Ivan Kiguradze

Заметка о колеблемости решений уравнения $u'' + a(t)|u|^n \operatorname{sgn} u = 0$

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 92 (1967), No. 3, 343--350

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108395`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 92 (1967), Praha

ЗАМЕТКА О КОЛЕБЛЕМОСТИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ $u'' + a(t)\,|u|^n \operatorname{sgn} u = 0$

И. Т. КИГУРАДЗЕ, Тбилиси

(Поступило в редакцию 4/IV 1966 г.)

Рассмотрим уравнение

$$u'' + a(t)\,|u|^n \operatorname{sgn} u = 0\,, \tag{1}$$

где $n > 1$, а функция $a(t)$ – суммируема на каждом конечном отрезке положительной полуоси.

Решение $u(t)$ уравнения (1) называется продолжаемым, если оно определено на некотором бесконечном промежутке $[t_0, \infty)$ и называется непродолжаемым, если оно определено на некотором конечном промежутке $[t_0, t_1)$ и $\limsup\limits_{t\to t_1} |u(t)| = \infty$.

Продолжаемое решение $u(t)$ уравнения (1) называется колеблющимся если оно имеет бесконечное множество нулей, а в противном случае – неколеблющимся.

Ф. В. Аткинсоном [1] доказано, что если $a(t) \geqq 0$, то для колеблемости всех продолжаемых решений уравнения (I) необходимо и достаточно, чтобы $\int_0^\infty t\, a(t)\, \mathrm{d}t = \infty$.

В настоящей заметке мы рассматриваем случай, когда функция $a(t)$ – знакопеременная. Ранее этот случай был исследован П. Уолтменом [2], который показал, что для колеблемости всех продолжаемых решений уравнения (I) достаточно условие $\int_0^\infty a(t)\, \mathrm{d}t = \infty$.

Оказывается, что имеет место следующая

Теорема 1. *Если для некоторой положительной, непрерывной и вогнутой функции $\varphi(t)$ соблюдается условие*

$$\int_0^\infty \varphi(t)\, a(t)\, \mathrm{d}t = \infty\,, \tag{2}$$

то все продолжаемые решения уравнения (1) *– колеблющиеся.*

Доказательство. Заметим прежде всего, что $\varphi(t)$, как непрерывная вогнутая функция, является абсолютно непрерывной,

$$\varphi'(t) \geqq 0 \quad \text{при} \quad t \geqq 0 \tag{3}$$

и $\varphi'(t)$ не возрастает.

Допустим теперь, что уравнение (1) обладает неколеблющимся продолжаемым решением $u(t)$. Без ограничения общности можем считать, что

$$u(t) > 0 \quad \text{при} \quad t \geqq t_0 . \tag{4}$$

Ясно, что

$$\varphi(t) \frac{u'(t)}{u^n(t)} - \int_{t_0}^{t} \varphi'(\tau) \frac{u'(\tau)}{u^n(\tau)} \mathrm{d}\tau + n \int_{t_0}^{t} \varphi(\tau) \frac{u'^2(\tau)}{u^{n+1}(\tau)} \mathrm{d}\tau = \tag{5}$$

$$= \varphi(t_0) \frac{u'(t_0)}{u^n(t_0)} - \int_{t_0}^{t} \varphi(\tau)\, a(\tau)\, \mathrm{d}\tau .$$

Согласно второй теореме о среднем значении, отсюда получаем

$$\varphi(t) \frac{u'(t)}{u^n(t)} + \frac{\varphi'(t_0)}{n-1} u^{1-n}(\xi) + n \int_{t_0}^{t} \varphi(\tau) \frac{u'^2(\tau)}{u^{n+1}(\tau)} \mathrm{d}\tau = \tag{6}$$

$$= c_0 - \int_{t_0}^{t} \varphi(\tau)\, a(\tau)\, \mathrm{d}\tau ,$$

где

$$c_0 = \varphi(t_0) \frac{u'(t_0)}{u^n(t_0)} + \frac{\varphi'(t_0)}{n-1} u^{1-n}(t_0), \quad t_0 \leqq \xi \leqq t .$$

Согласно (2) найдется такое число t_1, $t_0 \leqq t_1 < \infty$, что

$$c_0 - \int_{t_0}^{t} \varphi(\tau)\, a(\tau)\, \mathrm{d}\tau \leqq -1 \quad \text{при} \quad t \geqq t_1 . \tag{7}$$

