Časopis pro pěstování matematiky

Nikolaj Podtjagin

Eště o jednej triede racionálnych kriviek

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 92 (1967), No. 3, 294--312

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108390`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 92 (1967), Praha

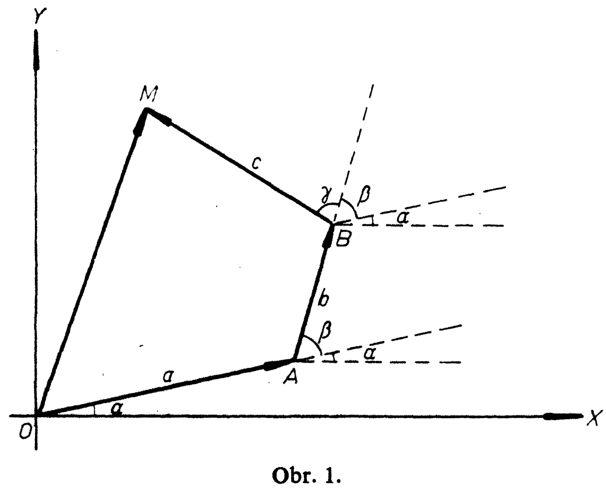
EŠTE O JEDNEJ TRIEDE RACIONÁLNYCH KRIVIEK

NIKOLAJ PODTJAGIN, Bratislava

(Došlo dňa 27. januára 1966)

Cieľom tohoto článku je zovšeobecniť výsledky, ku ktorým dospel autor vo svojom predchádzajúcom článku [1]. Použitím rovnakej metódy sa v ňom dokazuje, že všetky epiepicykloidy, epihypocykloidy, hypoepicykloidy a hypohypocykloidy, pokiaľ sú uzavreté, sú racionálne krivky. Ich stupeň sa dá určiť jediným, pre všetky tieto krivky spoločným vzorcom.

1. Parametrické rovnice kriviek triedy PP. Východiskom našich úvah je nasledujúca úloha: Úsečka OA sa rovnomerne otáčka pkolo bodu O. Druhá účseka AB



Obr. 1.

sa rovnomerne otáča okolo pohyblivého konca A prvej úsečky OA. Tretia úsečka BM sa rovnomerne otáča okolo konca B úsečky AB. Treba určiť krivku, ktorú pri tomto zloženom pohybe opisuje koniec M úsečky BM (obr. 1).

Tie hľadané krivky, ktoré sú uzavreté, považujme za prvky istej množiny, ktorú pre stručnosť nazveme triedou PP.

V ďalšom budeme písmenami a, b, c označovať samotné úsečky OA, AB, BM i ich dĺžky.

Zo samotnej definície kriviek triedy PP vyplývajú tieto ich vlastnosti:

1) krivka môže prechádzať pevným bodom O len vtedy, keď dĺžky úsečiek a, b, c vyhovujú podmienkam

$$\mathrm{a} \leqq \mathrm{b} + \mathrm{c}, \quad \mathrm{b} \leqq \mathrm{a} + \mathrm{c}, \quad c \leqq \mathrm{a} + \mathrm{b},$$

2) vzdialenosť bodov každej krivky od pevného bodu O nie je väčšia ako a + b + c.

Pri určovaní rovníc kriviek triedy PP postupujme takto: Zvoľme pevný bod O za počiatok pravouhlej súradnicovej sústavy XY a predpokladajme, že v okamihu začatia pohybu body A, B, M ležali na osi X, pričom bod A sa nachádzal medzi bodmi O a B a bod B sa nachádzal medzi bodmi A a M. Predpokladajme ďalej, že za istý čas t sa úsečka a pootočila o uhol α, úsečka b o uhol β vzhľadom na úsečku a, teda o uhol $\alpha + \beta$ vzhľadom na súradnicovú sústavu a úsečka c o uhol γ vzhľadom na úsečku b, teda o uhol $\alpha + \beta + \gamma$ vzhľadom na súradnicovú sústavu. Ak premitneme vektory $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{OM}$ do súradnicových osí, dostaneme rovnice

$$\begin{aligned} (1) \qquad x &= \mathrm{a} \,.\, \cos \alpha + \mathrm{b} \,.\, \cos(\alpha + \beta) + \mathrm{c} \,.\, \cos(\alpha + \beta + \gamma), \\ y &= \mathrm{a} \,.\, \sin \alpha + \mathrm{b} \,.\, \sin(\alpha + \beta) + \mathrm{c} \,.\, \sin(\alpha + \beta + \gamma), \end{aligned}$$

kde x a y sú súradnice bodu M v čase t.

Označme v uhlovú rychlosť otáčania sa úsečky a, v' uhlovú rýchlosť otáčania sa úsečky b vzhľadom na úsečku a, v'' uhlovú rýchlosť otáčania sa úsečky c vzhľadom na úsečku b. Vzhľadom na súradnicovú sústavu uhlové rýchlosti otáčania sa úsečiek a, b, c postupne budú v, $v + v'$, $v + v' + v''$. Z rovníc

$$\alpha = v \,.\, t, \quad \beta = v' \,.\, t, \quad \gamma = v'' \,.\, t$$

potom dostaneme

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{v'}{v}, \quad \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{v''}{v}.$$

Ak teraz pomer rýchlostí v'/v označíme písmenom m a pomer rýchlostí v''/v zasa písmenom m', rovnice (1) môžeme písať v tvare

$$\begin{aligned} (2) \qquad x &= a \,.\, \cos \alpha + \mathrm{b} \,.\, \cos(1 + m)\,\alpha + \mathrm{c} \,.\, \cos(1 + m + m')\,\alpha, \\ y &= a \,.\, \sin \alpha + \mathrm{b} \,.\, \sin(1 + m)\,\alpha + \mathrm{c} \,.\, \sin(1 + m + m')\,\alpha. \end{aligned}$$

Možno sa ľahko presvedčiť, že rovnice (2) určujú uzavretú krivku, teda krivku triedy PP, vtedy a len vtedy, keď pomery m a m' rýchlostí otáčania sa úsečiek a, b, c sú vyjadrené racionálnymi číslami.

Položme $m = p/q$, $m' = p'/q'$, kde p a q ako i p' a q' sú nesúdeliteľné čísla. Položme ďalej $\alpha/qq' = \omega$. Potom rovnice (2) nadobúdajú tvar

$$
\begin{aligned}
(3) \qquad x &= \mathrm{a} \,.\, \cos qq'\omega + \mathrm{b} \,.\, \cos (p + q)\, q'\omega + \mathrm{c} \,.\, \cos (p'q + pq' + qq')\, \omega\,, \\
y &= \mathrm{a} \,.\, \sin qq'\omega + \mathrm{b} \,.\, \sin (p + q)\, q'\omega + \mathrm{c} \,.\, \sin (p'q + pq' + qq')\, \omega\,.
\end{aligned}
$$

Ak sa úsečky b, c otáčajú v zmysloch opačných zmyslu otáčania úsečky a, podiely rýchlostí otáčania $m = p/q$, $m' = p'/q'$ sú záporné. V ďalšom pre určitosť budeme predpokladať, že čísla q a q' sú kladné. Čísla p a p' sú potom kladné, ak zmysel otáčania sa úsečky b a c je zhodný so zmyslom otáčania sa úsečky a, čísla p a p' sú záporné, ak zmysel otáčania sa úsečky b a c je opačný zmyslu otáčania sa úsečky a.

