík je pes a pod. Již zde... je *dialektika*; jednotlivé JEST *obecné*... To znamená, že protiklady (jednotlivé je protikladem obecnému) jsou totožné: jednotlivé neexistuje jinak než v té souvislosti, jež vede k obecnému. Obecné existuje jen v jednotlivém prostřednictvím jednotlivého. Každé jednotlivé jest (tak či jinak) obecné... Každé jednotlivé je neúplně obsaženo v obecném atd. atd. Každé jednotlivé souvisí tisíci přechody s jednotlivými (věcmi, jevy, procesy) jiného druhu atd." A v dalším V. I. Lenin shrnuje: „Tak možno (a nutno) v libovolném soudu, jako v „buňce" objeviti počátky všech prvků dialektiky, a ukázati tak, že dialektika je vlastní všemu lidskému poznání vůbec."*)

Přijmeme tento Leninův podnět, vyjdeme od nejobyčejnějšího matematického tvrzení a budeme hledět v něm najít zárodky prvků dialektiky, abychom takto ukázali, že i matematickému myšlení je vlastní dialektika.

*) *V. I. Lenin*, Filosofické sešity. Rusky 1947, str. 328—329. Česky v tomto sešitě, str. 233.

Uvažujme jednoduchou rovnost: $x = 1$. Jestliže zde x jest jednotka, potom tato rovnost neznamená nic než prázdnou tautologii, že jednotka je rovná jednotce. Tedy uvažovaná rovnost může mít kladný význam, může být stupínkem v rozvinutí myšlenky pouze v tom případě, jestliže x není jednotka, nýbrž je něčím jiným, byť i rovným jednotce. Tak tomu také vždy jest, neboť x buďto je hodnota neznámé veličiny, nebo hodnota proměnné a pod. Tudíž protiklady jsou sjednoceny: x jest jednotka a není jednotka. Takovým způsobem už nejjednodušší matematický výpočet obsahuje dialektiku, jakmile znamená i nejmenší myšlenkový krok, i nejmenší přechod od jednoho k druhému, od známého k neznámému.

Matematikové nechápající dialektiku si neuvědomují myšlenkový pochod v matematickém usuzování. Říká se na příklad, že celá geometrie je už obsažena v axiomech, jako by znalost axiomů byla postačující ke znalosti geometrie. Avšak geometrie je obsažena v axiomech pouze potenciálně, a přetvořit možnost ve skutečnost lze pouze odvozením vět, zavedením nových pojmů, odvozením dalších vět atd. A celý tento tvůrčí proces matematického myšlení netoliko obsahuje dialektiku, nýbrž je spjat s celým vývojem matematiky, s jinými vědami i s praxí. Mimo to však se v matematických úsudcích odrážejí objektivní souvislosti v přírodě, neboť logické usuzování je odrazem souvislostí v přírodě v souvislostech v myšlení.

Přes to na příklad takový vynikající matematik, jakým byl Poincaré, zápolil s problémem výskytu nového v matematickém usuzování, hledal „tvůrčí matematickou intuici" a našel ji ve známé methodě „matematické indukce" (t. j. v methodě odvozování obecných vět o celých číslech přechodem od n k $n + 1$), kterou považoval za apriorní. Avšak jeho „tvůrčí intuice" a „apriorní princip matematické indukce" je obyčejný idealistický blud. Vskutku všelikému myšlení, speciálně i matematické intuici a matematickému usuzování, je vlastní dialektika, odrážející objektivní dialektiku přírody. A pokusy objevit nějaké zvláštní tvůrčí zdroje matematiky jsou založeny na nepochopení této pravdy.