Согласно (3) и (7) из (6) имеем

$$\varphi(t) \frac{u'(t)}{u^n(t)} + n \int_{t_1}^{t} \varphi(\tau) \frac{u'^2(\tau)}{u^{n+1}(\tau)} \mathrm{d}\tau \leqq -1 \quad \text{при} \quad t \geqq t_1 . \tag{8}$$

Следовательно,

$$u'(t) < 0 \quad \text{при} \quad t \geqq t_1 . \tag{9}$$

Поэтому неравенству (8) можно придать следующий вид

$$\varphi(t)\,\frac{|u'(t)|}{u^n(t)} \geqq 1 + n\int_{t_1}^{t} \varphi(\tau)\,\frac{u'^2(\tau)}{u^{n+1}(\tau)}\,\mathrm{d}\tau \quad \text{при } t \geqq t_1\,. \tag{10}$$

Умножая обе части неравенства (10) на

$$n\,\frac{|u'(t)|}{u(t)}\left(1 + \int_{t_1}^{t} \varphi(\tau)\,\frac{u'^2(\tau)}{u^{n+1}(\tau)}\,\mathrm{d}\tau\right)^{-1}$$

и интегрируя от t_1 до t, найдем

$$\ln\left(1 + n\int_{t_1}^{t} \varphi(\tau)\,\frac{u'^2(\tau)}{u^{n+1}(\tau)}\,\mathrm{d}\tau\right) \geqq n\int_{t_1}^{t} \frac{|u'(\tau)|}{u(\tau)}\,\mathrm{d}\tau \quad \text{при} \quad t \geqq t_1\,.$$

Отсюда, согласно (9) и (10), получаем

$$-\varphi(t)\,\frac{u'(t)}{u^n(t)} \geqq \frac{u^n(t_1)}{u^n(t)} \quad \text{при} \quad t \geqq t_1\,.$$

Следовательно,

$$u'(t) \leqq -\frac{u^n(t_1)}{\varphi(t)} \quad \text{при} \quad t \geqq t_1\,. \tag{11}$$

Так как $\varphi(t) \leqq \delta t$ при $t \geqq t_1$, где $\delta > 0$, поэтому, из (11) находим

$$u(t) \leqq u(t_1) - \delta\, u^n(t_1) \ln\frac{t}{t_1} \to -\infty \quad \text{при} \quad t \to \infty\,,$$

что противоречит условию (4). Полученное противоречие доказывает теорему.

Из доказанной теоремы непосредственно получается такое

Следствие. *Если*

$$\int_0^\infty a(t)\,t^\alpha\,\mathrm{d}t = \infty\,, \tag{12}$$

где $0 \leqq \alpha \leqq 1$, *то все продолжаемые решения уравнения* (I) — *колеблющиеся.*

При $\alpha = 1$ и $\alpha = 0$ из условия (12), соответственно, получаются упомянутые выше условия Аткинсона и Уолтмена.

Замечание. Если $a(t) \geqq 0$ и условие (12) соблюдается при некотором $\alpha < 1$, то оно соблюдается и при $\alpha = 1$. Когда $a(t)$ знакопеременная функция, что этот факт не имеет места. В самом деле, пусть $a(t) = (1 - \gamma)\, t^{-1-\gamma} + 2t^{-\gamma} \sin t$ где $0 \leqq \gamma < 1$. Тогда

$$\int_{t_0}^{t} \tau^{\gamma}\, a(\tau)\, \mathrm{d}\tau = c_1 + (1 - \gamma) \ln t - 2 \cos t \to \infty \quad \text{при} \quad t \to \infty\,.$$

С другой стороны, так как

$$\int_{t_0}^{t} \tau\, a(\tau)\, \mathrm{d}\tau = c_2 + t^{1-\gamma} - 2t^{1-\gamma} \cos t + 2(1 - \gamma)\, t^{-\gamma} \sin t + \\ + 2\gamma(1 - \gamma) \int_{t_0}^{t} \tau^{-1-\gamma} \sin \tau\, \mathrm{d}\tau\,,$$

поэтому имеем

$$\limsup_{t \to \infty} \int_{t_0}^{t} \tau\, a(\tau)\, \mathrm{d}\tau = \infty\,, \quad \liminf_{t \to \infty} \int_{t_0}^{t} \tau\, a(\tau)\, \mathrm{d}\tau = -\infty\,.$$

Следовательно, условие (12) соблюдается при $\alpha = \gamma$, но не соблюдается при $\alpha = 1$.

