Časopis pro pěstování matematiky

Jan Baptista Pavlíček
Sto let od smrti Jánose Bolyaie

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 85 (1960), No. 2, 241--255

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108389

STO LET OD SMRTI JÁNOSE BOLYAIE

JAN B. PAVLÍČEK, Praha

JÁNOS BOLYAI došel k objevu neeukleidovské geometrie, který ho tolik proslavil, jako student sotva třiadvacetiletý. V několika letech rozvedl nový geometrický systém, a když mu bylo třicet let, vykonal již vlastně vše, čím si získal v dějinách matematiky nesmrtelné jméno. Předčasným vyzráním i dílem dalekosáhlého významu nám připomíná svoje současníky N. H. ABELA a E. GALOISE. Na rozdíl od nich však J. Bolyai neumírá předčasně, ale dožívá se věku padesátiosmi let. Po svém velkém objevu je zlomen tím, že jeho dílu nebyla nikým věnována pozornost, jaké zasluhovalo. Deptán nepřízní okolností a nemocí, zabývá se matematikou dále, ale jeho úsilí zůstává již bez úspěchu, i když ve své geniálnosti anticipoval leccos z pozdějšího vývoje.

János Bolyai byl zanícen pro vědu, ale ne pro takovou, jež hledá cíl sama v sobě. S překvapivou jasností si byl vždy vědom povinnosti skutečného vědce podílet se na zápase, jehož dosah přesahuje okruh odbornických zájmů. Nepřekvapuje nás proto, že J. Bolyai v posledních letech opuštěnosti snil o lepší budoucnosti lidstva a že se obíral myšlenkami, jež dnes hodnotíme jako utopistické. Sestavoval dokonce umělý mezinárodní jazyk, plných třicet let dříve, než vznikl Volapük a Esperanto.

János Bolyai umírá před sto lety opuštěn a neznám, ale jeho dílo žije dále. Letos si toto skvělé dílo i osudy jeho málo šťastného tvůrce připomíná celá světová veřejnost, neboť *Světová rada míru* plným právem zařadila oslavu památky Jánose Bolyaie mezi světová kulturní výročí.

V tomto článku, věnovaném památce Jánose Bolyaie, si chceme vedle jeho životních osudů připomenout jeho zásluhy o neeukleidovskou geometrii a seznámit se také s jeho další činností v matematice, o níž se zpravidla málo mluví.

Mládí J. Bolyaie (léta 1802—1823). J. Bolyai (*1802, †1860) žil v první polovině devatenáctého století, tedy v období prudkého rozvoje přírodních věd i techniky. Takový rozvoj však v té době můžeme pozorovat jen v západní Evropě, nikoli ještě v Rakousko-Uhersku a zvláště ne v prostředí, ve kterém vyrůstá J. Bolyai, totiž v Maďarsku. Tato agrární země byla tehdy na tak nízkém stupni industrialisace, že společenské podmínky si nevynucovaly zvýšený zájem o přírodní vědy, jako tomu bylo v zemích vyspělejších.

Jediný, na koho mohl ve své zemi J. Bolyai navázat, byl jeho otec FARKAS BOLYAI (*1775, †1856), který působil skoro 50 let jako profesor matematiky a fysiky na evangelickém gymnasiu v Maros-Vásárhely[1]) v Sedmihradsku. Říká se, že jím začínají novější dějiny matematické činnosti v Maďarsku. Stu-

[1]) Původní sídlo této školy bylo v Šarišském Potoku a v letech 1650—1654 na ní působil J. A. KOMENSKÝ.

doval na universitách v Německu[2]) a v Göttingen se seznámil s C. F. GAUSSEM, o dva roky mladším. Společné zájmy sblížily oba studenty tak, že se stali nejlepšími přáteli svých mladých let, o čemž svědčí i jejich korespondence z doby, kdy F. Bolyai žil již opět v Maďarsku.

F. Bolyai byl nadaným matematikem, ale jeho zájmy byly příliš široké: zabýval se též poesií, napsal několik dramat, překládal z angličtiny a němčiny a aktivně se staral o rozvoj maďarského jazyka. Jeho činnost v matematice není však nevýznamná. Již před příchodem do Göttingen se zabýval problémem rovnoběžek a dlouhou řadu let vášnivě hledal jeho řešení, ale marně. Znal dobře obdobné pokusy i výsledky matematiků, kteří se pokoušeli řešit tento problém již před ním (až na pokusy G. SACCHERIHO a J. H. LAMBERTA, které zůstaly neznámé rovněž jeho synovi) a zdá se, že nakonec došel k závěru, že problém je neřešitelný.

F. Bolyai je také znám svým latinským spisem *Tentamen juventutem studiosam in elementa matheseos ... introducendi ...*[3]), vydaným v letech 1832—33, který je jeho životním dílem. Buduje zde základy aritmetiky a geometrie. Pokouší se podat aritmetickou teorii komplexních čísel, snaží se již i o aritmetisaci pojmu proměnné veličiny, kterou nepojímá již geometricky, ale jako čas (což o něco později činí i W. R. HAMILTON) a anticipuje již takové pojmy, jako je množina, množinové operace, množina souvislá a supremum. Při budování geometrie vyjadřuje podivuhodně přesně požadavek její axiomatisace a je snad prvý, kdo mluví již o nezávislosti axiomů. Méně šťastný je však při realisaci vlastní axiomatisace geometrie. Za základní pojmy volí vedle bodu v podstatě ještě kružnici a kouli a pomocí nich chce definovat přímku a rovinu. Je pozoruhodné, že všichni, kdo se v novověku poprvé zamýšleli nad axiomatisací geometrie, uvažovali podobným způsobem, např. G. W. LEIBNIZ, L. A. CAUCHY a N. I. LOBAČEVSKIJ. Naproti tomu první axiomatické systémy geometrie sestrojené koncem 19. stol. (M. PASCH, G. PEANO a jiní) mají v podstatě přímku již mezi základními nedefinovanými pojmy, neboť metrická definice přímky byla příliš těžkopádná.

János Bolyai, který jevil pro matematiku od nejútlejšího věku nadání přímo zázračné, dostal první vzdělání od svého otce. Protože F. Bolyai chtěl synovi dát v matematice nejvyšší vzdělání, pojal úmysl poslat do ho Göttingen ke Gaussovi. Napsal proto svému dávnému příteli dopis s prosbou, aby vzal patnáctiletého syna na dva roky k sobě. Gauss na tento dopis neodpověděl, což způsobilo F. Bolyaiovi a hlavně jeho synovi trpké zklamání. F. Bolyai nechtěl poslat mladého Jana do ciziny samotného, a poslat s ním vychovatele, jak bylo tehdy zvykem,[4]) to bylo nad jeho prostředky. Protože na universitách ve

[2]) Proto je jeho křestní jméno uváděno často též německy, totiž WOLFGANG.
[3]) Kterak uvésti studující mládež do základů matematiky.
[4]) Sám F. Bolyai studoval v Německu jen proto, že provázel na studiích mladého barona Simona Keményho.