Vraťme se k naší rovnosti: $x = 1$. Ježto zde x není prostě jednotkou, záleží smysl naší rovnosti na tom, co znamená x. Jestliže x znamená třeba počet nějakých předmětů, potom jednotka tu vystupuje jako člen řady celých kladných čísel. A zde je zase dialektika. Jednotka je tu protikladem mnohosti, a zároveň množství se skládá z jednotek a proto každé celé číslo je součtem jednotek. Dále jednotka jako číslo má určité vlastnosti pouze ve spojení s jinými čísly, pouze v soustavě všech celých čísel. „Sama o sobě" nemá žádné vlastnosti a znamená pouze abstrakci jediného předmětu, ale v soustavě čísel se naplní obsahem. Tak jednotka se stává basí pro celá kladná čísla: ona z ní vznikají sčítáním. Je charakterisována tou vlastností, že kterékoli číslo jí znásobeno zůstane bez změny atd.

Slovem: jednotka jako celé číslo existuje a má smysl pouze v soustavě celých čísel.

Avšak x v rovnosti $x = 1$ může znamenat nejen celé kladné číslo, nýbrž může být třeba jedním členem souboru celých čísel vůbec, kladných, záporných a nuly. Tak tomu je, na příklad, jestliže x znamená teplotu vyjádřenou v celých stupních Celsia. Dále x může znamenat spojitě proměnnou veličinu, načež v rovnosti $x = 1$ jednotka vystupuje jako jedno z libovolných reálných čísel.

Tedy v rovnosti $x = 1$ sama jednotka může mít různý smysl, vystupujíc buďto jako prvek soustavy celých kladných čísel, nebo jako jedno z libovolných celých čísel, libovolných lomených (racionálních) čísel, libovolných reálných nebo i komplexních čísel. Při přechodu k těmto širším a širším soustavám čísel jednotka sama se naplňuje stále větším obsahem v důsledku těch nových souvislostí, do kterých se zařazuje jako člen těchto stále širších číselných soustav.

Tedy jednotka, a tak i každé jiné jednotlivé číslo, neexistuje jinak než ve spojení s ostatními čísly, ve spojení s celou soustavou čísel. „To znamená, že protiklady (jednotlivé je protikladem obecnému) jsou totožné: jednotlivé neexistuje jinak než v té souvislosti, jež vede k obecnému". Avšak soustava čísel se skládá z jednotlivých čísel, a tudíž „obecné existuje jen v jednotlivém prostřednictvím jednotlivého". Každé jednotlivé číslo je spojeno tisícerým přechodem s ostatními jednotlivými čísly.

To však není ještě vše. Jednotka je prvkem různých soustav čísel: celých kladných čísel, libovolných celých, libovolných racionálních, reálných, komplexních, hyperkomplexních. Tudíž není jediná jednotka, jednotky jsou různé, podle té souvislosti, ve které jednotka se uvažuje. Zároveň jednotka jaksi v sobě zahrnuje všecky tyto různé možnosti a v tomto smyslu neúplně vchází do každé dané číselné soustavy, ježto může vcházet i do jiných číselných soustav. Takto „každé jednotlivé je neúplně obsaženo v obecném".

Takto už v nejjednodušší matematické rovnosti nacházíme zárodek dialektiky, který je obsažen jak v matematických úsudcích, tak i v matematických pojmech. Matematice je dialektika vlastní stejně jako veškerému myšlení. Omyl metafysiky tkví v tom, že nevidí tuto dialektiku, a představuje si, že je možné jakési naprosto formální matematické myšlení. Ale matematice je dialektika vlastní nejen v jednotlivých pojmech a úsudcích. Celý rozvoj matematiky, tak jako vývoj vůbec, je hluboce dialektický. Tuto dialektiku ve vývoji matematiky budeme právě hledět odhalit v následujícím oddílu.