В работе [3] доказывается, что если

$$(13) \qquad \int_{0}^{\infty} t|a(t)|\, \mathrm{d}t < \infty\,,$$

то уравнение (1) имеет неколеблющиеся продолжаемые решения. С учетом этого легко докажем справедливость следующего утверждения

Теорема 2. *Пусть* $a(t) = b(t) + \beta(t)$, *где*

$$(14) \qquad b(t) \geqq 0 \quad \text{при} \quad t \geqq 0 \quad \text{и} \quad \int_{0}^{\infty} t|\beta(t)|\, \mathrm{d}t < \infty\,.$$

Тогда для колеблемости всех продолжаемых решений уравнения (I) *необходимо и достаточно, чтобы*

$$(15) \qquad \int_{0}^{\infty} t\, b(t)\, \mathrm{d}t = \infty\,.$$

Доказательство. Если соблюдается условие (15), то, согласно (14), будем иметь $\int_0^\infty t\, a(t)\, \mathrm{d}t = \infty$. Поэтому, согласно следствия теоремы 1, все продолжаемые решения уравнения (1) будут колеблющиеся.

Если же $\int_0^\infty t\, b(t)\, \mathrm{d}t < \infty$, то, в силу (14), соблюдается (13) и следовательно, как уже отметили выше, уравнение (1) будет иметь неколеблющиеся продолжаемые решения. Теорема доказана.

Естественно, возникает вопрос — при каких ограничениях наложенных на функцию $a(t)$ имеет уравнение (1) продолжаемые решения. На этот вопрос частично отвечает следующая

Теорема 3. *Если* $a(t) = b(t) + \beta(t)$, *где* $b(t)$ — *абсолютно непрерывная положительная функция, а* $\beta(t)$ *удовлетворяет условию*

$$\int_0^\infty \frac{|\beta(t)|}{\sqrt{b(t)}} \exp\left[\frac{n-1}{n+1}\int_0^t \frac{b'_-(\tau)}{b(\tau)}\,\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}t < \infty\,, \tag{16}$$

где $b'_-(t) = \frac{1}{2}(|b'(t)| - b'(t))$, *то уравнение* (I) *имеет продолжаемые решения.*

Доказательство. Согласно (16) ясно, что

$$\int_0^\infty \frac{|\beta(t)|}{\sqrt{b(t)}} \exp\left[\frac{n-1}{n+1}\int_0^t \left(\frac{b'_-(\tau)}{b(\tau)} + \frac{|\beta(\tau)|}{\sqrt{b(\tau)}}\right)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}\tau = M < \infty\,. \tag{17}$$

Покажем, что любое решение $u(t)$ уравнения (1), которое удовлетворяет условию

$$\varrho^{(1-n)/(1+n)}(0) - \frac{n^2(n-1)}{n+1}\,M = \delta > 0\,, \tag{18}$$

где

$$\varrho(t) = \left[\frac{u'^2(t)}{b(t)} + \frac{2}{n+1}\,|u(t)|^{n+1}\right]\exp\left[-\int_0^t\left(\frac{b'_-(\tau)}{b(\tau)} + \frac{|\beta(\tau)|}{\sqrt{b(\tau)}}\right)\mathrm{d}\tau\right], \tag{19}$$

будет продолжаемым. Допустим противное. Тогда найдется такое число t_0, $0 < t_0 < \infty$, что $\varrho(t)$ будет абсолютно непрерывной функцией внутри промежутка $[0, t_0)$ и

$$\lim_{t\to t_0} \varrho(t) = \infty\,. \tag{20}$$

Из (19) имеем

$$\varrho'(t) = -\left[\frac{b'_-(t)}{b(t)} + \frac{|\beta(t)|}{\sqrt{b(t)}}\right]\varrho(t) + \tag{21}$$

$$+\left[-\frac{b'(t)}{b^2(t)}\,u'^2(t) - \frac{2\beta(t)}{b(t)}\,u'(t)\,|u(t)|^n\,\operatorname{sgn} u(t)\right]\exp\left[-\int_0^t\left(\frac{b'_-(\tau)}{b(\tau)} + \frac{|\beta(\tau)|}{\sqrt{b(\tau)}}\right)\mathrm{d}\tau\right].$$

