František Štěpánek

Замечание о произведении рядов Лейбница

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 92 (1967), No. 3, 351--355

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108396`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 92 (1967), Praha

ЗАМЕЧАНИЕ О ПРОИЗВЕДЕНИИ РЯДОВ ЛЕЙБНИЦА

František Štěpánek (Франтишек Штепанек), Прага

(Поступило в редакцию 30/V 1966 г.)

Определение 1. Рядом Лейбница называем бесконечный ряд вида $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n c_n$, где $c_n \geqq c_{n+1} > 0$ для $n = 0, 1, \ldots$ и $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$.

Очевидно, всякий ряд Лейбница сходится.

В. Демидович в работе [2] привел новое элегантное доказательство следующей классической теоремы, доказанной впервые Г. Прингсхеймом (G. Pringsheim) в 1883 году.

Теорема 1. *Пусть* $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \alpha_n$, $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \beta_n$ – *два ряда Лейдница и пусть сходится ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \beta_n . \tag{1}$$

Тогда сходится ряд $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n (\alpha_0\beta_n + \alpha_1\beta_{n-1} + \ldots + \alpha_n\beta_0)$, *т.е. произведение рядов* $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \alpha_n$, $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \beta_n$ *по правилу Коши.*

Легко убедимся (см. впрочем [2]), что из предположений теоремы 1 следует непосредственно

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha_0\beta_n + \alpha_1\beta_{n-1} + \ldots + \alpha_n\beta_0) = 0 . \tag{2}$$

Дальше показывается, что условие (1) в тексте теоремы 1 можно даже прямо заменить условием (2). Именно справедлива следующая более общая теорема, происходящая тоже от Г. Прингсхейма.

Теорема 2. *Пусть* $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \alpha_n$, $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \beta_n$ – *два ряда Лейдница; пусть конкретно* $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \alpha_n = r$, $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \beta_n = s$. *Пусть ещё выполняется* (2). *Тогда* $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n (\alpha_0\beta_n + \alpha_1\beta_{n-1} + \ldots + \alpha_n\beta_0) = rs$.

Г. Х. Харди (G. H. Hardy) упростил в 1908 году оригинальное доказательство теоремы 2, данное Прингсхеймом. Это доказательство Харди приведено в [1], стр. 94–95, где цитирована дальнейшая литература и где тоже (на стр. 102, упражнение 19) детально исследована роль условия (1).

Цель настоящего замечания – показать, что теорема 2 является и прямым следствием двух элементарных теорем (см. дальше теорему А и теорему В) из теории расходящихся рядов.

Прежде всего введем ещё одно общее определение.

Определение 2. Пусть $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ – ряд вещественных чисел; положим $s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, $t_n = (n+1)^{-1} \sum_{k=0}^{n} s_k$, $n = 0, 1, \ldots$ Если $\lim_{n\to\infty} t_n = u \in E_1$ то говорим, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ суммируется методом средних арифметических (методом $(C, 1)$) к сумме u; в этом случае пишем $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = u$ $(C, 1)$.

Теорема А. *Пусть $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ – два сходящихся ряда вещественных чисел; пусть $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = b$. Тогда $\sum_{n=0}^{\infty} (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0) = ab(C, 1)$.*

Доказательство. См. [3], стр. 104, теорема 41.

Теорема В. *Пусть $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = u(C, 1)$ и пусть*

$$\lim_{n\to\infty} n \sum_{k=n}^{\infty} u_k/k = 0\,. \tag{3}$$

Тогда $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = u$.

Доказательство. Имеем $s_n - t_n = (n+1)^{-1} \sum_{k=0}^{n} k u_k$, $n = 0, 1, \ldots$ Итак, достаточно доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} k u_k = 0\,. \tag{4}$$

Положим теперь для простоты $z_n = \sum_{k=n}^{\infty} k^{-1} u_k$, $n = 1, 2, \ldots$; следовательно, вместо (3) можно писать

$$\lim_{n\to\infty} n z_n = 0\,. \tag{3'}$$

Для $n = 2, 3, \ldots$ получаем тогда

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} k u_k = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} k^2 (z_k - z_{k+1}) =$$

$$= \frac{1}{n+1} \left(\sum_{k=1}^{n} k^2 z_k - \sum_{k=2}^{n+1} (k-1)^2 z_k \right) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=2}^{n} (2k-1) z_k +$$

$$+ \frac{z_1}{n+1} - \left(\frac{n}{n+1} \right)^2 (n+1) z_{n+1}$$

и отсюда уже легко вытекает (4) при помощи (3'). Доказательство теоремы B закончено.