Vídni a v Pešti nepůsobil žádný matematik, který by se F. Bolyaiovi zdál pro syna dost vhodný, rozhodl se zajistit synovi budoucnost tím, že ho poslal studovat na vojenskou inženýrskou akademii do Vídně. To nemělo ovšem znamenat, že se Jan s matematikou rozloučí; naopak, otec počítal s tím, že Janovi bude zbývat ještě dosti času, aby se jí mohl věnovat.

J. Bolyai studoval ve Vídni v letech 1818 až 1823. Vídeňská akademie neměla však úroveň pařížské polytechniky a proto si Jan osvojil jen základy vyšší matematiky, ale ne více. Později prý hořce naříkal na otce, že ho odkázal na takové nedostatečné vyškolení v matematice. Při této příležitosti poznamenávají životopisci J. Bolyaie, že by hlubší vzdělání v matematice bývalo možná odvedlo Jana od teorie rovnoběžek k otázkám aktuálnějším. V každém případě je však politováníhodné, že tak geniální člověk jako J. Bolyai byl nucen vystačit s poměrně skrovným matematickým vzděláním a že ve svých, jak uvidíme, pozoruhodných snahách, zůstal v odlehlé Transsylvanii osamocen a odkázán sám na sebe.

Objev neeukleidovské geometrie (léta 1822—1833). J. Bolyai se počal zabývat problémem rovnoběžek již během svých studií ve Vídni. Když o tom r. 1820 psal svému otci, na nejvyšší míru ho tím vyděsil. F. Bolyai se obával, aby syn nepropadl téže vášni jako kdysi on, a protože nevěřil, že by se problém dal řešit, naléhavě synovi domlouval, aby zanechal svých pokusů dokázat Eukleidův axiom o rovnoběžkách.

„Nesmíš bádat o rovnoběžkách touto cestou; znám ji až na sám její konec — také já jsem prošel tuto bezednou noc, každé světlo, každá radost mého života byla v ní uhašena ... plavil jsem se ke každému úskalí tohoto pekelného mrtvého moře, ale vždy jsem se vracel s roztříštěným stěžněm a potrhanými plachtami a od té doby se datuje ztráta mého humoru a můj pád ... Nech teorii rovnoběžek na pokoji, ... může Tě připravit o všechen Tvůj čas, o Tvoje zdraví, o Tvůj klid a o všechno Tvoje životní štěstí!“[5])

Otcovo napomínání nemělo však na syna žádný vliv. Po třech letech neúmorné práce a dlouhého tápání přišel Jan na stopu správného řešení a píše otci, že stvořil „z ničeho nový, jiný svět“. Pokoušel se totiž dokázat Eukleidův axiom o rovnoběžkách nepřímo, a když očekávaný spor se dlouho nedostavoval, počal tušit, že důsledky negace axiomu tvoří bezesporný systém. Roku 1825 předložil otci první soustavný nárys nové geometrie a rok na to poslal písemné zpracování svých výsledků svému bývalému učiteli Wolterovi von Eckwehr (tento první spis o výsledcích J. Bolyaie se bohužel nedochoval). V následujících letech prohluboval Jan svoje výsledky a sepisoval práci, kterou chtěl vydat tiskem. Ačkoliv F. Bolyai nebyl přesvědčen, že jeho syn problém rozřešil, svolil, aby práce vyšla jako dodatek k jeho spisu „Tentamen“, jenž byl otištěn r. 1832. Již r. 1831 vyšla však tiskem Janova práce jako sepa-

[5]) [2a], str. 76, 82.

rát. Byla sepsána latinsky a je dnes všeobecně označována prvním slovem jejího dlouhého latinského názvu jako *Appendix* (celý název viz Seznam 1).[6])

Na synovo přání poslal F. Bolyai ještě r. 1832 Appendix k posouzení Gaussovi se slovy: „*Můj syn dá na Tvůj posudek víc než na mínění celé Evropy*".[7]) Gauss spis přečetl a svému příteli Ch. L. GERLINGOVI napsal:

„*... tyto dny mi přišel z Maďarska malý spis o neeukleidovské*[8]) *geometrii, ve kterém opět nalézám všechny svoje myšlenky a výsledky. Jsou zde velmi elegantně vyloženy, i když pro nezasvěcence příliš stručně a tudíž poněkud těžko přístupnou formou. Autorem je velmi mladý rakouský důstojník ... Považuji tohoto mladého matematika Bolyaie za genia prvého řádu.*"[9])

Na rozdíl od tohoto dopisu psal Gauss v odpovědi F. Bolyaiovi víc o sobě než o mladém Janovi:

„*Nyní něco o práci Tvého syna. Jistě se na okamžik zarazíš, jestliže začnu tím, že ji nemohu chválit, ale nemohu jinak! Chválit ji by znamenalo chválit sebe samotného: neboť celý obsah spisu, cesta, kterou se Tvůj syn dal, i výsledky, k nimž došel, se téměř všude shodují s mými úvahami, z nichž některé jsem provedl již před 30—35 lety. Skutečně jsem tím nanejvýš překvapen.*

Měl jsem v úmyslu nepublikovat za svého života vůbec nic ze svých výsledků, z nichž jsem ostatně dosud jen velmi málo zachytil na papír. Mnozí nemají totiž vůbec pravého pochopení pro věc, o kterou zde běží, a já sám jsem našel jen velmi málo lidí, kteří chápali s náležitým zájmem to, co jsem jim sděloval. Aby to mohl někdo chápat, musí si dobře uvědomit, co zde vlastně není v pořádku, a v tom většina lidí nemá jasno. Naproti tomu jsem však chtěl časem své úvahy a výsledky sepsat, aby neodešly se mnou do hrobu.

Velmi jsem tedy překvapen, že jsem nyní této práce ušetřen, a velmi mě těší, že právě syn mého dávného přítele mě tak zvláštním způsobem předešel ...".[10])

F. Bolyai byl Gaussovou odpovědí velmi potěšen, neboť seznal, že jeho syn problém skutečně vyřešil, a poslal ji synovi s poznámkou:

„*Gaussova odpověď o Tvé práci je velmi krásná a je naší vlasti a národu ke cti.*"[11])

Zcela jinak působila však Gaussova odpověď na Jana. Zprvu nechtěl vůbec věřit, že Gauss nezávisle na něm a již před ním dospěl k témuž objevu. Nemohl pochopit, že Gauss neuznal za nutné tak důležitý objev uveřejnit nebo se o něm alespoň zmínit tiskem.