3. Boj protikladů jako zákon vývoje matematiky.

Poznámka V. I. Lenina „K otázce o dialektice" počíná takto: „Rozdvojení jednotného a poznání jeho si odporujících částí je *podstatou* (jednou z „podstatných vlastností", jednou ze základních, ne-li základní osobitostí či rysem) dialektiky... Správnost této stránky obsahu dialektiky musí býti prověřena historií vědy. Této stránce dialektiky bývá obyčejně... věnováno málo pozornosti: totožnost protikladů se obyčejně chápe jako souhrn *příkladů*... a ne jako *zákon poznání* (a zákon objektivního světa)." A dále: „Vývoj je bojem protikladů."*) Vidíme, že V. I. Lenin zde přímo formuluje úlohu: prověřit zákon jednoty a boje protikladů historií vědy. Proto je přirozené obrátit se k historii matematiky a uvažovat o tom, zda je správné, že vývoj matematiky je „boj" protikladů. Této stránce (a je to ne prostě jedna stránka, nýbrž jedna ze stěžejních otázek historie matematiky) se věnuje nedostatečná pozornost, jestliže vůbec se jí věnuje nějaká pozornost; a při tom právě se nyní přesvědčíme o tom, že matematika plně potvrzuje Leninovu myšlenku.

„Rozdvojení jednotného" má svůj výraz už v tom, že ve skutečnosti máme před sebou jednotlivé věci v jejich souvislostech a jednotě, t. j. rozdělené a jednotné, části a celek, jednotlivé věci a nerozlučná souvislost, tyto protiklady existují pouze všecky zároveň a jsou vzájemně podmíněny. Jako krajní póly těchto protikladů figurují diskretnost a spojitost, t. j. úplná rozdělenost na jednotlivé prvky, a naopak nerozdělitelnost, která právě se nazývá spojitost. Tyto protiklady ve svém ryzím tvaru, ve kterém se abstrahuje od hmotného obsahu, jsou právě předmětem matematiky. Ona vůbec začíná těmito protiklady.

Vskutku matematickým vyjádřením jednotlivého samostatného předmětu je jednotka, a matematickým vyjádřením jednotlivých předmětů je celé kladné číslo. Sčítání čísel vyjadřuje sjednocení dvou souborů v jediný, bez vzájemného působení, se zachováním samostatnosti prvků. Jeden předmět a jeden předmět jsou dva předměty. Avšak litr vody a litr lihu nality dohromady nedají dva litry, nýbrž trochu méně, v důsledku rozpouštění, t. j. vzájemného působení těchto kapalin. Již tento jednoduchý příklad ukazuje, že sčítání chápané fysikálně může být různé a že prosté sčítání: $1 + 1 = 2$, chápané fysikálně, se vztahuje na úplně oddělené a vzájemně na sebe nepůsobící předměty (pokud je možné abstrahovat od vzájemného působení, které ve skutečnosti nastává vždy). Abstraktní výkony s abstraktními čísly jsou pouze symboly příslušných fysikálních výkonů. Lidé v tisících milionů případů prakticky opakovali nejjednodušší výkon sčítání, než na základě zkušenosti tisíciletí se vyvinul pojem čísla a sčítání čísel. I nyní ve škole všichni se učí sčítat nejprve na hůlečkách a jiných předmětech.**)

Tedy, stručně řečeno, celé číslo je abstrakcí ryzí diskretnosti, t. j. diskretnost vzatá v obecné formě zbavená veškeré konkretnosti, nebo jinými slovy pouhé holé schema diskretnosti. Nauka o celých číslech ne-

*) *V. I. Lenin*, Filosofické sešity. Rusky 1947, str. 327. Česky v tomto sešitě, str. 231 a 232.

**) Věci jsou nyní jednodušší proto, že máme názvy a značky pro čísla, kdežto lidé vytvářející pojem čísla teprve vytvářeli pro ně názvy a značky. Jedno je nerozlučně spojeno s druhým. Ale nyní, když značky už tu jsou, myšlení je hotově přijímá, majíc před sebou reálný obraz pojmu.

boli aritmetika je pak prvou kapitolou matematiky, prvou i svým historickým vznikem i svým logickým vývojem. Tedy prvým pramenem, prvým počátkem matematiky je diskretnost.

