Nina Karlovna Bari; Lazar Aronovich Ljusternik

Práce D. A. Menšova o trigonometrických řadách

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 76 (1951), No. 4, 275--277

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108419

PRÁCE D. A. MENŠOVA O TRIGONOMETRICKÝCH ŘADÁCH

N. K. BARI a L. A. LJUSTERNIK.

(Ruský originál vyšel v časopise Uspěchi matem. nauk, sv. VI, seš. 4 (1951), str. 187 až 189.)

Nejznamenitějšími pracemi v theorii trigonometrických řad, které vznikly v posledním desítiletí, byly práce D. E. Menšova, jejichž cyklus byl v r. 1951 vyznamenán Stalinovou cenou.

O starších pracích D. E. Menšova bylo pojednáno v časopise Uspěchi matěmatičeskich nauk v jubilejním článku při příležitosti 25letého působení D. E. Menšova na moskevské universitě[1]) a v speciální stati, věnované problému jednoznačnosti rozvoje v trigonometrickou řadu.[2])

Theorii trigonometrických řad bylo v první čtvrtině tohoto století věnováno mnoho vynikajících prací. Potom však přišlo delší období, kdy se významné práce neobjevovaly a zdálo se, že tento obor matematiky je vyčerpán. Nový vývoj přinesly poslední práce D. E. Menšova, v kterých byly úplně vyřešeny problémy, položené před 30 lety, které se zdály nedostupné v současné etapě rozvoje theorie. V r. 1940 D. E. Menšov dokázal, že ke každé měřitelné a skoro všude konečné funkci existuje trigonometrická řada, konvergující skoro všude k této funkci. Tento výsledek znamená dosažení cíle, k němuž se přiblížila na př. věta N. N. Luzina: ke každé měřitelné funkci, konečné skoro všude, existuje trigonometrická řada, sčítatelná k této funkci skoro všude methodou Riemannovou a Poissonovou.

Tato věta, dokázaná r. 1915, byla svého času jedním z podstatných úspěchů v theorii trigonometrických řad.

Důkaz zmíněné věty D. E. Menšova spočívá na jednom neméně důležitém a pozoruhodném výsledku téhož autora: dokázal totiž, že libovolnou měřitelnou funkci lze změnit na množině libovolně malé míry tak, že vznikne spojitá funkce, jejíž Fourierova řada konverguje stejnoměrně na celé reálné ose. Tento sám o sobě pozoruhodný výsledek byl v dalším ještě zpřesněn D. E. Menšovem. Podotkněme, že následkem vlastnosti C[3]) stačí provésti změnu u spojitých funkcí (místo měřitelných). V pů-

[1]) Успехи математических наук II (1947), вып. 6 (22).

[2]) Успехи математичесих наук IV (1949), вып. 3 (31).

[3]) Jde o tuto vlastnost (*Luzin*): Vynecháme-li z definičního oboru měřitelné funkce vhodnou množinu libovolně malé míry, bude funkce na zbytku definičního oboru spojitá. — *Pozn. red.*

vodní konstrukci závisela množina, na které se prováděla změna, na povaze vyšetřované funkce. V nové konstrukci D. E. Menšova tato množina závisí pouze na předepsané míře a na modulu spojitosti vyšetřované funkce.[4])

Konečně dokázal D. E. Menšov, že není možno tuto množinu voliti nezávisle též na modulu spojitosti.

Jestliže však poněkud oslabíme předpoklady, požadované na funkci, můžeme dosáhnouti mnohem více volnosti ve výběru vyšetřované množiny. Přesněji: je-li $f(x)$ jakákoliv funkce integrovatelná v $\langle -\pi, \pi \rangle$ (ve smyslu Lebesguově) a je-li P jakákoliv řídká dokonalá množina, je možno změnit funkci $f(x)$ *mimo* množinu P tak, že funkce $\psi(x)$, kterou takto obdržíme, je integrovatelná a má Fourierovu řadu skoro všude konvergentní.

Vraťme se k otázce vyjádření funkce trigonometrickou řadou. Mluvili jsme již o tom, že každou funkci měřitelnou a *konečnou skoro všude* lze, jak ukázal D. E. Menšov, vyjádřiti trigonometrickou řadou, která k ní konverguje skoro všude. D. E. Menšov si vytýčil cíl, objasnit, co lze říci v obecném případě, kdy se předpokládá pouze měřitelnost funkce, připouští se však, že nabývá nekonečných hodnot na množině kladné míry. Tato otázka je patrně spojena s velkými obtížemi. Při nejmenším se v tomto problému sčítací methoda Riemannova a Poissonova chovají zcela různě; neboť jednak plyne ze společné práce N. N. Luzina a J. J. Privalova, že existuje trigonometrická řada, sčítatelná methodou Poissonovou skoro všude k $+\infty$, jednak z výsledků Ju. B. Germejera plyne, že trigonometrická řada nemůže býti sčítatelná methodou Riemannovou k $+\infty$ na množině kladné míry.