Je známo, že Gauss si byl platnosti neeukleidovské geometrie plně vědom již někdy kolem r. 1816. Jestliže se zařekl cokoliv o této geometrii publikovat a jestliže zachoval na veřejnost pečlivé mlčení, i když se dověděl o tom, že

[6]) Seznam prací J. Bolyaie je uveden na konci článku.
[7]) [2a], str. 91.
[8]) [über die Nicht-Euklidische Geometrie].
[9]) [2a], str. 72.
[10]) [2a], str. 92—93.
[11]) [2a], str. 36.

k témuž objevu došel také J. Bolyai a Lobačevskij, on, který nezřídka v Göttingische Gelehrte Anzeigen referoval o matematických novinkách, pak si to lze sotva vysvětlit jinak, než že se mu nedostávalo odvahy vystoupit proti oficiálním idealistickým koncepcím o vztahu geometrie ke skutečnému prostoru, který nás obklopuje, jež ostatně nesdílel.[12]) Všemi uctívaný princeps mathematicorum se možná vyhýbal sporům hlavně proto, aby nepřišel o drahocenný čas, který chtěl co nejvíce věnovat vlastní vědecké práci a to v dobré naději, že vývoj sám dříve či později nenásilně překoná mylné předsudky.[13]) J. Bolyai posuzoval však celou věc z jiného hlediska. Poslyšme jeho vlastní slova, jimiž komentoval sám pro sebe Gaussovu odpověď:

„Podle mého názoru, a jak jsem přesvědčen, také podle názoru každého nepředpojatého člověka, se jeví všechny Gaussem uvedené důvody, proč nechtěl ze svých prací o tomto tématu za svého života nic publikovat, jako chatrné a nicotné. Vždyť ve vědě právě tak jako v samém skutečném životě jde vždy o to, aby vše, co je nutné, obecně prospěšné ale ještě nejasné, bylo náležitě vysvětlováno a aby chybějící či spíše dřímající smysl pro pravdu a právo byl burcován, náležitě utvrzován a podporován. S živým pochopením pro matematiku se na neštěstí a k všeobecné škodě setkáváme jen u mála lidí; důsledněji vzato, z tohoto důvodu či pod touto záminkou by si byl Gauss musel nechat pro sebe ještě značnou část svých znamenitých prací. Okolnost, že i mezi matematiky a při tom i mezi nejslavnějšími je mnoho povrchních lidí, nemůže být pro rozumného člověka důvodem, aby pracoval povrchně a průměrně a ponechával vědu v letargii a ve zděděném zastaralém stavu. Takové chování může být nazváno jedině jako protipřirozené a nanejvýše nesmyslné; proto tím hůř, jestliže Gauss ... místo aby psal o způsobu, jak dobré věci proklestit širokou cestu, se tomu naopak vyhýbá a při tom v pobožných přáních a projevech zármutku vylévá svoje stížnosti nad nedostatkem náležitého vzdělání lidí. V tom věru nespočívá život ani účinná zásluha ...“[14])

Okolnost, že Appendix zůstal bez ocenění, měla pro J. Bolyaie osobně jeden neblahý důsledek. Musíme si uvědomit — a je nám to jistě těžko pochopitelné — že Jan vykonal hlavní práci na svém objevu v době, kdy byl již od r. 1823 činný v armádě jako důstojník-inženýr. Do roku 1832 prošel několika garnisonami. Nejprve to byl Temesvár a Arad; v bažinatém terénu však onemocněl malarií a proto byl ze zdravotních důvodů r. 1830 přeložen do Lvova. Dovedeme si představit, s jakým přemáháním se Jan věnoval službě v armádě, když myslí byl úplně jinde. Jeho snahou bylo prokázat své schopnosti v matematice, aby mohl řadovou vojenskou službu zaměnit např. za učitelské povolání. K tomu by bylo jistě stačilo Gaussovo ocenění Appendixu. Gaussovým mlčením však Janovy naděje pohasly. Přesto poslal J. Bolyai nejvyššímu velitel-

[12]) Více o tom viz [5], str. 151—152.
[13]) Je zvláštní, že Gauss se podivným způsobem zachoval též v souvislosti s Abelovými prvními pracemi o eliptických funkcích, kdy se jistě „křiku Boioťanů“ bát nemusel. Viz o tom blíže [4], str. 195—197.
[14]) [2a], str. 96.

ství opis Gaussova dopisu s německým překladem Appendixu, který mezitím sám pořídil (viz Seznam 2), jako doklad k žádosti o tříletou dovolenou, kterou odůvodňoval potřebou propracovat další matematické myšlenky. Jeho žádosti nebylo vyhověno. Velitelství si pouze do jeho osobního rejstříku zaneslo poznámku:

„Roku 1832 se mu dostalo od dvorního rady rytíře von Gausse, jednoho z největších matematiků, uznání za jakýsi spis ... Schopný zastávat místo profesora vyšší matematiky".[15])

Není ale divu, že v jeho rejstříku přibývaly i záznamy tohoto druhu:

„Málomluvný, vznětlivý, prchlivý, vyhýbá se styku s ostatními důstojníky, v inženýrské službě jeví nedostatek služební horlivosti, vášnivý šachista."[16])

Prchlivost a vznětlivost, o které je zde zmínka, měla ještě hlubší příčinu: Jan byl chorobně citlivý, ba exaltovaný, což zdědil po své matce. To, že nebylo oceněno dílo, na kterém tak horlivě pracoval, i to, že neměl nadějných vyhlídek do budoucnosti, to vše působilo na jeho mysl jistě nepříznivě.

Roku 1832 byl J. Bolyai jmenován kapitánem druhé třídy a přeložen do Olomouce. Za jízdy do nového působiště došlo k dopravní nehodě a Jan utrpěl otřes mozku. Prchlivé jednání s celníky mělo pak za následek, že byl r. 1833 pensionován jako poloviční invalida a ještě téhož roku se vrátil k otci do Maros-Vásárhely.

Další osudy (léta 1834—1860). Vznětlivá povaha J. Bolyaie způsobila, že po návratu domů docházelo mezi ním a otcem ke sporům, jež končily otevřenou roztržkou. Proto již r. 1834 přesídlil Jan do Domáldu na usedlost svého otce. Domáld byla vesnice, jež ještě roku 1930 čítala pouhých 870 obyvatel. Zde žil J. Bolyai opuštěn, provázen pouze ženou se třemi dětmi, se kterou nemohl však být oddán, protože nemohl zaplatiti kauci požadovanou vojenskými úřady k povolení sňatku. Zde, vzdálen kulturního světa, prožil dvanáct let života v ústraní a nemocen. Jediný styk s ostatním světem mu zjednávala korespondence s otcem, jež se kromě administrativních záležitostí týkala především matematiky. Když se r. 1846 ukázalo, že Jan na usedlosti špatně hospodařil, otec nesvolil, aby zde dále zůstal, a usedlost pronajal. J. Bolyai přesídlil s rodinou zpět do Maros-Vásárhely, kde si postavil domek; ale i zde žil opuštěn a skoro v opovržení.