Druhou matematickou naukou, jejíž počátky rovněž sahají do dávných věků, je geometrie. Geometrický obrazec, jak jej chápeme ve své představě, je symbolem ryzí spojitosti. Tento symbol se vyvíjel v historii postupně na základě tisícileté praxe. Nejjednodušší obrazec — úsečka — je abstrakcí reálných úseček, abstrakcí reálných předmětů, separující a zachovávající pouze vlastnost rozměrnosti v jednom směru. Spojitost úsečky je obrazem spojitosti reálných předmětů, spočívající v tom, že dělíme-li předmět, porušujeme jeho celistvost. Zlomená hůlka už není hůlka; jablko rozříznuté na půlky už není jablko. Tato vlastnost celistvosti předmětu, který nelze rozdělit bez porušení celku, nachází svůj výraz v pojmu spojitosti geometrického obrazce. Stručněji řečeno, geometrický obrazec je abstrakcí ryzí spojitosti, prostorová spojitost uvažovaná ve své formě, se zanedbáním veškeré konkretnosti, holé schema prostorové spojitosti. Geometrie je ve svém nejhlubším základě naukou o této ryzí spojitosti.

Nicméně pojem spojitosti je složitější než pojem celého čísla, jako i představa souvislosti věcí je složitější než představa jednotlivých věcí. Proto pojem geometrického obrazce a pojem spojitosti se vyvíjely daleko pomaleji než pojem celého čísla. A k jasnému chápání toho, že právě spojitost je základem geometrie, došlo teprve nedávno.

A co více, my jsme právě úmyslně zjednodušili skutečný stav věcí a ostře jsme proti sobě postavili spojitost a diskretnost, aby lépe vyšly na jevo jejich polární protiklady. Ve skutečnosti obě vlastnosti vždy vystupují v nerozlučné jednotě: jednotlivý předmět má svou spojitost, nedělitelnost, a spojité má části, má v sobě možnost dělení. Spojitý pohyb nezbytně obsahuje v sobě přerušení spojitosti, porušení ustavičnosti. Geometrie se vyvíjela na základě spojení diskretního se spojitým. Obecně vývoj matematiky v řadě svých podstatných etap vyjadřuje „boj“ a sjednocení protikladů diskretního a spojitého, „boj“ a jednotu čísla a spojité rozměrnosti.

Tyto filosofické a jak by se mohlo zdát, velmi abstraktní termíny vyjadřují v obecných pojmech dialektiky velmi reálné věci, dobře známé momenty ve vývoji matematiky. Vskutku jednota diskretního čítání a spojité rozměrnosti se projevuje už při jednoduchém procesu měření délky. Spojitá délka se měří kladením měřítka postupnými, diskretními kroky; v nejobyčejnějším případě měříme délku ušlé cesty na lidské kroky. Tu se však ihned objevuje protiklad: dané měřítko, na př. metr, vyjádří délku úsečky pouze přibližně. Abychom zlepšili měření, musíme přejít od celých čísel k lomeným.

A už zde v „boji“ protikladů čísla a rozměrnosti počíná vývoj matematiky, vývoj pojmu čísla.

My zde ovšem nemůžeme načrtnout ani v hrubých rysech úplný obraz tohoto vývoje, a pokusíme se pouze v několika bodech naznačit hlavní jeho etapy, abychom došli k obecné představě o boji protikladů jako základně rozvoje matematiky. Z počátku se zdálo, že libovolnou spojitou veličinu je možné vyjádřit lomeným (racionálním) číslem. První dochovaný pokus theorie geometrických obrazců pochází od velkého materialisty starověku Demokrita. On si představoval obrazce složeny z atomů a tím převáděl spojité na diskretní. Měl za to, že délky úseček jsou v poměru celých čísel vyjadřujících počet atomů v těch úsečkách.

Tu však Řekové objevili, že ze základních premis geometrie plyne existence nesouměřitelných úseček. Podle Pythagorovy věty úhlopříčka čtverce je rovna druhé odmocnině součtu čtverců dvou stran. Tudíž úhlopříčka čtverce se stranou rovnou jednotce je rovna $\sqrt{2}$, t. j. rovna „číslu“, které znásobeno samo sebou dává číslo 2. Avšak takové racionální číslo neexistuje; poměr úhlopříčky čtverce k jeho straně se nedá vyjádřit jako poměr dvou celých čísel.*)