Súradnice x a y bodov krivky triedy PP, definované rovnicami (3), sú periodické funkcie parametra ω. Ich spoločná perioda je určená každým z troch zlomkov

$$
(4) \qquad \frac{2k\pi}{qq'} = \frac{2k_1\pi}{|p + q|\, q'} = \frac{2k_2\pi}{|p'q + pq' + qq'|}\,,
$$

kde k, k_1, k_2 sú najmenšie celé kladné čísla, pre ktoré je splnená podmienka ich rovnosti.

Podmienka (4) je rovnocenná s podmienkou

$$
\frac{k_1}{k} = \frac{|p + q|}{q}\,, \quad \frac{k_2}{k} = \frac{|p'q + pq' + qq'|}{qq'}\,.
$$

Označme $\bar{q}$ najväčší spoločný deliteľ čísel q a q' a položme

$$
q = \bar{q} \,.\, q_1\,, \quad q' = \bar{q} \,.\, q_2\,.
$$

Predchádzajúce rovnosti potom možno písať v tvare

$$
\frac{k_1}{k} = \frac{|p + q|}{\bar{q} \,.\, q_1}\,, \quad \frac{k_2}{k} = \frac{|p'q_1 + pq_2 + qq_2|}{\bar{q} \,.\, q_1 \,.\, q_2}\,.
$$

Pretože čísla p a q ako i čísla p' a q' sú nesúdeliteľné, zlomky na pravých stranách týchto rovností sa nedajú už zjednodušiť. Najmenšie hodnoty konštánt k, k_1, k_2, ktoré vyhovujú týmto rovniciam, teda sú

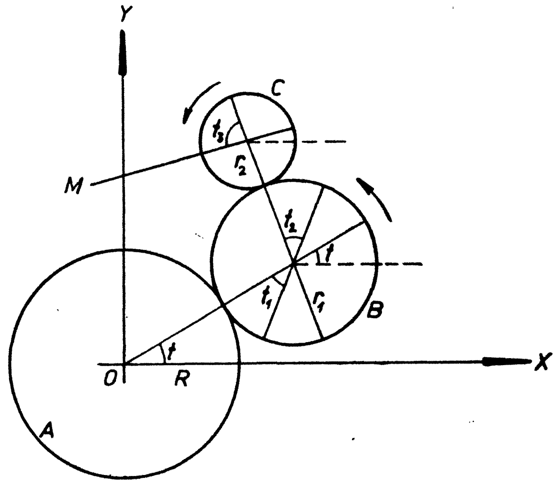
$$
k = \bar{q} \,.\, q_1 \,.\, q_2\,, \quad k_1 = |p + q|\, q_2\,, \quad k_2 = |p'q_1 + pq_2 + qq_2|\,.
$$

Pre tieto hodnoty konštánt k, k_1, k_2 každý zo zlomkov (4) sa rovná $2\pi/\bar{q}$. Súradnice x, y bodov krivky triedy PP sú teda periodické funkcie parametra ω so spoločnou periodou $2\pi/\bar{q}$: pri zmene parametra ω od nuly do $2\pi/\bar{q}$ krivka bude celá opísaná. V ďalšom budeme predpokladať, že parameter ω je nezáporný a mení sa v intervale $[0, 2\pi/\bar{q})$.

Pretože krivky triedy PP podľa definície sú vytvorené otáčaním sa troch úsečiek a, b, c, konštanty a, b, c, p, q, p', q' nemôžu sa rovnať nule. Pretože ďalej pre $p + q = 0$ alebo pre $p'q + pq' + qq' = 0$ rovnice (3) určujú v článku [1] už podrobne preskúmané krivky triedy P, v ďalšom budeme tiež predpokladať, že

$$p + q \neq 0, \quad p'q + pq' + qq' \neq 0.$$

2. Základné typy kriviek triedy PP. Predpokladajme, že po pevnom kruhu A (obr. 2) o polomere R sa rovnomerne valí v kladnom zmysle, tj. v zmysle opačnom otáčaniu sa hodinových ručičiek, kruh B o polomere r_1 a po kruhu B sa rovnomerne bez šmyku valí vzhľadom na kruh B v kladnom zmysle kruh C o polmere r_2.



Obr. 2.

Keď sa kruh B valí mimo kruhu A a kruh C mimo kruhu B, krivku, ktorú pri tomto zloženom pohybe opisuje bod M, pevne spojený s kruhom C, nazývame *epiepicykloidou* [2]. Keď sa kruh B valí po obvode kruhu A zvnútra a kruh C sa valí po obvode kruhu B zvonka, krivku, ktorú opíše bod M, nazývame *epihypocykloidou.* Keď sa kruh B valí po obvode kruhu A zvonku a kruh C po obvode kruhu B zvnútra, krivku, ktorú opíše bod M nazývame *hypoepicykloidou.* Napokon, keď sa kruh B valí po obvode kruhu A zvnútra a kruh C po obvode kruhu B tiež zvnútra, krivku, ktorú opíše bod M, nazývame *hypohypocykloidou.*

Je zrejme, že veľkosti polomerov R, r_1, r_2 kruhov A, B, C ešte neurčujú krivku, ktorú opíše bod M. Táto závisí tiež od pomeru rýchlostí valenia sa kruhov B a C.

Uvažujme napr. epiepicykloidu. Predpokladajme, že za určitý čas sa kruh B otočil o uhol t_1 a za ten istý čas sa kruh C otočil o uhol t_3. Z obr. 2 ľahko nájdeme hodnoty súradnic bodu M hľadanej krivky:

$$(5)\quad \begin{aligned} x &= (R + r_1)\cos t + (r_1 + r_2)\cos(t + t_1 + t_2) + h \,.\, \cos(t + t_1 + t_2 + t_3),\\ y &= (R + r_1)\sin t + (r_1 + r_2)\sin(t + t_1 + t_2) + h \,.\, \sin(t + t_1 + t_2 + t_3), \end{aligned}$$

kde h je vzdialenosť bodu M od stredu kruhu C.

Pre $h = r_2$ epiepicykloidu nazývame *prostou,* pre $h > r_2$ *predĺženou* a pre $h < r_2$ *skrátenou.*

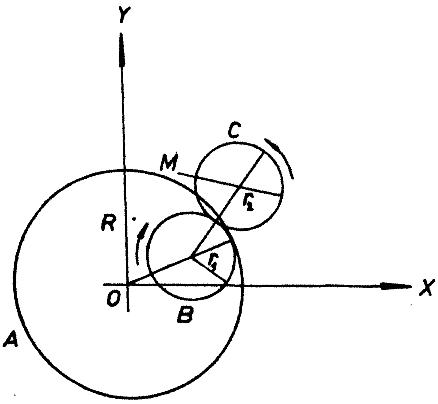
Pretože otáčanie sa kruhov B a C sa deje bez šmyku, musíme mať

$$r_1 t_1 = R \, . \, t \, , \quad r_2 t_3 = r_1 \, . \, t_2 \, .$$

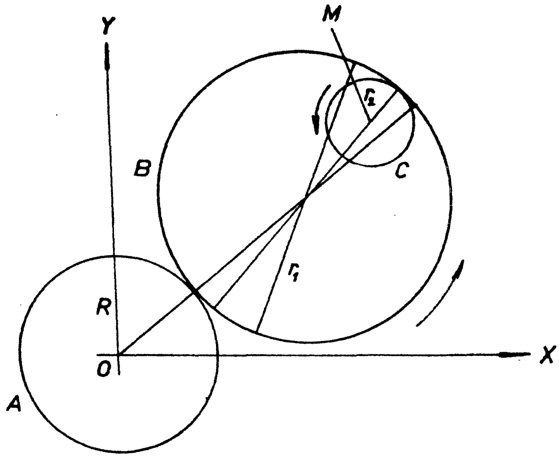
Z toho

$$t_1 = \frac{R}{r_1} t \, , \quad t_2 = \frac{\lambda r_2}{r_1} t \, , \quad t_3 = \lambda t \, , \tag{6}$$

kde $\lambda = t_3/t$ je dané číslo, ktoré závisí od pomeru rýchlostí otáčania sa kruhov B a C.