Jaké mohli mít lidé mínění o J. Bolyaiovi? Jeho otec byl váženým člověkem, byl pýchou školy i města. Ale Jan? Vždyť se proslýchalo, že byl propuštěn z armády pro nesnášenlivost a zálibu v soubojích, že pak vedl zpustlý život a že se nepohodl se svým vlastním otcem. Napsal prý sice spis o nějaké nesrozumitelné věci, o kterém se dokonce sám Gauss vyslovil pochvalně, ale možná že šlo o myšlenky jeho otce; vždyť spis vyšel ostatně jako dodatek ke knize Farkase Bolyaie.

[15]) [2a], str. 73.
[16]) [2a], str. 73.

Příznačné pro postavení J. Bolyaie v očích současníků je jistě i to, že jeho dávný přítel K. Szász, který bydlel v Maros-Vásárhely čtyři roky, ho ani jednou nenavštívil, a vůbec se s ním nesetkal aby se nezkompromitoval. Při tom J. Bolyai a Szász byli za studií ve Vídni velmi blízcí přátelé a vedli spolu velmi časté a podnětné debaty o problému rovnoběžek.

J. Bolyai se v nových podmínkách po návratu z armády nepřestal zabývat matematikou. Věnoval se hlavně geometrii a zamýšlel sepsat podrobnou práci. Skutečně se také dochovala rozsáhlá předmluva z r. 1834 německy psaného spisu *Raum-Lehre* (viz Seznam 4), jehož další část sepsal až později.

Již před sepsáním Appendixu J. Bolyai zjistil, že ze sférické trigonometrie lze odvodit trigonometrii hyperbolické roviny, jestliže místo stran a, b, c trojúhelníka píšeme ve vztazích $a\sqrt{-1}$, $b\sqrt{-1}$, $c\sqrt{-1}$. V Appendixu tento výsledek publikovat nemohl, protože teorie komplexních čísel byla po jeho soudu, a v tom měl pravdu, ještě nedostatečně propracována. Proto s tím větší horlivostí se pustil do práce, když se r. 1837 od otce dozvěděl, že v Lipsku vypsala Jablonowského vědecká společnost konkurs na práci, v níž by byla rozvinuta teorie komplexních čísel. Téhož roku práci dokončil (viz Seznam 3) a odeslal. Nebyla však uznána za vyhovující[17]) a to byla rána, kterou J. Bolyai nesl jen velmi těžko. Píše: „*škoda, že tento velký poklad padl do nevhodných rukou*“.[18]) Ačkoli Janova teorie komplexních čísel byla opravdu pokladem, jak uvidíme v příštím odstavci, přece nebylo snadné ji ocenit. Měl správné tušení, jak nutno postupovat, ale nepodařilo se mu podat propracovaný a obecně srozumitelný výklad vlastních myšlenek. Ostatně ani paragrafům, v nichž mluvil o odvození „absolutní“ trigonometrie, nemohl tehdy v Lipsku nikdo rozumět.

Rok 1848 svými revolučními událostmi vyvedl J. Bolyaie na čas z osamělosti. Jako bývalý důstojník by byl rád nastoupil vojenskou službu, ale bránila mu v tom nemoc. Zúčastnil se však tajné schůzky revolucionářů, na které předložil plán, jak vojensky vyčistit celou Transsylvanii, kde revoluce dosáhla již částečného úspěchu. Jeho plán přijat nebyl. Když povstání bylo potlačeno, vrátil se J. Bolyai opět do samoty, kterou sotva opustil, a s velkou vervou se pustil do práce.

Již během revolučních dnů mu totiž jeho otec zaslal Lobačevského spis „*Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien*“, který byl vydán r. 1840 v Berlíně. J. Bolyai byl velmi překvapen, když zde našel všechny výsledky, jež sám uveřejnil v Appendixu. Nechtěl věřit, že by také někdo jiný a snad již dříve učinil týž objev. Ve své podrážděnosti se domníval, že tento spis napsal možná sám Gauss a skrývá autorství pod ruským jménem, neboť sám nechtěl o nové geometrii nic publikovat, nebo že z téhož důvodu podnítil nějakého

---

[17]) Přihlášeny byly jen tři práce, autory ostatních dvou byli F. Bolyai a F. Kerekes z Debrecenu. Žádná z prací nebyla uznána za vyhovující, jen Kerekes obdržel polovinu vypsané ceny.

[18]) [2a], str. 130.

ruského matematika k vydání tohoto spisu a sdělil mu Janovy myšlenky. Proto s velkou energií začal dokazovat, že spis je pouhý plagiát jeho Appendixu, sepisoval podrobnou kritiku (viz Seznam 5) a hledal chyby, jež by to prokázaly. Nakonec J. Bolyai seznal, že autor spisu došel ke svým výsledkům samostatně a že je to genius.

Chápeme, že J. Bolyai podlehl na čas svému omylu. Byl po dlouhou řadu let odtržen od vědeckého světa a nevěděl, že po dvou tisíciletích marných pokusů byl problém rovnoběžek řešen skoro současně a nezávisle na sobě třemi matematiky. To ostatně nevěděl ani Lobačevskij, který se po celý život nikdy nedozvěděl, že jeho spisy o nové geometrii vůbec někdo s porozuměním čte. Gauss s ním nikdy spojení nenavázal a Bolyaiové bohužel také ne.

Po roce 1850 se J. Bolyai věnoval opět geometrii a vrátil se k sepisování spisu Raum-Lehre. Spis zůstal nedokončen, neboť úkol, který si Jan předsevzal, byl příliš rozsáhlý a jeho tvůrčí síly již ochabovaly. Kromě toho se v těchto letech J. Bolyai zabýval ještě úplně jiným tématem: snil o lepší budoucnosti lidstva a začal sepisovat sociálně reformní program ve formě „*Blahovědy*", která měla také podat encyklopedii všeho vědění. Navazuje zde na některé myšlenky svého otce a sní o tom, jak lidstvu pomoci, aby se „*sjednotilo ve vzájemné lásce*" a aby „*dosud panující nesoulad byl proměněn v harmonii největšího vnitřního i vnějšího blaha všech i každého jedince*". K tomu „*má pomáhat věda hlubokým poznáním přírody*" a „*odhalením všech souvislostí*".[19])