Tento protiklad působil hlubokým dojmem na řecké matematiky a filosofy. Podnítil je k vybudování theorie poměrů úseček, rozvinuté Eudoxem a vyložené v proslulých „Základech“ Eukleidových. Avšak Řekové nedokázali dojít k abstraktnímu pojmu irracionálního čísla. Tento pojem zůstal po celá staletí mlhavým, jak ukazuje už sám název irracionální, t. j. nerozumné, nepostižitelné číslo. Přesná formulace tohoto pojmu a vybudování obecné theorie irracionálních čísel je dílem daleko pozdější epochy; došlo k tomu teprve ve druhé polovině minulého století v důsledku pronikavého rozvoje matematiky.

Protiklad diskretního a spojitého, konečného a nekonečného byl u Řeků předmětem hlubokých filosofických úvah, na příklad v proslulých Zenonových paradoxech. V matematice tento protiklad nebyl odstraněn, a obě koncepce — spojitého a diskretního — trvaly dále v řecké matematice. Atomistických představ se užívalo jako jakési heuristické methody, a výsledky jimi docílené byly potom přepracovány na základě přesnější theorie poměrů.

Protiklad nespojitého a spojitého se objevil v matematice s novou silou v 17. století, když se kladly základy matematické analysy. Zde se jednalo o nekonečně malé. V jedné z vládnoucích představ figurovaly jako skutečné, aktuálně malé částice spojité veličiny, podobně jako

*) Důkaz. Připusťme, že $\sqrt{2} = p : q$, kde p a q jsou celá čísla. Potom musí býti $2q^2 = p^2$, a tedy číslo p^2 je sudé. Avšak potom p^2, jako druhá mocnina celého čísla, je násobkem čtyř. Z toho plyne dále, že také číslo q^2 je sudé, t. j. dělitelné dvěma a nutně i čtyřmi; potom však p^2 je dělitelné osmi a tudíž i šestnácti. Takto vychází, že obě čísla p i q musí býti dělitelna libovolně vysokou mocninou dvou, což je nemožné. Proto předpoklad, že $\sqrt{2} = p : q$, je nesprávný, což se mělo dokázat.

Demokritovy atomy, ale nyní jejich počet se považoval za nekonečně velký (na př. Cavaleriova indivisibilia). Na výpočet obsahů a objemů (integraci) se nazíralo jako na sčítání nekonečného počtu těchto nekonečně malých veličin.

Avšak tento názor se ukázal neuspokojivým, a jako protiváha k němu se vyvíjela, především zásluhou Newtonovou, představa o spojitých proměnných, o nekonečně malých jakožto neomezeně ubývajících proměnných veličinách. Tato koncepce nabyla vrchu, když v prvé polovině 19. století byla vybudována přesná theorie limit. Nyní úsečka se nejevila složenou z bodů nebo „nedělitelných", nýbrž byla chápána jako rozměrnost, jako spojité prostředí, kde je pouze možno fixovat jednotlivé body, jednotlivé hodnoty proměnné veličiny. Matematikové také mluvili o rozměrnosti (Ausdehnung), jako to činil na př. Riemann, když budoval základy své theorie vícerozměrných abstraktních prostorů.

Avšak rozvoj analysy si vyžádal další zpřesnění theorie proměnných veličin a především obecné definice reálného (racionálního nebo iracionálního) čísla jakožto libovolné možné hodnoty proměnné. Tehdy v sedmdesátých letech vznikla Cantorova a Dedekindova theorie reálných čísel, ve kterých úsečka se jeví množinou bodů a v souhlase s tím interval množinou reálných čísel. Spojitost znovu počala sestávat z jednotlivých, diskretních bodů, a vlastnosti spojitosti byly formulovány jako strukturální vlastnosti souboru vytvářejících ji bodů. Tato koncepce vedla k ohromným úspěchům matematiky a stala se vládnoucí. Avšak také v ní se objevily hluboké potíže, ze kterých opět se rodí představy o ryzí spojitosti, kteréžto představy však dosud jsou neuspokojivé. Vznikají nové názory na pojmy čísla, proměnné, funkce: zavádí se na př. nový pojem „počítatelného" čísla a pod. Vývoj theorie pokračuje, a musíme čekat na další pokroky.