Obr. 3.



Obr. 4.

Ľahko by sme sa mohli presvedčiť, že bod M opíše uzavretú krivku vtedy a len vtedy, keď čísla λ, R/r_1 a r_2/r_1 sú racionálne.

Po dosadení hodnôt (6) uhlov t_1, t_2, t_3 do rovníc (5), dostaneme

$$x = (R + r_1) \cos t + (r_1 + r_2) \cos \frac{R + r_1 + \lambda r_2}{r_1} t + $$
$$+ h \, . \cos \frac{R + r_1 + \lambda(r_1 + r_2)}{r_1} t$$
$$y = (R + r_1) \sin t + (r_1 + r_2) \sin \frac{R + r_1 + \lambda r_2}{r_1} t + $$
$$+ h \, . \sin \frac{R + r_1 + \lambda(r_1 + r_2)}{r_1} t \, .$$

Možno sa ľahko presvedčiť, že epiepicykloidy, určené týmito rovnicami, sú krivky triedy PP, ktoré sú dané tiež rovnicami (3), v ktorých

$$\frac{p'}{q'} = \lambda \, , \quad \frac{p}{q} = \frac{R + \lambda r_2}{r_1} \, , \quad a = R + r_1 \, , \quad b = r_1 + r_2 \, , \quad c = h \, .$$

Pre $c = h = r_2$ príslušná krivka je prostá epiepicykloida. Jednoduchý výpočet nám ukáže, že to bude vtedy, keď konštanty rovníc (3) vyhovujú podmienke

$$\Delta_1 = aqq' - b(p + q)\, q' + c(p'q + pq' + qq') = 0\,.$$

Analogickým postupon nájdeme rovnice ostatných zovšeobecnených epicykloíd a hypocykloíd.

Epihypocykloida je určená rovnicami (obr. 3)

$$x = (R - r_1)\cos t + (r_1 + r_2)\cos\frac{R - r_1 - \lambda r_2}{r_1}\, t + {}$$
$$+ h\,.\cos\frac{R - r_1 - \lambda(r_1 + r_2)}{r_1}\, t\,,$$
$$y = (R - r_1)\sin t - (r_1 + r_2)\sin\frac{R - r_1 - \lambda r_2}{r_1}\, t - {}$$
$$- h\,.\sin\frac{R - r_1 - \lambda(r_1 + r_2)}{r_1}\, t\,.$$

Hypoepicykloida je určená rovnicami (obr. 4)

$$x = (R + r_1)\cos t + (r_1 - r_2)\cos\frac{R + r_1 - \lambda r_2}{r_1}\, t + {}$$
$$+ h\,.\cos\frac{R + r_1 + \lambda(r_1 - r_2)}{r_1}\, t\,,$$
$$y = (R + r_1)\sin t + (r_1 - r_2)\sin\frac{R + r_1 - \lambda r_2}{r_1}\, t + {}$$
$$+ h\,.\sin\frac{R + r_1 + \lambda(r_1 - r_2)}{r_1}\, t\,.$$

Hypohypocykloida je určená rovnicami (obr. 5)

$$x = (R - r_1)\cos t + (r_1 - r_2)\cos\frac{r_1 - R - \lambda r_2}{r_1}\, t + {}$$
$$+ h\,.\cos\frac{r_1 - R + \lambda(r_1 - r_2)}{r_1}\, t\,,$$
$$y = (R - r_1)\sin t + (r_1 - r_2)\sin\frac{r_1 - R - \lambda r_2}{r_1}\, t + {}$$
$$+ h\,.\sin\frac{r_1 - R + \lambda(r_1 - r_2)}{r_1}\, t\,.$$

Rovnice (3) určujú prostú epihypocykloidu, ak platí

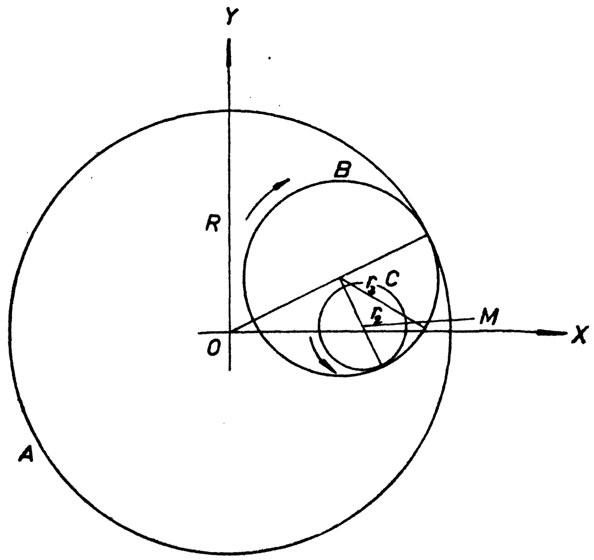
$$\Delta_2 = aqq' + b(p + q)\, q' - c(p'q + pq' + qq') = 0\,,$$

prostú hypoepicykloidu, ak platí

$$\Delta_3 = aqq' - b(p + q)\, q' - c(p'q + pq' + qq') = 0$$

a prostú hypohypocykloidu, ak platí

$$\Delta_4 = aqq' + b(p + q)\, q' + c(p'q + pq' + qq') = 0\,.$$



Obr. 5.

Pretože podľa predpokladu je $p + q \neq 0$, $p'q + pq' + qq' \neq 0$, možno sa ľahko presvedčiť, že keď jeden z výrazov $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ sa rovná nule, ostatné tri musia byť od nuly rôzne. Pri zachovaní počiatočných polôh kruhov B a C, vyplývajúcich z obrázkov 2, 3, 4 a 5, avšak pri zmene zmyslu ich valenia sa, znamienko parametra λ sa v uvažovaných rovniciach kriviek mení. Pritom však uvedené tvary výrazov Δ_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ se nemenia.

3. Základné vlastnosti kriviek triedy PP. Z rovníc (3) pre vzdialenosť $\varrho = \sqrt{(x^2 + y^2)}$ bodu krivky od počiatku súradnicovej sústavy dostaneme

$$\varrho^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab \,.\, \cos pq'\omega + 2ac \,.\, \cos (p'q + pq')\, \omega + 2bc \,.\, \cos p'q\omega\,. \tag{7}$$

Pretože konštanty a, b, c sú kladné, usudzujeme, že bodom, vzdialeným od počiatku súradnicovej sústavy na vzdialenosť $\varrho = \mathrm{a} + \mathrm{b} + \mathrm{c}$, odpovedajú len tie hodnoty parametra ω, pre ktoré platia rovnosti

$$\cos p'q\omega = \cos pq'\omega = 1\,. \tag{8}$$

Táto podmienka zrejme platí pre $\omega = 0$. Je však splnená aj pre

$$\omega = \frac{2k\pi}{|p|\,q'} = \frac{2k_1\pi}{|p'|\,q}\,, \tag{9}$$

kde k a k_1 sú celé kladné čísla.