Ve své „Blahovědě" se J. Bolyai nezabývá rozborem stávajících pořádků. Ví ovšem, že „*společnost je plna bídy a neštěstí, ale nemusí být nutně takovou. Je možné být šťastným již zde na zemi.*"[20]) Hlavní příčinu lidské bídy spatřuje v individualismu, který nešetří zájmů ostatních. Je „*... smutné a pochybné ... a dokonce nebezpečné ... stavět svoje osobní štěstí na útlaku ostatních.*"[21]) „*Jedinec může dosíci blaha a to natrvalo jen tehdy, jestliže se ho dostane všem a nikdo nemůže být dokonale šťasten, jestliže vidí, že blaho není zajištěno pro všechny*".[22])

Některé myšlenky J. Bolyaie jsou velmi konkrétní. Uvažuje např. již o řízené dělbě práce, o zespolečenštění výroby a o nutnosti regulovat školství a výchovu. Zabývá se také myšlenkou, že by měla být zřízena světová akademie věd se sídlem v Londýně, jež by měla pobočku v každém z pěti světadílů. Sjednocení lidstva mu leží zvlášť na srdci. Ví, že by k dorozumění velice pomohl společný *mezinárodní jazyk,* kterému by se každý povinně učil vedle své mateřštiny. Tento jazyk by také byl vydatnou pomocí vědcům, aby mohli lépe držet krok s prudkým vývojem vědy: vždyť život jednotlivce je tak krátký, že není času na tříštění sil. J. Bolyai se sám ujímá těžkého úkolu; houževnatě se věnoval

[19]) Všechny čtyři citáty [2a], str. 189.
[20]) [6], str. 19.
[21]) [6], str. 19.
[22]) [2a], str. 192.

jazykovým studiím a sám na základě maďarštiny vypracoval nový mezinárodní jazyk. V pozůstalosti byly nalezeny rozsáhlé slovníky jeho jazyka a jím začal již sepisovat nejdůležitější část své „Blahovědy".

Poslední léta svého života prožil J. Bolyai naprosto osamocen. Roku 1856 zemřel jeho otec, který jediný mu trochu rozuměl a kterého J. Bolyai přes všeliká nedorozumění velice miloval. Téhož roku ho také opustila i s dětmi jeho družka. J. Bolyai, zesláblý nemocí, skoro nevycházel ze svého bytu, ale horečně pracoval dále, dokud nebyl nucen ulehnout. V lednu 1860 onemocněl na zápal plic a 27. ledna zemřel. Pohřbu se kromě vojenských zástupců zúčastnily jen tři osoby a po letech nikdo nevěděl, kromě jeho bývalé hospodyně, kde má hrob.

Vědecká práce Jánose Bolyaie. Plný název *Appendixu* (viz Seznam 1) vystihuje hlavní záměr tohoto spisu, totiž podat výklad „absolutně platné" geometrie. Dnes názvem absolutní geometrie rozumíme obvykle soubor geometrických vět, k jejichž důkazu není třeba se opírat ani o Eukleidův axiom rovnoběžek ani o jeho negaci. Naproti tomu J. Bolyai rozuměl „absolutně platnou" geometrií širší soubor vět, totiž těch, jež platí „absolutně", tj. nezávisle na tom, jaký tvar axiomu rovnoběžek předpokládáme. J. Bolyai si při tom povšiml, že některé věty patřící vyloženě eukleidovské geometrii lze formulovat obecněji tak, že pak věta platí i v geometrii hyperbolické, čili že věta v této nové formulaci platí, jak říkal, *absolutně*.

Osvětlíme to na příkladě. Sinová věta eukleidovské geometrie je dána soustavou rovnic $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$, kdežto v hyperbolické geometrii soustavou $\frac{\operatorname{sh}\frac{a}{k}}{\sin A} = \frac{\operatorname{sh}\frac{b}{k}}{\sin B} = \frac{\operatorname{sh}\frac{c}{k}}{\sin C}$ (zde k je tzv. parametr hyperbolického prostoru, při čemž $-\frac{1}{k^2}$ je jeho křivost). Protože obvod kružnice poloměru r je dán v eukleidovské resp. hyperbolické geometrii výrazem $2\pi r$ resp. $2\pi k \operatorname{sh}\frac{r}{k}$, lze po vynásobení první soustavy rovnic číslem 2π a druhé soustavy číslem $2\pi k$ psát obě soustavy v jediném tvaru $\frac{\bigcirc a}{\sin A} = \frac{\bigcirc b}{\sin B} = \frac{\bigcirc c}{\sin C}$, jestliže označíme jako J. Bolyai symbolem $\bigcirc\, r$ obvod kružnice o poloměru r. Tak dostáváme sinovou větu v absolutním tvaru.

Hlavní snahou J. Bolyaie bylo formulovat celou geometrii v absolutním tvaru a ne tedy podat podrobný výklad hyperbolické geometrie, jak to činí ve svých spisech Lobačevskij. Je ovšem samozřejmé, že J. Bolyai si musel novou geometrii osvojit do velkých podrobností, aby mohl odvodit trigonometrické a diferenciální vztahy (pro elementy délkové či plošné různých útvarů). V Appendixu však, který čítá ostatně pouhých 26 stran, věnuje základním pojmům a vlastnostem jen nejnutnější pozornost. To se týká např. vlastností horocyklu, horosféry a ekvidistanty,[23]) kdežto např. fakt, že přímky souběžné se v příslušné orientaci asymptoticky blíží, uvádí nepřímo jen tím, že tyto přímky nazývá asymptotickými.

V celku možno říci, že si J. Bolyai osvojil hyperbolickou geometrii v téže míře jako Lobačevskij. Pokoušel se též stanovit objem obecného čtyřstěnu, ale podařilo se mu to — podobně jako Lobačevskému a Gaussovi — jen ve speciálním případě, kdy totiž každá stěna čtyřstěnu $ABCD$ je pravoúhlý trojúhelník (čili $AB \perp BC \perp CD \perp CA$).

V Appendixu je několik paragrafů, jež nemají u Lobačevského obdoby: pojednávají o geometrických konstrukcích (pomocí pravítka a kružítka) a je v nich udána např. konstrukce kolmice na rameno úhlu, jež je souběžná s druhým ramenem, a konstrukce souběžky vedené daným bodem k dané přímce. J. Bolyai dochází též k zajímavému závěru, že v hyperbolické rovině lze pomocí pravítka a kružítka provést kvadraturu některých kruhů: lze ji provést pro kruh o poloměru r právě tehdy, jestliže číslo $ch\,\frac{r}{k}$ je racionální číslo $\frac{p}{q} \leqq 2$, kde p, q jsou přirozená nesoudělná čísla, při čemž q má tu vlastnost, že rovnici $x^{4q} - 1 = 0$ lze řešit druhými odmocninami (Gaussovo řešení této otázky, jež souvisí s konstrukcí pravidelných mnohoúhelníků v eukleidovské rovině pouhým pravítkem a kružítkem, ovšem J. Bolyai znal). Disjunkce, že buď v rovině platí Eukleidův axiom rovnoběžek nebo, že je možná kvadratura kruhu, mu připadala pozoruhodnou a uvádí ji také v plném názvu Appendixu.