Так как $-b'(t) \leqq b'_-(t)$ и

$$2\,\frac{|\beta(t)|}{b(t)}\,|u'(t)|\,|u(t)|^n \leqq \frac{|\beta(t)|}{\sqrt{b(t)}}\,\frac{u'^2(t)}{b(t)} + \frac{|\beta(t)|}{\sqrt{b(t)}}\,|u(t)|^{2n}\,,$$

поэтому, согласно (19), из (21) найдем

$$\varrho'(t) \leqq -\left[\frac{b'_-(t)}{b(t)} + \frac{|\beta(t)|}{\sqrt{b(t)}}\right]\varrho(t) +$$

$$+\left[\frac{b'_-(t)}{b(t)} + \frac{|\beta(t)|}{\sqrt{b(t)}}\right]\frac{u'^2(t)}{b(t)}\exp\left[-\int_0^t\left(\frac{b'_-(\tau)}{b(\tau)} + \frac{|\beta(\tau)|}{\sqrt{b(\tau)}}\right)d\tau\right] +$$

$$+\frac{|\beta(t)|}{\sqrt{b(t)}}|u(t)|^{2n}\exp\left[-\int_0^t\left(\frac{b'_-(\tau)}{b(\tau)} + \frac{|\beta(\tau)|}{\sqrt{b(\tau)}}\right)d\tau\right] \leqq$$

$$\leqq n^2\frac{|\beta(t)|}{\sqrt{b(t)}}\exp\left[\frac{n-1}{n+1}\int_0^t\left(\frac{b'_-(\tau)}{b(\tau)} + \frac{|\beta(\tau)|}{\sqrt{b(\tau)}}\right)d\tau\right]\varrho^{2n/(n+1)}(t)\,.$$

Следовательно,

$$\varrho'(t)\,\varrho^{-2n/(n+1)}(t) \leqq n^2\frac{|\beta(t)|}{\sqrt{b(t)}}\exp\left[\frac{n-1}{n+1}\int_0^t\left(\frac{b'_-(\tau)}{b(\tau)} + \frac{|\beta(\tau)|}{\sqrt{b(\tau)}}\right)d\tau\right] \quad \text{при} \quad 0 \leqq t < t_0\,.$$

Интегрирование этого неравенства дает

$$\varrho^{(1-n)/(1+n)}(0) - \varrho^{(1-n)/(1+n)}(t) \leqq \frac{n^2(n-1)}{n+1}M \quad \text{при} \quad 0 \leqq t < t_0\,.$$

Отсюда, согласно (18), получаем

$$\varrho(t) \leqq \delta^{(n+1)/(1-n)} \quad \text{при} \quad 0 \leqq t < t_0\,,$$

что противоречит условию (20). Полученное противоречие доказывает, что $u(t)$ является продолжаемым решением. Теорема доказана.

Замечание. Из доказательства теоремы ясно, что если $a(t) \equiv b(t)$, то все решения уравнения (1) — продолжаемы. Если же $a(t)$ знакопеременная функция, то уравнение (1) наряду с продолжаемыми решениями имеет и непродолжаемые решения. В самом деле, пусть

$$a(t) < 0 \quad \text{при} \quad t_1 \leqq t \leqq t_2\,. \tag{22}$$

Подстановка

$$x = \frac{1}{t_2 - t}, \quad u(t) = x^{-1}\,W(x) \tag{23}$$

преобразует уравнение (1) в уравнение

$$W'' = A(x)\,|W|^n \operatorname{sgn} W, \tag{24}$$

где $A(x) = -(t_2 - t)^{n+3} a(t)$. Из (22) ясно, что

$$A(x) > 0 \quad \text{при} \quad x_0 \leqq x < \infty, \tag{25}$$

где $x_0 = 1/(t_2 - t_1)$. Но как это доказывается в работе [4] (см. [4], теорема 1), уравнение (24) при условии (25) имеет непродолжаемые решения. Пусть $W(x)$ – решение уравнения (24) определенное на некотором конечном отрезке $[x_0, x_1]$ и удовлетворяющее условию $\lim_{x \to x_1} |W(x)| = \infty$. Тогда для решения $u(t)$ уравнения (1) определенным формулами (23) будем иметь $\lim_{t \to t_0} |u(t)| = \infty$, где $t_0 = t_2 - x_1^{-1}$. Следовательно, $u(t)$ является непродолжаемым решением уравнения (I).