Označme teraz $\bar{p}$ najväčší spoločný deliteľ čísel $|p|$ a $|p'|$ a položme $p = \bar{p}\,.\,p_1$, $p' = \bar{p}\,.\,p_2$. Vzorec (9) môžeme potom písať v tvare

$$\omega = \frac{2k\pi}{\bar{p}\bar{q}|p_1|\,q_2} = \frac{2k_1\pi}{\bar{p}\bar{q}|p_2|\,q_1}\,. \tag{10}$$

Čísla k a k_1 musia potom vyhovovať podmienke

$$k_1 = \frac{|p_2|\,q_1}{|p_1|\,q_2}\,k\,. \tag{11}$$

Pretože $|p_2|\,q_1$ a $|p_1|\,q_2$ sú celé nesúdeliteľné čísla, číslo k musí byť nasobkom čísla $|p_1|\,q_2$. Keď položíme $k = |p_1|\,q_2k_2$, kde k_2 je opäť prirodzené číslo, z rovnosti (11) dostávame $k_1 = |p_2|\,q_1k_2$ a z rovností (10) potom máme

$$\omega = \frac{2k_2\pi}{\bar{p}\bar{q}}\,. \tag{12}$$

Pretože pre všetky hodnoty ω máme $\omega < 2\pi/\bar{q}$, z toho usudzujeme, že na každej krivke triedy PP vždy existuje presne $\bar{p}$ bodov, vzdialených od počiatku súradnicovej sústavy na vzdialenosť $\varrho = \mathrm{a} + \mathrm{b} + \mathrm{c}$, určených vzorcom (12), kde $k_2 = 0, 1, 2, \ldots$ $\ldots, \bar{p} - 1$.

Dokážeme, že všetky tieto body sú rôzne, tj. že každému z týchto bodov odpovedá len jedna hodnota parametra ω. Predpokladajme opak, tj. nech napr. niektorému bodu, vzdialenému od počiatku súradnicovej sústavy na vzdialenosť $\varrho = \mathrm{a} + \mathrm{b} + \mathrm{c}$ odpovedajú dve rôzne hodnoty parametra ω:

$$\omega_1 = \frac{2k'\pi}{\bar{p}\bar{q}}\,, \quad \omega_2 = \frac{2k''\pi}{\bar{p}\bar{q}}\,,$$

ke $k' < k''$.

Pretože pri splnení podmienok (8) rovnice (3) nadobúdajú tvar

$$x = (\mathrm{a} + \mathrm{b} + \mathrm{c}) \cos qq'\omega\,, \quad y = (\mathrm{a} + \mathrm{b} + \mathrm{c}) \sin qq'\omega\,,$$

vidíme, že musia nutne platiť aj rovnosti

$$\cos qq'\omega_2 = \cos qq'\omega_1 \,, \quad \sin qq'\omega_2 = \sin qq'\omega_1 \,.$$

Tieto však môžu byť splnené len vtedy, keď $qq'\omega_2 - qq'\omega_1 = 2k'''\pi$, kde k''' je isté prirodzené číslo. Musíme teda mať

$$\frac{2qq'k''\pi}{\bar{p}\bar{q}} - \frac{2qq'k'\pi}{\bar{p}\bar{q}} = 2k'''\pi$$

alebo

$$k'' - k' = \frac{\bar{p}}{qq_2} k''' \,.$$

Pretože celé čísla $\bar{p}$ a qq_2 nemajú spoločných deliteľov, celé číslo k''' musí byť deliteľné číslom qq_2. Ak položíme $k''' = qq_2 \,.\, k$, kde k je opäť celé kladné číslo, dostaneme $k'' - k' = \bar{p} \,.\, k$. Avšak celé nazáporné čísla k' a k'' nie sú väčšie ako číslo $\bar{p} - 1$. Posledná rovnosť nemôže byť teda splnená pre $k' \neq k''$.

Z rovníc (3) ďalej dostaneme

$$\text{(13)} \quad \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\omega}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\omega}\right)^2 = \mathrm{a}^2q^2q'^2 + \mathrm{b}^2q'^2(p + q)^2 + \mathrm{c}^2(p'q + pq' + qq')^2 + \\ + 2\mathrm{ab}qq'(p + q)\cos pq'\omega + 2\mathrm{ac}qq'(p'q + pq' + qq')\cos(p'q + pq')\,\omega + \\ + 2\mathrm{bc}q'(p + q)(p'q + pq' + qq')\cos p'q\omega \,.$$

Za podmienok (8) má táto rovnica tvar

$$\text{(14)} \quad (\mathrm{d}x/\mathrm{d}\omega)^2 + (\mathrm{d}y/\mathrm{d}\omega)^2 = [aqq' + b(p + q)\,q' + c(p'q + pq' + qq')]^2 = \Delta_4^2 \,.$$

Videli sme, že na každej krivke triedy PP existuje $\bar{p}$ bodov, pre ktoré $\varrho = \mathrm{a} + \mathrm{b} + \mathrm{c}$ a ktorým odpovedajú jediné hodnoty parametra ω. Rovnica (14) nám hovorí, že všetky tieto body sú regulárne body u všetkých kriviek triedy PP s výnimkou prostých hypohypocykloíd, pre ktoré, ako sme videli, platí $\Delta_4 = 0$.

Pre

$$\text{(15)} \qquad \cos pq'\omega = -1 \,, \quad \cos p'q\omega = 1$$

z rovnosti (7) dostaneme $\varrho = |\mathrm{a} - \mathrm{b} - \mathrm{c}|$. Podmienky (15) sú splnené pre

$$\omega = \frac{(2k + 1)\,\pi}{|p|\,q'} = \frac{2k_1\pi}{|p'|\,q} \,,$$

kde k je celé nezáporné číslo a k_1 je celé kladné číslo.

Ak napíšeme tieto rovnosti v tvare

$$\omega = \frac{(2k + 1)\pi}{\bar{p}|p_1|\,\bar{q}q_2} = \frac{2k_1\pi}{\bar{p}|p_2|\,\bar{q}q_1}, \tag{16}$$

dostaneme

$$2k_1 = \frac{|p_2|\,q_1}{|p_1|\,q_2}(2k + 1). \tag{17}$$

Pretože čísla $|p_2|\,q_1$ a $|p_1|\,q_2$ nemajú spoločných deliteľov, rovnosť (17) môže platiť len vtedy, keď aspoň jedno z čísel $|p_2|$ a q_1 je číslo párne. Avšak keď číslo $|p_2|\,q_1$ je párne, číslo $|p_1|\,q_2$ musí byť nepárne. Môžeme tedy položiť $2k + 1 = (2k_2 + 1)\,.\,|p_1|\,q_2$, kde k_2 je celé nezáporné číslo. Vzorec (17) teraz nadobúda tvar $2k_1 = (2k_2 + 1)\,|p_2|\,q_1$. Z rovností (16) potom dostaneme

$$\omega = \frac{(2k_2 + 1)\,\pi}{\bar{p}\bar{q}}, \quad (k_2 = 0, 1, 2, \ldots, \bar{p} - 1). \tag{18}$$

Z toho usudzujeme, že na každej krivke triedy PP pre $|p_2|\,q_1$ párne vždy existuje $\bar{p}$ bodov, vzdialenosť ktorých od počiatku súradnicovej sústavy je $\varrho = |\mathrm{a} - \mathrm{b} - \mathrm{c}|$ a ktoré sú určené vzorcom (18).