J. Bolyai i Lobačevskij věřili, že hyperbolická geometrie je bezesporná, ale formální důkaz pro to neměli. Po celý život se touto otázkou zabývali. Oba věděli, že eukleidovská geometrie je limitním případem hyperbolické, jestliže $k \to \infty$, kde k je parametr o němž byla již výše řeč. Oba také věděli, že sférická trigonometrie má absolutní platnost a že formální záměnou délek stran a, b, c trojúhelníka ve sférické trigonometrii za výrazy $a\sqrt{-1}$, $b\sqrt{-1}$, $c\sqrt{-1}$ dostaneme hyperbolickou trigonometrii. Kromě toho oba věděli, že na horosféře platí geometrie eukleidovská. Lobačevskij viděl další známky bezespornosti v tom, že nová geometrie měla obdobné aplikace v analyse jako geometrie eukleidovská. Naproti tomu J. Bolyai byl znepokojován tím, že všechny tři prve uvedené důvody prokazovaly bezespornost pouze rovinné geometrie ale ne ještě bezespornost geometrie prostorové. V Poznámkách (viz Seznam 5) kritisuje Lobačevského, že tuto jemnost přehlédl. J. Bolyai v pozdějších letech (1856) zkoumal bezespornost prostorové geometrie hyperbolické tak, že uvažoval pět bodů, z nichž žádné čtyři neleží v rovině; těmi je určeno 10 úseček, 10 troj-

[23]) Zde i v dalším užívám terminologie jako v [4].

úhelníků a 30 stěnových úhlů; J. Bolyai potom vyšetřoval, zda trigonometrické vztahy mezi těmito elementy nejsou ve sporu. Spor však nenalezl (po nějaký čas se na základě chyby ve výpočtu domníval, že spor nalezl). Totéž pak chtěl opakovat pro šest i více bodů, ale výpočty byly v těchto případech značně komplikované.

J. Bolyai se také zabýval otázkou, jak zjistit, která geometrie ovládá náš konkrétní prostor a jak určit hodnotu parametru k v případě, že jde o geometrii hyperbolickou. Tytéž myšlenky měli, jak víme, i Lobačevskij a Gauss, kteří je mohli snadno realisovat: Lobačevskij jako astronom měl k disposici nejnovější výsledky astronomických měření a Gauss měření geodetických. Nic takového neměl ve své osamělosti J. Bolyai po ruce, takže zůstalo jen při jeho úvahách.

Appendix měl být jen předehrou k rozsáhlému dílu o geometrii, na kterém J. Bolyai začal pracovat již r. 1834. V jakési konečné formulaci napsal pod názvem *Raum-Lehre* (viz Seznam 4) jen tři kapitoly, v nichž se zabývá logickým budováním geometrie. Jako jeho otec, i J. Bolyai bere za základní pojmy bod a vztah shodnosti dvou dvojic bodů, v dnešní symbolice psáno $AB \equiv A'B'$. Je pozoruhodné, jak na rozdíl od otce definuje jednoduše přímku a rovinu. Nejprve definuje kružnici $\bigcirc\, ABC$ jako množinu $\underset{X}{\mathcal{E}}(ABX = ABC)$,[24] jestliže $A \neq B$. Body A, B, C prohlásí za kolineární, jestliže $\bigcirc\, ABC$ se redukuje na jediný bod. Jsou-li nyní A, B, C nekolineární body, jsou body D, E symetrické vzhledem k trojici A, B, C čili v symbolice J. Bolyaie $ABCD \div ABCE$, jestliže $ABCD \equiv ABCE$. Body A, B, C, D jsou komplanární, jestliže $ABCX \div ABCD \Rightarrow X = D$. Dále zavádí kolmost, pojem polopřímky, úsečky a úhlu, při čemž uspořádání chápe ještě intuitivně. Zato již tuší nutnost stanovit axiom spojitosti. Když se marně pokoušel dokázat větu, že každá koule se středem v bodě A má společný bod s přímkou AB, poznamenává: „*Nejjednodušší je vzít spojitost [die Stetheit] absolutní přímky za axiom*".[25]) Dále pak se zabývá existenčními otázkami (konstrukcemi).

Pokus J. Bolyaie o logickou výstavbu geometrie nebyl jím doveden do konce. V literatuře o základech geometrie nebylo tohoto způsobu, pokud je mi známo, nikde využito, ačkoliv je překvapivě životaschopný, což se nedá říci např. o podobných pokusech Lobačevského.

Mimo nedokončeného rukopisu Raum-Lehre zanechal J. Bolyai ještě mnoho výsledků svých úvah o geometrii v rukopisných záznamech bez systematického uspořádání. Zabýval se např. otázkou, zda dva jehlany stejného objemu (objem jako třetina součinu obsahu podstavy a délky výšky) je možno rozložit na stejný konečný počet mnohostěnů tak, že odpovídající části jsou shodné. Narážel na nepřekonatelné potíže a možná že by byl býval odškodněn

---

[24]) $A_1A_2 \ldots A_n \equiv B_1B_2 \ldots B_n$ zastupuje soubor vztahů $A_iA_j \equiv B_iB_j$ pro všechny dvojice indexů i, j.

[25]) [2b], str. 246.

za neúspěch, kdyby byl věděl, že o totéž se marně pokoušel i sám Gauss, jak plyne z jednoho jeho dopisu z roku 1844. Teprve M. DEHN ve svých pracech z r. 1900 a 1902 dokázal, že to obecně není možné.

J. Bolyai se zabýval též *zobecněním Eulerovy věty* o mnohostěnech na případ mnohostěnů, jež nejsou jednoduše souvislé. Bohužel se jeho výsledky nedochovaly. Je pozoruhodné, že u J. Bolyaie se objevují ideje na jeho dobu zcela nové, jež patří do *topologie ploch a křivek*. Rozlišuje křivky prosté a křivky s uzly (einfache und knotige Linien). Pokoušel se definovat typy figur, jež nazýval prostými plochami. Prosté plochy dělil na plochy plné a plochy s otvory (volle und durchlöcherte Flächen). Věděl, že z plné plochy vznikne plocha nového typu operací, spočívající ve vyříznutí konečného počtu otvorů a spojením vždy dvou otvorů uchem.