Литература

[1] *F. V. Atkinson:* On second-order non-linear oscillations. Pacif. J. Math. *5* (1955), 643–647.

[2] *P. Waltman:* An oscillation criterion for a nonlinear second order equation. J. Math. Analysis and Applic. *10* (1965), 2, 439–441.

[3] *И. Т. Кигурадзе:* О колеблемости решений уравнения $d^m u/dt^m + a(t)\,|u|^n \operatorname{sgn} u = 0$. Матем. сборник. *65* (1964), 2. 172–187.

[4] *И. Т. Кигурадзе:* Асимптотические свойства решений одного нелинейного дифференциального уравнения типа Эмдена-Фаулера. Изв. АН СССР, серия математическая, *29* (1965), 5, 965–986.

Адрес автора: Тбилиси, СССР (Математический институт им. А. М. Размадзе АН Грузинской ССР).

Výtah

O OSCILACÍCH ŘEŠENÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE $u'' + a(t)|u|^n \operatorname{sgn} u = 0$

I. KIGURADZE (И. Т. Кигурадзе), Tbilisi

V této poznámce se vyšetřuje diferenciální rovnice

$$u'' + a(t)\,|u|^n \operatorname{sgn} u = 0 \tag{1}$$

kde $n > 1$ a funkce $a(t)$ je v každém konečném intervalu $[0, t_0]$ integrovatelná. Jsou dokázány tyto věty:

Věta 1. *Buď* $\int_0^\infty \varphi(\tau)\, a(\tau)\, d(\tau) = \infty$ *kde* $\varphi(t)$ *je daná kladná spojitá konkávní funkce. Pak je každé, v nekonečném intervalu určené řešení diferenciální rovnice* (1) *oscilující.*

Věta 2. *Buď* $a(t) = b(t) + \beta(t)$, *kde* $b(t) \geqq 0$ *a* $\int_0^\infty t\,|\beta(t)|\,\mathrm{d}t < \infty$. *Pak nutná a postačující podmínka proto, aby každé řešení diferenciální rovnice* (1), *které je určené na nekonečném intervalu, bylo oscilující je* $\int_0^\infty t\,b(t)\,\mathrm{d}t = \infty$.

V poznámce jsou dány také podmínky, které zaručují existenci řešení diferenciální rovnice (1), určeného na nekonečném intervalu.

Zusammenfasung

ÜBER DIE OSZILLATION DER LÖSUNGEN DER DIFFERENTIALGLEICHUNG $u'' + a(t)|u|^n \operatorname{sgn} u = 0$

I. Kiguradze (И. Т. Кигурадзе), Tbilisi

In dieser Bemerkung wird die Differentialgleichung

$$u'' + a(t)\,|u|^n \operatorname{sgn} u = 0 \tag{1}$$

behandelt, wo $n > 1$ und die Funktion $a(t)$ in jedem endlichen Intervall $[0, t_0]$ summierbar ist. Es werden folgende Sätze bewiesen:

Satz 1. *Es sei* $\int_0^\infty \varphi(\tau)\,a(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \infty$, *wo* $\varphi(t)$ *eine bestimmte, positive, stetige, konkave Funktion ist. Dann ist jede in einem unendlichen Intervalle bestimmte Lösung der Differentialgleichung* (1) *oszillierend.*

Satz 2. *Es sei* $a(t) = b(t) + \beta(t)$ *mit* $b(t) \geqq 0$ *und* $\int_0^\infty t\,|\beta(t)|\,\mathrm{d}t < \infty$. *Dann, dafür, daß jede in einem unendlichen Intervalle bestimmte Lösung der Differentialgleichung* (1) *oszillierend ist, ist notwendig und hinreichend, daß* $\int_0^\infty t\,b(t)\,\mathrm{d}t = \infty$.

In der Bemerkung werden auch Bedingungen, die die Existenz einer in einem unendlichen Intervalle bestimmten Lösung der Differentialgleichung (1) sichern, festgestellt.