Aj tu by sme sa mohli presvedčiť, že v prípade, keď rovnosť (7) nám dáva $\varrho = |\mathrm{a} - \mathrm{b} - \mathrm{c}|$ len za podmienok (15), každému bodu, vzdialenosť ktorého od počiatku súradnicovej sústavy je $\varrho = |\mathrm{a} - \mathrm{b} - \mathrm{c}| > 0$, odpovedá len jedna hodnota parametra ω. Avšak môže sa stať, že pre niektoré hodnoty konštánt a, b, c rovnosť (7) dáva $\varrho = |\mathrm{a} - \mathrm{b} - \mathrm{c}|$ nie len pre hodnoty parametra ω vyhovujúce podmienkám (15), ale i pre niektoré iné jeho hodnoty. Avšak z rovnosti (7) môžeme dostať rovnosť $\varrho = |\mathrm{a} - \mathrm{b} - \mathrm{c}|$ len pre určitý konečný počet izolovaných hodnôt $\omega \in [0, 2\pi/\bar{q})$. To ale znamená, že pre $|p_2|\,q_1$ párne na každej krivke triedy PP vždy existujú intervaly $(\omega', \omega'') \in [0, 2\pi/\bar{q})$ také, v ktorých sa nachádzajú body, určené jedinými hodnotami parametra $\omega \in (\omega', \omega'')$, definovanými vzorcom (18). Pre $\mathrm{a} - \mathrm{b} - \mathrm{c} = 0$ počiatok súradnicovej sústavy je aspoň $\bar{p}$ násobným bodom.

Za podmienok (15) rovnosť (13) dáva

$$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\omega}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\omega}\right)^2 = [\mathrm{a}qq' - \mathrm{b}(p + q)\,q' - \mathrm{c}(p'q + pq' + qq')]^2 = \Delta_3^2\,.$$

Vidíme, že body určené rovnosťami (15) v spomenutých intervaloch (ω', ω'') pre $\Delta_3 \neq 0$ sú bodmi regulárnymi. A pretože Δ_3 a Δ_4 sa nemôžu súčasne rovnať nule, vyplýva z toho, že u prostej hypohypocykloidy pre $|p_2|\,q_1$ párnom a pre $\mathrm{a} - \mathrm{b} - \mathrm{c} \neq 0$ vždy existujú intervaly, v ktorých sa nachádzajú jej regulárne body, ktorým odpovedajú jediné hodnoty parametra ω.

Ak pre $|p_2|\,q_1$ párne máme $\mathrm{a} - \mathrm{b} - c = 0$, krivka prechádza počiatkom súradnicovej sústavy, ktorý je aspoň $\bar{p}$ násobným bodom tejto krivky. Avšak aj v tomto prípade existujú intervaly (ω', ω''), v ktorých počiatku súradnicovej sústavy odpovedá len jedna hodnota parametra ω z týchto intervalov.

Podobnými úvahami mohli by sme dokázať, že na každej krivke triedy PP pre $|p_1|, |p_2|, q_1, q_2$ nepárne existuje aspoň $\bar{p}$ rôznych bodov, ktorých vzdialenosť od počiatku súradnicovej sústavy je $\varrho = |\mathrm{b} - \mathrm{a} - \mathrm{c}| > 0$ a ktoré sú definované vzorcom (18) a pre $|p_1|\, q_2$ párne $\bar{p}$ bodov, ktorých vzdialenosť od počiatku súradnicovej sústavy je $\varrho = |\mathrm{c} - \mathrm{a} - \mathrm{b}| > 0$ a ktoré sú definované tým istým vzorcom (18). Pre $\mathrm{b} - \mathrm{a} - \mathrm{c} = 0$ v prvom prípade a pre $\mathrm{c} - \mathrm{a} - \mathrm{b} = 0$ v druhom prípade krivka prechádza počiatkom súradnicovej sústavy, ktorý je jej aspoň $\bar{p}$ násobným bodom.

Analogicky sa možno tiež presvedčiť aj o tom, že u prostých hypohypocykloíd vždy existujú intervaly (ω', ω'') také, v ktorých všetky spomenuté body sú bodmi regulárnymi, ktorým v týchto intervaloch odpovedajú jediné hodnoty parametra ω.

4. Základná veta. Teraz dokážeme túto základnú vetu:

Veta: *Krivky triedy* PP, *určené rovnicami* (3), *sú racionálnymi krivkami. Ich stupeň n je daný vzorcom*

$$n = |p'q| + |pq'| + |p'q + pq' + 2qq'|, \tag{19}$$

keď konštanty p a p' majú rovnaké znamienka. Tento vzorec platí aj v týchto dvoch prípadoch:

1) $p' < 0,\ p > 0,\ p'q + pq' + 2qq' \geqq 0,$
2) $p' > 0,\ p < 0,\ p'q + pq' + 2qq' \leqq 0.$

V prípadoch, keď

1) $p' < 0,\ p > 0,\ p'q + pq' + 2qq' < 0,$
2) $p' > 0,\ p < 0,\ p'q + pq' + 2qq' > 0,$

platí nerovnosť

$$n < |p'q| + |pq'| + |p'q + pq' + 2qq'|.$$

Dôkaz. Napíšme rovnice (3) v tvare

$$x = \frac{\mathrm{a}}{2}\left(e^{iqq'\omega} + e^{-iqq'\omega}\right) + \frac{\mathrm{b}}{2}\left[e^{i(p+q)q'\omega} + e^{-i(p+q)q'\omega}\right] + $$
$$+ \frac{\mathrm{c}}{2}\left[e^{i(p'q+pq'+qq')\omega} + e^{-i(p'q+pq'+qq')\omega}\right],$$

$$y = \frac{\mathrm{a}}{2i}\left(e^{iqq'\omega} - e^{-iqq'\omega}\right) + \frac{\mathrm{b}}{2i}\left[e^{i(p+q)q'\omega} - e^{-i(p+q)q'\omega}\right] + $$
$$+ \frac{\mathrm{c}}{2i}\left[e^{i(p'q+pq'+qq')\omega} - e^{-i(p'q+pq'+qq')\omega}\right]$$

a položme $e^{i\omega} = \tau$. Tieto rovnice potom budú mať tvar

$$(20) \qquad x = \frac{1}{2}\left[a(\tau^{qq'} + \tau^{-qq'}) + b(\tau^{pq'+qq'} + \tau^{-pq'-qq'}) + \right.$$
$$\left. + c(\tau^{p'q+pq'+qq'} + \tau^{-p'q-pq'-qq'})\right],$$
$$y = -\frac{i}{2}\left[a(\tau^{qq'} - \tau^{-qq'}) + b(\tau^{pq'+qq'} - \tau^{-pq'-qq'}) + \right.$$
$$\left. + c(\tau^{p'q+pq'+qq'} - \tau^{-p'q-pq'-qq'})\right].$$

Ďalej máme

$$\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2 = \left(\frac{d\omega}{d\tau}\right)^2 \left[\left(\frac{dx}{d\omega}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\omega}\right)^2\right] = -e^{-2i\omega}\left[\left(\frac{dx}{d\omega}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\omega}\right)^2\right].$$

Z toho, čo sme povedali už skôr, vyplýva, že na každej krivke triedy PP existujú intervaly (ω', ω''), v ktorých sa nachádza aspoň jeden bod, ktorému odpovedá jediná hodnota parametra τ, pre ktorú platí nerovnosť

$$\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2 \neq 0.$$

Položme ďalej

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3}, \quad \tau = \frac{\nu}{\mu}.$$

Rovnice (20) potom nadobudnú tvar

$$(21) \qquad \frac{x_1}{x_3} = \frac{1}{2}\left[a\left(\frac{\nu^{qq'}}{\mu^{qq'}} + \frac{\mu^{qq'}}{\nu^{qq'}}\right) + b\left(\frac{\nu^{pq'+qq'}}{\mu^{pq'+qq'}} + \frac{\mu^{pq'+qq'}}{\nu^{pq'+qq'}}\right) + \right.$$
$$\left. + c\left(\frac{\nu^{p'q+pq'+qq'}}{\mu^{p'q+pq'+qq'}} + \frac{\mu^{p'q+pq'+qq'}}{\nu^{p'q+pq'+qq'}}\right)\right],$$
$$\frac{x_2}{x_3} = -\frac{i}{2}\left[a\left(\frac{\nu^{qq'}}{\mu^{qq'}} - \frac{\mu^{qq'}}{\nu^{qq'}}\right) + b\left(\frac{\nu^{pq'+qq'}}{\mu^{pq'+qq'}} - \frac{\mu^{pq'+qq'}}{\nu^{pq'+qq'}}\right) + \right.$$
$$\left. + c\left(\frac{\nu^{p'q+pq'+qq'}}{\mu^{p'q+pq'+qq'}} - \frac{\mu^{p'q+pq'+qq'}}{\nu^{p'q+pq'+qq'}}\right)\right].$$