Zájem o geometrii přiměl J. Bolyaie přemýšlet též o teorii *komplexních čísel*. Zmínili jsme se už o tom, že již při sepisování Appendixu věděl, že ze sférické trigonometrie lze odvodit hyperbolickou nahražením reálných argumentů imaginárními. Tento výsledek neuveřejnil v Appendixu jen proto, jak píše jinde, že nebylo tehdy ještě uspokojující teorie komplexních čísel. V tom má celkem pravdu.

„Ačkoliv komplexní čísla se zvláště u Eulera stala mocným analytickým prostředkem, ačkoli algebra si je bezpodmínečně vynutila a ačkoli Cauchy široko rozvinul teorii jejich funkcí, zůstala nicméně více trpěna než uznávána a jevila se spíše jako sama o sobě prázdná hra se symboly ...“,[26]) byť jakkoli užitečná. Sám Cauchy r. 1821 např. píše, že rovnice obsahující komplexní čísla „vzata doslova je nesprávná a nemá smysl“,[27]) nicméně s nimi počítá tak, „jako by $\sqrt{-1}$ byla reálná veličina, jejíž čtverec je -1“.[28]) O tom, zda operace s komplexními čísly odněkud nutně vyplývají nebo zda je naopak musíme teprve definovat, o tom neříká nic. Je zajímavé, že ještě r. 1847[29]) navrhuje řešit nejasno okolo veličiny $i = \sqrt{-1}$ tak, že i můžeme chápat jako reálnou proměnnou a rovnice mezi komplexními čísly chápat pak jako kongruenci modulo $(i^2 + 1)$. V geometrii byly imaginární elementy uvažovány již J. V. PONCELETEM (1822), ale i zde byly pociťovány jako „strašidla“ (J. STEINER). Na myšlenku znázorňovat komplexní čísla pomocí bodů v rovině připadl již J. WALLIS (1693). Podrobný výklad, který o tom podal teprve r. 1806 R. ARGAND,[30]) zůstal málo znám a věc se ujala teprve, když se o ní zmínil roku 1831 Gauss v jedné práci o teorii čísel.[31])

Takový byl stav teorie komplexních čísel, když J. Bolyai psal roku 1837

[26]) H. HANKEL, Theorie der Complexen Zahlensysteme, Leipzig 1867, str. 71.
[27]) Hankel, tamtéž str. 14.
[28]) Hankel tamtéž str. 14.
[29]) Exercices d'analyse et de phys. math. *4* (1847), str. 84.
[30]) Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires, dans les constructions géometriques, Paris, 1806.
[31]) Theoria residuorum biquadraticorum, Werke 2, 171.

svoje *Responsio*. Čítá pouhých osm listů, ale zato myšlenky zde podané jsou pozoruhodné. Předně je J. Bolyaiovi jasné, že operace s komplexními čísly musí být teprve definovány. Dále namítá, že Gauss při znázorňování celých komplexních čísel body čtvercové sítě v rovině rozšiřuje jen tak beze všeho pojem proporce, jenž platí pro veličiny reálné, také na veličiny komplexní. Proto se obírá komplexními čísly z aritmetického hlediska, totiž tak, že pro ně zavádí čtyři komplexní jednotky $+1$, -1, $+i$, $-i$. V pozůstalosti je doklad, že uvažoval též obecnější aritmetický systém se šesti jednotkami, ve kterém násobení definoval tak, že součin dvou jednotek byla opět některá jednotka. Zjistil však, že v takovém systému „neplatí nejkrásnější důsledky, ačkoliv v něm není absurdnosti". Co tím míní napovídají slova: „A také by pak druhá odmocnina měla více než dvě hodnoty."[32]) V Responsio J. Bolyai rozvíjí na tehdejší dobu novou teorii logaritmu komplexního argumentu a to tak, že tuto funkci pojímá jako inversní k exponenciální, definované nekonečnou řadou; pomocí logaritmu definuje pak mocninu s komplexním exponentem, což mu umožňuje zavést posléze goniometrické funkce komplexního argumentu. Krátce pak naznačuje, jak lze ze sférické trigonometrie odvodit trigonometrii hyperbolické roviny.

Responsio vyniká novostí myšlenek, ale bohužel také stručností a nejasným výkladem. Co nám je dnes jasné, to J. Bolyai teprve tušil a hledal. Podobné myšlenky, jaké měl on, objevují se i v tomto případě současně na jiném místě — tentokráte v Anglii. Roku 1844 začal W. R. HAMILTON tvořit teorii kvaternionů a r. 1837, tedy v téže době, kdy J. Bolyai píše Responsio, vydal Hamilton práci „Theory of conjugate functions or algebraic couples"[33]), ve které jsou komplexní čísla pojímána již jako dvojice reálných čísel.

Odezva díla Jánose Bolyaie. Appendix, geniální dílo mladého J. Bolyaie, se stal světovým matematikům známý krátce po smrti jeho tvůrce. Roku 1860, kdy J. Bolyai umírá ve své vlasti neznám a zapomenut, byl totiž v Německu vydán druhý svazek korespondence C. F. Gausse, který zemřel r. 1855. Zde byly uveřejněny dopisy, ve kterých Gauss vysoko cenil práce J. Bolyaie a Lobačevského. Užaslí matematikové se začali pídit po těchto pracích, o nichž neměli do této doby tušení, a v několika letech je vydali v překladech do francouzštiny, italštiny, němčiny a angličtiny. Současně v matematických časopisech vycházejí životopisné studie o dosud neznámých objevitelích nové geometrie.

Zatím co doba, kdy byl vytištěn Appendix nebyla ještě zralá k tomu, aby nový objev mohl být plně pochopen, bylo tomu nyní již jinak. Bouřlivý rozvoj matematiky vedl nutně různými cestami k poznání, že existují ještě jiné geometrie než je geometrie eukleidovská. Přes diferenciální geometrii došel k to-

[32]) Oba citáty [2a], str. 133.
[33]) Trans. of the Royal Irish Acad., *17* (1837), 393—423.

muto poznání B. RIEMANN (1854) a přes projektivní geometrii A. CAYLEY (1859). Proto podrobně rozvedený systém neeukleidovské geometrie vyvolal takový zájem a urychlil bádání v nových směrech geometrie.

Nemalý význam měl ovšem objev neeukleidovské geometrie i pro logickou výstavbu geometrie eukleidovské. Řada sporných otázek se vyjasnila a tím byla připravena půda pro vypracování prvních důsledných axiomatických systémů různých geometrií koncem 19. stol. (M. PASCH, G. PEANO, P. VERONESE, F. ENRIQUES, D. HILBERT aj.)