Jak je tomu, pokud se týče obyčejné konvergence, je dosud neznámo.

Proto se D. E. Menšov rozhodl studovat, co lze říci o asymptotické konvergenci,[5]) a dostal tento konečný výsledek: Ke každé měřitelné funkci $f(x)$, skoro všude konečné nebo rovné $+\infty$ nebo $-\infty$ na množině kladné míry, existuje trigonometrická řada s koeficienty konvergujícími k nule, která konverguje asymptoticky k $f(x)$ v $\langle -\pi, \pi \rangle$.

Speciálně můžeme sestrojiti trigonometrickou řadu, konvergující asymptoticky k $+\infty$ v $\langle -\pi, \pi \rangle$. Dále, D. E. Menšov si postavil cíl sestrojiti trigonometrickou řadu s předepsaným limsup a liminf částečných součtů.

Dokázal toto: Jsou-li $F(x)$, $G(x)$ dvě měřitelné funkce, je-li $F(x) \leqq$

---

[4]) Vlastně na odhadu shora pro modul spojitosti. Modul spojitosti funkce f, spojité v $\langle a, b \rangle$, je funkce ω, definovaná pro $\delta > 0$ rovnicí

$$\omega(\delta) = \max_{\substack{x, y \in \langle a, b \rangle \\ |x - y| \leqq \delta}} |f(x) - f(y)|.$$

Pozn. red.

[5]) Сходимость по мере. *Pozn. red.*

$\leqq G(x)$ skoro všude v $\langle -\pi, \pi \rangle$ a jsou-li buďto obě funkce konečné skoro všude, nebo je-li $G(x) = -\infty$, $F(x) = +\infty$ skoro všude, potom existuje taková trigonometrická řada, že skoro všude je

$$\liminf_{n\to\infty} S_n(x) = G(x), \quad \limsup_{n\to\infty} S_n(x) = F(x)$$

(kde $S_n(x)$ je součet prvních n členů řady).

Tato věta má již neobyčejně obecný charakter. Dostaneme ji jako důsledek následující velmi pozoruhodné věty, týkající se již řad Fourier-Lebesguových:

Je-li $\varphi(x) \geqq 0$ měřitelná funkce (která může nabývati i hodnoty $+\infty$ na množině kladné míry), potom existuje integrovatelná funkce $f(x)$ tak, že

$$\liminf_{n\to\infty} S_n(x) = f(x) - \varphi(x),$$
$$\limsup_{n\to\infty} S_n(x) = f(x) + \varphi(x)$$

skoro všude v $\langle -\pi, \pi \rangle$ ($S_n(x)$ značí částečné součty Fourierovy řady funkce $f(x)$).

Tento výsledek D. E. Menšova je zostřením známého příkladu A. N. Kolmogorova, v němž je sestrojena Fourierova řada skoro všude divergentní.

Z ostatních výsledků D. E. Menšova, týkajících se konvergence a divergence trigonometrických řad, připomeňme tyto: Jak známo, sestrojil N. N. Luzin r. 1911 první příklad trigonometrické řady, jejíž koeficienty konvergují k nule a která diverguje skoro všude. D. E. Menšov podstatně doplnil tento výsledek, sestrojiv trigonometrickou řadu s koeficienty konvergujícími k nule, u které každá vybraná posloupnost částečných součtů diverguje skoro všude.

Dokázal také, že každou trigonometrickou řadu lze vyjádřiti jako součet dvou „universálních" řad, t. j. takových, které mají tuto vlastnost: Ke každé měřitelné funkci existuje vybraná posloupnost částečných součtů, konvergující skoro všude k této funkci.

D. E. Menšov podrobil prohloubenému studiu Fourierovy řady spojitých funkcí. Bylo známo, že tyto řady mohou divergovati i v nespočetné množině bodů; avšak všechny řady tohoto typu měly stejnoměrně konvergující vybranou posloupnost částečných součtů. D. E. Menšov dokázal, že existují spojité funkce, v jejichž Fourierově řadě každá vybraná posloupnost částečných součtů diverguje aspoň v jednom bodě; přes to však lze každou spojitou funkci vyjádřiti součtem dvou spojitých funkcí tak, že Fourierova řada každého z obou sčítanců obsahuje stejnoměrně konvergentní vybranou posloupnost částečných součtů.

Práce D. E. Menšova o trigonometrických řadách jsou důstojným dovršením pracovního zaměření moskevské školy nauky o funkcích, které bylo zahájeno před 40 lety proslulými pracemi N. N. Luzina.

Přeložil *V. Jarník*, Praha.