Rozoberme teraz tieto možné prípady:

1) $p' > 0$, $p > 0$. Ak napíšeme rovnice (21) v tvare

$$\begin{aligned}\frac{x_1}{x_3} = {} & \frac{1}{2\nu^{p'q+pq'+qq'}\,\mu^{p'q+pq'+qq'}}\big[\mathrm{a}\big(\nu^{p'q+pq'+2qq'}\mu^{p'q+pq'} + \\ & + \nu^{p'q+pq'}\mu^{p'q+pq'+2qq'}\big) + \mathrm{b}\big(\nu^{p'q+2pq'+2qq'}\mu^{p'q} + \\ & + \nu^{p'q}\mu^{p'q+2pq'+2qq'}\big) + \mathrm{c}\big(\nu^{2(p'q+pq'+qq')} + \mu^{2(p'q+pq'+qq')}\big)\big],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{x_2}{x_3} = {} & -\frac{i}{2\nu^{p'q+pq'+qq'}\,\mu^{p'q+pq'+qq'}}\big[\mathrm{a}\big(\nu^{p'q+pq'+2qq}\,\mu^{p'q+pq'} - \\ & - \nu^{p'q+pq'}\mu^{p'q+pq'+2qq'}\big) + \mathrm{b}\big(\nu^{p'q+2pq'+2qq'}\mu^{p'q} - \\ & - \nu^{p'q}\mu^{p'q+2pq'+2qq'}\big) + \mathrm{c}\big(\nu^{2(p'q+pq'+qq')} - \mu^{2(p'q+pq'+qq')}\big)\big],\end{aligned}$$

vidíme, že homogénne súradnice x_1, x_2, x_3 bodov kriviek, definovaných rovnicami (3), v danom prípade môžeme určiť týmito binárnymi formami parametrov ν a μ:

$$\begin{aligned}\sigma x_1 = {} & \mathrm{a}\big(\nu^{p'q+pq'+2pq'}\mu^{p'q+pq'} + \nu^{p'q+pq'}\mu^{p'q+pq'+2qq'}\big) + \\ & + \mathrm{b}\big(\nu^{p'q+2pq'+2pp'}\mu^{p'q} + \nu^{p'q}\mu^{p'q+2pq'+2qq'}\big) + \\ & + \mathrm{c}\big(\nu^{2(p'q+pq'+qq')} + \mu^{2(p'q+pq'+qq')}\big),\\ \sigma x_2 = {} & -i\big[\mathrm{a}\big(\nu^{p'q+pq'+2qq'}\mu^{p'q+pq'} - \nu^{p'q+pq'}\mu^{p'q+pq'+2qq'}\big) + \\ & + \mathrm{b}\big(\nu^{p'q+2pq'+2qq'}\,\mu^{p'q} - \nu^{p'q}\mu^{p'q+2pq'+2qq'}\big) + \\ & + \mathrm{c}\big(\nu^{2(p'q+pq'+qq')} - \mu^{2(p'q+pq'+qq')}\big),\\ \sigma x_3 = {} & 2\nu^{p'q+pq'+qq'}\mu^{p'q+pq'+qq'},\end{aligned}$$

kde σ je koeficient úmernosti.

Z toho vidíme, že krivka triedy PP je v danom prípade racionálnou krivkou stupňa $2(p'q + pq' + qq')$. A pretože podľa predpokladu p' a p sú čísla kladné, môžeme písať

$$2(p'q + pq' + qq') = |p'q| + |pq'| + |p'q + pq' + 2qq'|\,.$$

2) $p' < 0$, $p < 0$, $p'q + pq' + 2qq' > 0$. Z rovníc (21) v tomto prípade určíme tieto binárne formy pre homogénne súradnice x_1, x_2, x_3 bodov krivky triedy PP:

$$\begin{aligned}\sigma x_1 = {} & \mathrm{a}\big(\nu^{2qq'} + \mu^{2qq'}\big) + \mathrm{b}\big(\nu^{pq'+2qq'}\mu^{-pq'} + \nu^{-pq'}\mu^{pq'+2qq'}\big) + \\ & + \mathrm{c}\big(\nu^{p'q+pq'+2qq'}\mu^{-p'q-pq'} + \nu^{-p'q-pq'}\mu^{p'q+pq'+2qq'}\big),\\ \sigma x_2 = {} & -i\big[\mathrm{a}\big(\nu^{2qq'} - \mu^{2qq'}\big) + \mathrm{b}\big(\nu^{p'q+2qq'}\mu^{-pq'} - \\ & - \nu^{-pq'}\mu^{pq'+2qq'}\big) + \mathrm{c}\big(\nu^{p'q+pq'+2qq'}\mu^{-p'q-pq'} - \\ & \nu^{-p'q-pq'}\mu^{p'q+pq'+2qq'}\big)\big],\\ \sigma x_3 = {} & 2\nu^{qq'}\mu^{qq'}\,.\end{aligned}$$

Vidíme, že krivka triedy PP v uvažovanom prípade je racionálna krivka stupňa $2qq'$. Pretože teraz p a p' sú čísla záporné a $p'q + pq' + 2qq' > 0$, máme

$$2qq' = |p'q| + |pq'| + |p'q + pq' + 2qq'|.$$

3) $p' < 0$, $p < 0$, $p'q + pq' + 2qq' \leqq 0$. V tomto prípade z rovníc (21) možno určiť

$$\begin{aligned}
\sigma x_1 &= \mathrm{a}(\nu^{-p'q-pq'}\mu^{-p'q-pq'-2qq'} + \nu^{-p'q-pq'-2qq'}\mu^{-p'q-pq'}) + \\
&+ \mathrm{b}(\nu^{-p'q}\mu^{-p'q-2pq'-2qq'} + \nu^{-p'q-2pq'-2qq'}\mu^{-p'q}) + \\
&+ \mathrm{c}(\nu^{-2(p'q+pq'+qq')} + \mu^{-2(p'q+pq'+qq')}), \\
\sigma x_2 &= -i[\mathrm{a}(\nu^{-p'q-pq'}\mu^{-p'q-pq'-2qq'} - \nu^{-p'q-pq'-2qq'}\mu^{-p'q-pq'}) + \\
&+ \mathrm{b}(\nu^{-p'q}\mu^{-p'q-2pq'-2qq'} - \nu^{-p'q-2pq'-2qq'}\mu^{-p'q}) + \\
&+ \mathrm{c}(\nu^{-2(p'q+pq'+qq')} - \mu^{-2(p'q+pq'+qq')})], \\
\sigma x_3 &= 2\nu^{-p'q-pq'-qq'}\mu^{-p'q-pq'-qq'}.
\end{aligned}$$