Доказательство теоремы 2. Прежде всего положим для краткости $\alpha_0 \beta_n + \alpha_1 \beta_{n-1} + \ldots + \alpha_n \beta_0 = \gamma_n$ для $n = 0, 1, \ldots$ Из теоремы A следует, что $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \gamma_n = rs$ $(C, 1)$. Далее для произвольных $j, n = 0, 1, \ldots$ имеем $\gamma_n \geqq \gamma_{n+1} - \alpha_j \beta_{n+1-j}$ и, следовательно, $(n + 1) \gamma_n \geqq n \gamma_{n+1}$. Итак, принимая во внимание (2), получаем, что бесконечный ряд $2\gamma_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^{-1} \gamma_n$ является рядом Лейбница. Но тогда очевидно, что

$$\left| n \sum_{k=n}^{\infty} (-1)^k \frac{\gamma_k}{k} \right| \leqq \gamma_n, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{5}$$

Если теперь положим в теореме B $u_n = (-1)^n \gamma_n$, $n = 0, 1, \ldots$, то выполнены все предположения этой теоремы, так как (3) вытекает непосредственно из (2) и (5). Имеем, следовательно, $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \gamma_n = rs$, что и требовалось доказать.

Литература

[1] *T. J. Bromwich:* An Introduction to the Theory of Infinite Series. London 1926.

[2] *B. Демидович:* О произведении рядов Лейбница. Čas. pro pěst. mat. *90* (1965), 471—473.

[3] *V. Jarník:* Diferenciální počet II. Praha 1956.

Адресс автора: Praha 8 - Karlín, Sokolovská 83 (Matematicko-fyzikální fakulta KU).

Výtah

POZNÁMKA O SOUČINU LEIBNIZOVÝCH ŘAD

FRANTIŠEK ŠTĚPÁNEK, Praha

Leibnizovou řadou nazýváme nekonečnou řadu $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n c_n$, kde $c_n \geqq c_{n+1} > 0$ pro $n = 0, 1, \ldots$ a $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$. G. Pringsheim dokázal r. 1883 následující větu o součinu Leibnizových řad.

Věta. *Nechť $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \alpha_n$ a $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \beta_n$ jsou dvě Leibnizovy řady, nechť $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \alpha_n = r$, $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \beta_n = s$. Jestliže dále platí (2), potom $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n (\alpha_0\beta_n + \alpha_1\beta_{n-1} + \ldots + \alpha_n\beta_0) = rs$.*

V této poznámce je ukázáno, že zmíněná Pringsheimova věta je jednoduchým důsledkem dvou následujících elementárních vět z teorie divergentních řad.

Věta A. *Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ jsou dvě konvergentní řady (reálných) čísel, nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = b$. Potom řada $\sum_{n=0}^{\infty}(a_0b_n + a_1b_{n-1} + \ldots + a_nb_0)$ je sčítatelná metodou aritmetických průměrů (metoda $(C, 1)$) k součtu ab.*

Věta B. *Jestliže řada $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ je sčítatelná metodou aritmetických průměrů k součtu u a jestliže dále platí (3), potom $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = u$.*

Summary

A NOTE ON THE PRODUCT OF LEIBNIZ SERIES

FRANTIŠEK ŠTĚPÁNEK, Praha

By a Leibniz series we understand an infinite series $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n c_n$, where $c_n \geqq c_{n+1} > 0$ for $n = 0, 1, \ldots$ and $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$. In 1883 G. Pringsheim proved the following theorem on the product of Leibniz series.

Theorem. Let $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \alpha_n$ and $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \beta_n$ be two Leibniz series, let $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \alpha_n = r$, $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \beta_n = s$. If further (2) holds, then $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n (\alpha_0\beta_n + \alpha_1\beta_{n-1} + \ldots + \alpha_n\beta_0) = = rs$.

In the present note the author points out that this Pringsheim's theorem is a simple corollary of the two following elementary theorems from the theory of divergent series.

Theorem A. Let $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ and $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ be two convergent series of (real) numbers, let $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = b$. Then the series $\sum_{n=0}^{\infty}(a_0b_n + a_1b_{n-1} + \ldots + a_nb_0)$ is summable by the method of arithmetic means (method (C, 1)) to the sum ab.

Theorem B. If the series $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ is summable by the method of arithmetic means to the sum u and if further (3) holds, then $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = u$.