Objev neeukleidovské geometrie ve svých důsledcích změnil nejen chápání vztahu geometrie ke skutečnosti, ale vůbec chápání abstraktní stránky matematiky. Nejen že prokázal, že prostor není žádná apriorní nazírací forma, jež je člověku vrozena; prokázal také, že matematika odráží konec konců vždy zákonitosti materiálního světa, přičemž se matematika svými abstrakcemi nevzdaluje od objektivní skutečnosti, ale naopak vede k hlubšímu jejímu poznání.

Význam Jánose Bolyaie. Ačkoli ve svých samotářských úvahách o matematice připadl J. Bolyai, jak jsme viděli, na řadu pozoruhodných myšlenek, přece daleko největší význam má jeho objev neeukleidovské geometrie. Velkého významu tohoto objevu si byl sám velmi dobře vědom. Na konci německého přepracování Appendixu píše: „*Autor je přesvědčen o tom, že objasněním daného tématu byl proveden jeden z nejdůležitějších a nejvýznamnějších kroků k opravdovému obohacení vědy a vzdělání a tedy i k zlepšení lidského osudu.*“[34]) Tato slova nejsou nijak nadsazena. Současně se nám v nich implikací „od obohacení vzdělání k zlepšení lidského osudu“ představuje J. Bolyai jako stoupenec osvícenství a racionalismu a víme, že toto svoje přesvědčení projevil i svým dosud blíže nezhodnoceným podílem na úsilí o „nápravu věcí lidských“.

Jímá nás stesk při pomyšlení, že J. Bolyai se svým vzácným talentem byl tak žalostně závislý na okolnostech, které znemožnily, aby rozvinul všechny svoje ideje. Žil v zaostalém prostředí a vzdálen od center vědecké činnosti i oné atmosféry, která je nezbytná k vyzrání tvůrčích myšlenek, chybělo mu hlubší matematické vzdělání a nadto byl sám sužován nemocemi a vrozenou exaltovaností.

Avšak člověk je silnější než prostředí a okolnosti. Celé životní dílo Jánose Bolyaie, jeho neumdlévající síla jít za světlem poznání i pravdy a jeho přesvědčení, že vědec nemá práva nakládat se svým objevem, jak se jen jemu zlíbí, to vše je pro nás velkým povzbuzením i příkladem.

SEZNAM MATEMATICKÝCH PRACÍ JÁNOSE BOLYAIE

Tiskem vyšla jediná práce (1). V rukopisné pozůstalosti, jež je dnes uložena v rukopisném oddělení Maďarské akademie věd, se nacházejí vedle různorodých poznámek J. Bolyaie ještě spisy (2) až (5). S výjimkou posledního je J. Bolyai zřejmě připravoval k publikaci.

[34]) [2b], str. 203.

1. *Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens: a veritate aut falsitate Axiomatis XI. Euclidei (a priori haud unquam decidenda) independentem: adjecta ad casum falsitatis quadratura circuli goemetrica.*[35]) Vyšlo tiskem r. 1832 jako dodatek knihy F. Bolyaie „Tentamen". Několik prvních otisků (separátů) Appendixu bylo pořízeno již r. 1831. Čítá 26 stran, 43 paragrafů.
2. *Raumlehre unabhängig von der (a priori nie entschieden werdenden) Wahr- oder Falschheit des berüchtigten XI. Euklid'schen Axioms: für den Fall einer Falschheit desselben geometrische Quadratur des Kreises.* R. 1832 J. Bolyaiem pořízený věrný německý překlad prvních jednatřiceti paragrafů Appendixu s přidanými dvěma novými paragrafy. Otištěno v [2b], str. 185—203.
3. *Responsio ad quaestionem, discussionem dubii, num, et quibusnam conditionibus, quantitates vulgo pro imaginariis habitae, in geometria occurentes construi possint necne, concernentem, ab Inclyta Societate Scientiarum Jablonoskiana Lipsiae anno 1837 motam.*[36]) Sepsáno latinsky r. 1837. Čítá 11 paragrafů. Otištěno v německém překladu v [2b], str. 223—233.
4. *Raum-Lehre* oder Geometrie unabhängig von der, hierin erwiesener Maassen durch endliche vernünftige Wesen a priori nie entschieden werden könnenden, somit nur Gott bewussten und auch selbst dem Allwissenden nur durch unmittelbare Anschauung offenbaren, Wahr- oder Falschheit des berüchtigten 11. EUKLID'schen Axioms; worin auch die geometrische Erzeugungsart von ebenen Flächen und geraden Linien angegeben, und, für den Fall einer Unwahrheit besagten Grundsatzes, die geometrische Quadratur des Kreises bewirkt wird. Nebst einem Anhange enthaltend ebenfalls neue, vollkommen klare Begriffe und Construction der gemeiniglich, obwohl unschicklich sogenannten, eingebildeten oder unmöglichen Grössen; wie auch derlei Grund-Lehren der Kreis-Functionen, unabhängig von aller Raumbetrachtung. Sepsáno německy r. 1855, nedokončeno. Má tři kapitoly (47, 13, 15 paragrafů). Otištěno v [2b], str. 238—267.
5. *Poznámky* ke spisu N. I. Lobačevského „Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien". Sepsány maďarsky v letech 1848—1850. Nebyly určeny k uveřejnění, proto ani později, až na krátké citáty, nebyly publikovány.

POUŽITÁ A CITOVANÁ LITERATURA

[1] *L. Schlesinger:* Johann Bolyai, Festrede. Jahresbericht d. Deutsch. Math. Vereinigung *12* (1903), 165—194.

[2] *P. Stäckel:* Wolfgang und Johann Bolyai. Leipzig-Berlin 1913.
a) Teil 1: Leben und Schriften der beiden Bolyai. b) Teil 2: Stücke aus den Schriften der beiden Bolyai.

[3] *В. Ф. Каган:* Строение неевклидовой геометрии у Лобачевского, Гаусса и Больаи. Труды института истории естествознания *2* (1948), 323—389.

[4] *J. B. Pavlíček:* Základy neeukleidovské geometrie Lobačevského. Praha 1953.

[5] *A. Rényi:* Ideologický význam geometrie Bolyai-Lobačevského. Časopis pro pěst. mat. *78* (1953), 149—167.

[6] *G. Alexits:* Жизнь и деятельность Яноша Бояи. Acta Math. Acad. Sci. Hung. *5* (1954) suppl., 1—20.

[35]) „Dodatek, ve kterém se pojednává o absolutně pravdivé nauce o prostoru, jež je nezávislá na pravdivosti či nepravdivosti XI. Eukleidova axiomu (o čemž nebude nikdy a priori rozhodnuto); pro případ nepravdivosti připojena geometrická kvadratura kruhu."

[36]) „Odpověď na otázku, spočívající v tom, zda a za jakých podmínek mohou být konstruovány tak řečené imaginární veličiny, jež se vyskytují v geometrii, předloženou proslulou Jablonowského vědeckou společností v Lipsku roku 1837."