V danom prípade rovnice (3) určujú racionálnu krivku, ktorej stupeň sa rovná $-2(p'q + pq' + qq')$. Avšak aj teraz máme

$$-2(p'q + pq' + qq') = |p'q| + |pq'| + |p'q + pq' + 2qq'|.$$

4) $p' < 0$, $p > 0$, $p'q + pq' + 2qq' \geqq 0$. V tomto prípade homogénne súradnice x_1, x_2, x_3 bodov triedy PP možno určiť binárnymi formami

$$\begin{aligned}
\sigma x_1 &= \mathrm{a}(\nu^{pq'+2qq'}\mu^{pq'} + \nu^{pq'}\mu^{pq'+2qq'}) + \mathrm{b}(\nu^{2(pq'+qq')} + \mu^{2(pq'+qq')}) + \\
&+ \mathrm{c}(\nu^{p'q+2pq'+2qq'}\mu^{-p'q} + \nu^{-p'q}\mu^{p'q+2pq'+2qq'}), \\
\sigma x_2 &= -i[\mathrm{a}(\nu^{pq'+2qq'}\mu^{pq'} - \nu^{pq'}\mu^{pq'+2qq'}) + \\
&+ \mathrm{b}(\nu^{2(pq'+qq')} - \mu^{2(pq'+qq')}) + \mathrm{c}(\nu^{p'q+2pq'+2qq'}\mu^{-p'q} - \\
&- \nu^{-p'q}\mu^{p'q+2pq'+2qq'})], \\
\sigma x_3 &= 2\nu^{pq'+qq'}\mu^{pq'+qq'}.
\end{aligned}$$

Krivka triedy PP je v tomto prípade racionálnou krivkou, ktorej stupeň sa rovná $2(pq' + qq')$. To však znamená, že jej stupeň je opät daný vzorcom (19), pretože aj teraz máme

$$2(pq' + qq') = |p'q| + |pq'| + |p'q + pq' + 2qq'|.$$

5) $p' < 0$, $p > 0$, $p'q + pq' + 2qq' < 0$. Homogénne súradnice x_1, x_2, x_3 bodov krivky triedy PP sú teraz dané binárnymi formami parametrov ν a μ tvaru

$$\begin{aligned}
\sigma x_1 &= \mathrm{a}(\nu^{-p'q}\mu^{-p'q-2qq'} + \nu^{-p'q-2qq'}\mu^{-p'q}) + \\
&+ \mathrm{b}(\nu^{pq'-p'q}\mu^{-p'q-pq'-2qq'} + \nu^{-p'q-pq'-2qq'}\mu^{pq'-p'q}) + \\
&+ \mathrm{c}(\nu^{pq'}\mu^{-2p'q-pq'-2qq'} + \nu^{-2p'q-pq'-2qq'}\mu^{pq'}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma x_2 = &-i\big[\mathrm{a}\big(\nu^{-p'q}\mu^{-p'q-2qq'} - \nu^{-p'q-2qq'}\mu^{-p'q}\big) + \\ &+ \mathrm{b}\big(\nu^{pq'-p'q}\mu^{-p'q-pq'-2qq'} - \nu^{-p'q-pq'-2qq'}\mu^{pq'-p'q}\big) + \\ &+ \mathrm{c}\big(\nu^{pq'}\mu^{-2p'q-pq'-2qq'} - \nu^{-2p'q-pq'-2qq'}\mu^{pq'}\big)\big]\,, \\ \sigma x_3 = &\ 2\nu^{-p'q-qq'}\mu^{-p'q-qq'}\,.\end{aligned}$$

Pretože polynómy, ktoré sme určili pre x_1, x_2 majú spoločných deliteľov s polynómom, ktorý sme našli pre x_3, krivka triedy PP je v tomto prípade racionálnou krivkou, ktorej stupeň n je daný nerovnosťou

$$n < -2(p'q + qq')\,.$$

Avšak teraz máme

$$-2(p'q + qq') = |p'q| + |pq'| + |p'q + pq' + 2qq'|\,.$$

6) $p' > 0$, $p < 0$, $p'q + pq' + 2qq' \leqq 0$. Homogénne súradnice x_1, x_2, x_3 bodov krivky triedy PP sú teraz binárnymi formami parametrov ν a μ tvaru

$$\begin{aligned}\sigma x_1 = &\ \mathrm{a}\big(\nu^{-pq'}\mu^{-pq'-2qq'} + \nu^{-pq'-2qq'}\mu^{-pq'}\big) + \\ &+ \mathrm{b}\big(\mu^{-2pq'-2qq'} + \nu^{-2pq'-2qq'}\big) + \\ &+ \mathrm{c}\big(\nu^{p'q}\mu^{-p'q-2pq'-2qq'} + \nu^{-p'q-2pq'-2qq'}\mu^{p'q}\big)\,, \\ \sigma x_2 = &-i\big[\mathrm{a}\big(\nu^{-pq'}\mu^{-pq'-2qq'} - \nu^{-p'q-2qq'}\mu^{-pq'}\big) + \\ &\mathrm{b}\big(\mu^{-2pq'-2qq'} - \nu^{-2pq'-2qq'}\big) + \mathrm{c}\big(\nu^{p'q}\mu^{-p'q-2pq'-2qq'} - \\ &- \nu^{-p'q-2pq'-2qq'}\mu^{p'q}\big)\big]\,, \\ \sigma x_3 = &\ 2\nu^{-pq'-qq'}\mu^{-pq'-qq'}\,.\end{aligned}$$

V tomto prípade krivka triedy PP je racionálna krivka stupňa $-2(pq' + qq')$ a opäť máme

$$-2(pq' + qq') = |p'q| + |pq'| + |p'q + pq' + 2qq'|\,.$$

7) $p' > 0$, $p < 0$, $p'q + pq' + 2qq' > 0$. V tomto prípade môžeme písať

$$\begin{aligned}\sigma x_1 = &\ \mathrm{a}\big(\nu^{p'q+2qq'}\mu^{p'q} + \nu^{p'q}\mu^{p'q+2qq'}\big) + \\ &+ \mathrm{b}\big(\nu^{p'q+pq'+2qq'}\mu^{p'q-qq'} + \nu^{p'q-pq'}\mu^{p'q+pq'+2qq'}\big) + \\ &+ \mathrm{c}\big(\nu^{2p'q+pq'+2qq'}\mu^{-pq'} + \nu^{-pq'}\mu^{2p'q+pq'+2qq'}\big)\,, \\ \sigma x_2 = &-i\big[\mathrm{a}\big(\nu^{p'q+2qq'}\mu^{p'q} - \nu^{p'q}\mu^{p'q+2qq'}\big) + \\ &+ \mathrm{b}\big(\nu^{p'q+pq'+2qq'}\mu^{p'q-qq'} - \nu^{p'q-pq'}\mu^{p'q+pq'+2qq'}\big) + \\ &+ \mathrm{c}\big(\nu^{2p'q+pq'+2qq'}\mu^{-pq'} - \nu^{-pq'}\mu^{2p'q+pq'+2qq'}\big)\big]\,, \\ \sigma x_3 = &\ 2\nu^{p'q+qq'}\mu^{p'q+qq'}\,.\end{aligned}$$

V tomto prípade krivka triedy PP je racionálna krivka, ktorej stupeň n je daný nerovnosťou

$$n < 2(p'q + qq').$$

Avšak aj v tomto prípade

$$2(p'q + qq') = |p'q| + |pq'| + |p'q + pq' + 2qq'|.$$

Poznámka. Ak v dokázanej základnej vete položíme $p' = 0$, $q' = 1$, nadobudne táto znenie základnej vety článku [1]. V tomto prípade rovnice (3) skutočne určujú krivky triedy P a platí

$$|p'q| + |pq'| + |p'q + pq' + 2qq'| = |p| + |p + 2q|.$$

Pri dôkaze vety tohoto článku potom prípad 3), pri ktorom je $p > 0$, $p'q + pq' + 2qq' < 0$, nie je možný a v prípade 7), pri ktorom je $p < 0$, $p'q + pq' + 2qq' > 0$, polynómy, ktoré sme určili pre x_1 a x_2. nemajú spoločných deliteľov s polynómom, ktorý sme určili pre x_3.