Zároveň s tisíciletým, zde jen v nejobecnějších rysech načrtnutým, vývojem pojmů čísla a rozměrnosti, t. j. zároveň s vývojem základních pojmů matematiky, šel také vývoj její látky i method. Ruch pojmů byl rozvířen konkretními úlohami matematiky, mechaniky, fysiky a techniky. Demokrit prostřednictvím svých atomových představ byl veden k objevu vzorců pro objem kužele a koule. Archimedes užíval týchž představ k určování obsahů a objemů, ale dával úsudkům přesný tvar v rámci nové Eudoxovy theorie poměrů.

V nové době počíná systematické užívání početních method k řešení geometrických úloh. Algebra, vytvořená v základě chorezmskými učenci jakožto abstraktní výraz číselných výpočtů, stala se v rukou Descartesových a Fermatových methodou geometrie. Oni položili základy k analytické geometrii, podřizující jaksi geometrii výpočtu. V téže době ze studia mechanického pohybu se počíná rozvíjet studium proměnných veličin, potřeby geometrie a statiky vedou k vývoji obecných method pro výpočty objemu a pro řešení jiných geometrických úloh, a to vše dává vznik matematické analyse. Modelem spojité veličiny jest úsečka; spojité veličiny se nanášejí na osy souřadnic a jejich vzájemná souvislost se vyjadřuje čarou. Tak prostřednictvím geometrických interpretací vstupuje do matematiky obecný pojem spojitě proměnných veličin a jejich vztahů, jejich funkční závislosti. Ale zároveň se také vyvíjí početní aparát analysy, vycházející z vývoje algebry, která, jak bylo již řečeno, vznikla jako abstraktní výraz číselných výpočtů.

Tak v analyse, v tomto centrálním a nejvýznamnějším oboru matematiky, se sjednotily a vzájemně se podporovaly k dalšímu rozvoji výchozí pojmy čísla a rozměrnosti, aritmetiky a geometrie. Další pokrok analysy šel týmiž cestami, a nový mohutný její vývoj ve tvaru tak zvané funkcionální analysy opět se odehrává na půdě sjednocené algebry a geometrie, ale již ne v jejich elementární formě, nýbrž ve tvaru moderní abstraktní algebry a abstraktní geometrie. Touto poslední je především topologie, t. j. v podstatě nic jiného než obecná nauka o spojitosti.

Současná algebra pak jakožto nauka o operacích má za svůj prototyp, za svůj prvý příklad operace s čísly.

Právě tak i veškerá současná theorie funkcí ve všech svých odvětvích má za svůj základ sjednocení geometrie a algebry.*) A zároveň celý tento pohyb matematiky vpřed byl buzen a konsolidován nerozlučným spojením s přírodními a technickými vědami, odkud matematika čerpala nové problémy a kde našla odůvodnění správnosti svých abstrakcí.

Takto jestliže zachytíme vývoj matematiky celkovým obrazem, vidíme jasně jednotu a boj protikladů vycházejících od základního protikladu dvou forem hmotné skutečnosti — diskretnosti a spojitosti. Vidíme zejména spirálovitý pohyb vpřed matematické nauky o rozměrnosti. Nejprve se vynořuje, zprvu nejasně a nepřesně, pojem geometrického obrazce. Potom Demokritos podřizuje rozměrnost diskretnosti atomů. V dalším toto hledisko ustupuje Eudoxově theorii poměrů, a spojitost nabývá převahy. Později, v novověku, opět vzniká nový atomismus nekonečně malých „nedělitelných" částic rozměrnosti. Později znovu, už na vyšším stupni, vítězí ryzí rozměrnost. Vbrzku však spojité začne se skládat z bodů a na každý obrazec se nazírá jako na množinu bodů. Toto hledisko, pocházející od Cantora, stává se vládnoucím, ale v něm se objevují hluboké potíže, volající po dalším vývoji theorie.