Literatúra

[1] *N. Podtjagin:* O jednej triede racionálnych kriviek, Časopis pro pěstování matematiky *90* (1965), 181—190.

[2] *G. Loria:* Spezielle algebraische und transcendente Kurven, 2. Auflage (1911), 123.

Adresa autora: Gottwaldovo nám. 2, Bratislava (Slovenská vysoká škola technická).

Резюме

ЕЩЕ ОБ ОДНОМ КЛАССЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ КРИВЫХ

НИКОЛАЙ ПОДТЯГИН (Nikolaj Podtjagin), Братислава

В статье рассматривается класс кривых, названных автором кривыми класса PP, которые являются обобщением кривых класса P, исследованных автором в его статье [1].

Эти кривые даны уравнениями

$$x = a\cos qq'\omega + b\cos(p + q)\,q'\omega + c\cos(p'q + pq' + qq')\,\omega\,,$$
$$y = a\sin\ qq\omega + b\sin\,(p + q)\,q'\omega + c\sin(p'q + pq' + qq')\,\omega\,.$$

где ω — параметр, изменяющийся в интервале $[0, 2\pi/q)$, p и q, как и p' и q', целые числа, не имеющие общих делителей, причем числа q и q' положительны,

$\bar{q}$ — общий наибольший делитель чисел q и q', a, b, c — любые положительные числа.

В статье доказывается, что к кривым класса PP принадлежат так называемые епиепициклоиды, эпигипоциклоиды, гипоепициклоиды и гипогипоциклоиды. Доказываются некоторые свойства этих кривых.

Доказывается, что если положить

$$p = \bar{p}p_1, \quad p' = \bar{p}p_2$$

где $\bar{p}$ — общий наибольший делитель чисел $|p|$ и $|p'|$, то:

1) На каждой кривой класса PP существует $\bar{p}$ точек, удаленных от начала координат на расстояние a + b + c. У всех кривых класса PP, за исключением простых гипогипоциклоид эти точки являются обыкновенными точками.

2) При $|p_2|\, q_1$ четном на каждой кривой класса PP существует по меньшей мере $\bar{p}$ точек, удаленных от начала координат на расстояние $|a - b - c|$. При $a - b - c = 0$ начало координат является кратною точкою по меньшей мере порядка $\bar{p}$.

3) При $|p_1|$, $|p_2|$, q_1, q_2 нечетных на каждой кривой класса PP существует по крайней мере $\bar{p}$ точек, удаленных от начала координат на расстояние $|b - a - c|$. При $b - a - c = 0$ начало координат является кратною точкою по меньшей мере порядка $\bar{p}$.

4) При $|p_1|\, q_2$ четном на каждой кривой класса PP существует по меньшей мере $\bar{p}$ точек, удаленных от начала координат на расстояние $|c - a - b|$. При $c - a - b = 0$ начало координат является кратною точкою по меньшей мере порядка $\bar{p}$.

5) Кривые класса PP являются рациональными иривыми. Их степень n дана формулой

$$n = |p'q| + |pq'| + |p'q + pq' + 2qq'|$$

если постоянные p и p' имеют одинаковые знаки. Эта формула имеет место и в двух следующих случаях:

1) $p' < 0,\ p > 0,\ p'q + pq' + 2qq' \geqq 0$,
2) $p' > 0,\ p < 0,\ p'q + pq' + 2qq' \leqq 0$.

В остальных случаях:

1) $p' < 0,\ p > 0,\ p'q + pq' + 2qq' < 0$
2) $p' > 0,\ p < 0,\ p'q + pq' + 2qq' > 0$

имеет место неравенство

$$n < |p'q| + |pq'| + |p'q + pq' + 2qq'|.$$

Résumé

ENCORE SUR UNE CLASSE DE COURBES ALGÉBRIQUES

NIKOLAJ PODTJAGIN, Bratislava

Dans cet article on étudie une classe de courbes nommées par l'auteur les courbes de la classe PP qui sont d'une généralisation des courbes de la classe P étudiées par l'auteur dans son article [1]. Ces courbes sont données par les équations

$$x = \mathrm{a} \cos qq'\omega + \mathrm{b} \cos (p + q)\, q'\omega + \mathrm{c} \cos (p'q + pq' + qq')\, \omega\,,$$
$$y = \mathrm{a} \sin qq'\omega + \mathrm{b} \sin (p + q)\, q'\omega + \mathrm{c} \sin (p'q + pq' + qq')\, \omega\,,$$

où le ω figure comme un paramètre changeant dans l'intervalle $[0, 2\pi/q)$, p et q, aussi que p' a q' sont les nombres entiers, n'ayant pas de diviseurs communs, q a q' étant de plus positifs, $\bar{q}$ est le plus grand diviseur commun des nombres q a q', a, b, c sont des constantes positives arbitraires.

Dans l'article on démontre qu'aux courbes de la classe PP appartiennent les soi-disantes épiépicycloïdes, épihypocycloïdes, hypoépicycloïdes et hypohypocycloïdes.

On montre quelques propriétés générales de ces courbes.

En posant

$$p = \bar{p}p_1\,; \quad p' = \bar{p}p_2\,,$$

où $\bar{p}$ est le plus grand diviseur commun de nombres $|p|$ et $|p'|$, on démontre, que

1) Sur toute courve de la classe PP existent précisément $\bar{p}$ points éloignés de l'origine à la distance a + b + c. Pour chaques courbes de la classe PP, sauf les hypo-hypocycloïdes simples, ces points sont les points ordinaires.

2) Dans le cas où le nombre $|p_2|\, q_1$ est pair, sur toute courbe de la classe PP existent au moins $\bar{p}$ points éloignés de l'origine à la distance $|\mathrm{a} - \mathrm{b} - \mathrm{c}|$. Dans le cas où $\mathrm{a} - \mathrm{b} - \mathrm{c} = 0$, l'origine est un point multiple au moins d'ordre $\bar{p}$.

3) Dans le cas où tous les nombres $|p_1|$, $|p_2|$, q_1, q_2 sont impairs, sur toute courbe de la classe PP existent au moins $\bar{p}$ points éloignés de l'origine à la distance $|\mathrm{b} - \mathrm{a} - \mathrm{c}|$. Dans le cas où $\mathrm{b} - \mathrm{a} - \mathrm{c} = 0$, l'origine est un point multiple au moins d'ordre $\bar{p}$.

4) Dans le cas où le nombre $|p_1|\, |q_2|$ est pair, sur toute courbe de la classe PP existent au moins $\bar{p}$ points éloignés de l'origine á la distance $|\mathrm{c} - \mathrm{a} - \mathrm{b}|$. Dans le cas où $\mathrm{c} - \mathrm{a} - \mathrm{b} = 0$, l'origine est un point multiple au moins d'ordre $\bar{p}$.

5) Toute courbe de la classe PP est une courbe rationnelle. Leur ordre n est donné par la formule

$$n = |p'q| + |pq'| + |p'q + pq' + 2qq'|\,,$$

si les nombres p, p' ont les mêmes signes. Cette formule a lieu aussi dans les deux cas suivants:

1) $p' < 0;\ p > 0;\ p'q + pq' + 2qq' \geqq 0,$
2) $p' > 0;\ p < 0;\ p'q + pq' + 2qq' \leqq 0.$

Dans les deux cas restent

1) $p' < 0;\ p > 0;\ p'q + pq' + 2qq' < 0,$
2) $p' > 0;\ p < 0;\ p'q + pq' + 2qq' > 0$

a lieu l'inégalité

$$n < |p'q| + |pq'| + |p'q + pq' + 2qq'| .$$