Tak se v matematice plně potvrzují slova V. I. Lenina: „Jednota (shoda, totožnost, rovnost působení) protikladů je podmíněná, dočasná, přechodná, relativní. Boj vzájemně se vylučujících protikladů je absolutní, jako je absolutní vývoj, pohyb."**) Protiklad diskretního a spojitého

*) Za zmínku stojí, že komplexní čísla, vzniklá v algebře, nabyla jasného významu teprve po objevu jejich geometrického znázornění, před nímž zůstávala „pomyslnými". Tato geometrická znázornění spolu s aparátem theorie řad tvoří základ celé obsáhlé theorie funkcí komplexní proměnné.

**) *V. I. Lenin*, Filosofické sešity. Rusky 1947, str. 328. Česky v tomto sešitě, str. 232.

nemůže býti vyhlazen; průběhem staletí byl odstraňován na vyšších a vyšších stupních, ve stále zdokonalovaných pojmech; a matematika vycházejíc z tohoto reálného protikladu bude jej znovu a znovu překonávat na nových stupních, přibližujíc obecně pohyb vědy k poznání pravdy, ke stále přesnějšímu a přesnějšímu odrazu matematickými pojmy reálných forem hmotné skutečnosti.

Omezili jsme se na rozbor jediného páru protikladů, obsažených v základech matematiky. Je však možné vyjmenovat jiné základní protiklady, jejichž boj podporoval a bude podporovat vývoj matematiky. Jsou to protiklady konkretního a abstraktního, obsahového a formálního, hmotné skutečnosti a logické možnosti, konečného a nekonečného... Jednota a boj těchto protikladů mají rovněž v matematice rozhodující úlohu; avšak rozsah tohoto článku dovoluje pouhou zmínku o jejich významnosti.

Rovněž tak se zde můžeme pouze zmínit o tom, že vývoj matematiky se neredukuje jen na její kvantitativní růst, nýbrž vykazuje hluboké kvalitativní změny, podmíněné dlouhým přecházejícím vývojem. Stačí vzpomenout na revoluční kvalitativní změny, ke kterým došlo v matematice při vzniku analysy nekonečně malých nebo v důsledku vybudování neeukleidovské geometrie.

Slovem, při vší své vnější formálnosti, při vší své abstraktnosti, matematika, tak jako vše v přírodě, ve společnosti i v myšlení, se rozvíjí, žije a pohybuje se v nerozlučných souvislostech, s boji protikladů, v jednotě kvantitativních a kvalitativních změn.

Idealismus a metafysika nevidí, nechápou skutečných zdrojů tohoto vývoje a jeho složitosti. Ony znetvořují živou matematiku v náhražky jako „apriorní principy", „formální výpočty", „ideální poznání ideálních objektů" a pod. V poznámce „K otázce o dialektice" V. I. Lenin s geniální jasností a hloubkou odhalil gnoseologické kořeny veškerého idealismu a tím též i „matematického" idealismu. Avšak o těchto kořenech „matematického" idealismu budeme mluvit v následujícím článku.

Doufáme, že celý předchozí výklad přes všecku svou neúplnost už dokazuje, že ideje vyslovené V. I. Leninem ve „Filosofických sešitech" mají přímý vztah k matematice a odkrývají cestu k porozumění jejím hlubokým problémům. Leninovy ideje o rozdvojení jednotného a poznání jeho si odporujících částí, o boji protikladů jako o vývojovém zákonu, o nutnosti prověřit tuto stránku dialektiky historií vědy slouží jako jasný reflektor, osvětlující cestu k pravdě. Hloubka a dosah těchto idejí jsou nevyčerpatelné; ony osvětlují nové a nové problémy, odkrývají podstatu vývoje vědy a odhalují našemu zraku cesty k dalšímu vývoji. Čtyři stránky Leninovy poznámky „K otázce o dialektice" jsou nevyčerpatelné bohatstvím obsahu, jsou správným návodem a vodítkem, jsou mohutným impulsem bádání, nového rozmachu myšlenek, tvůrčí činnosti.

Přeložil *E. Čech*, Praha.